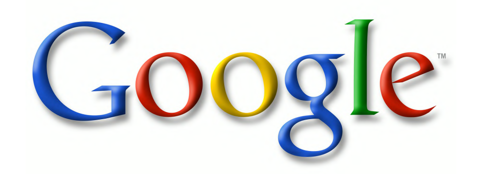
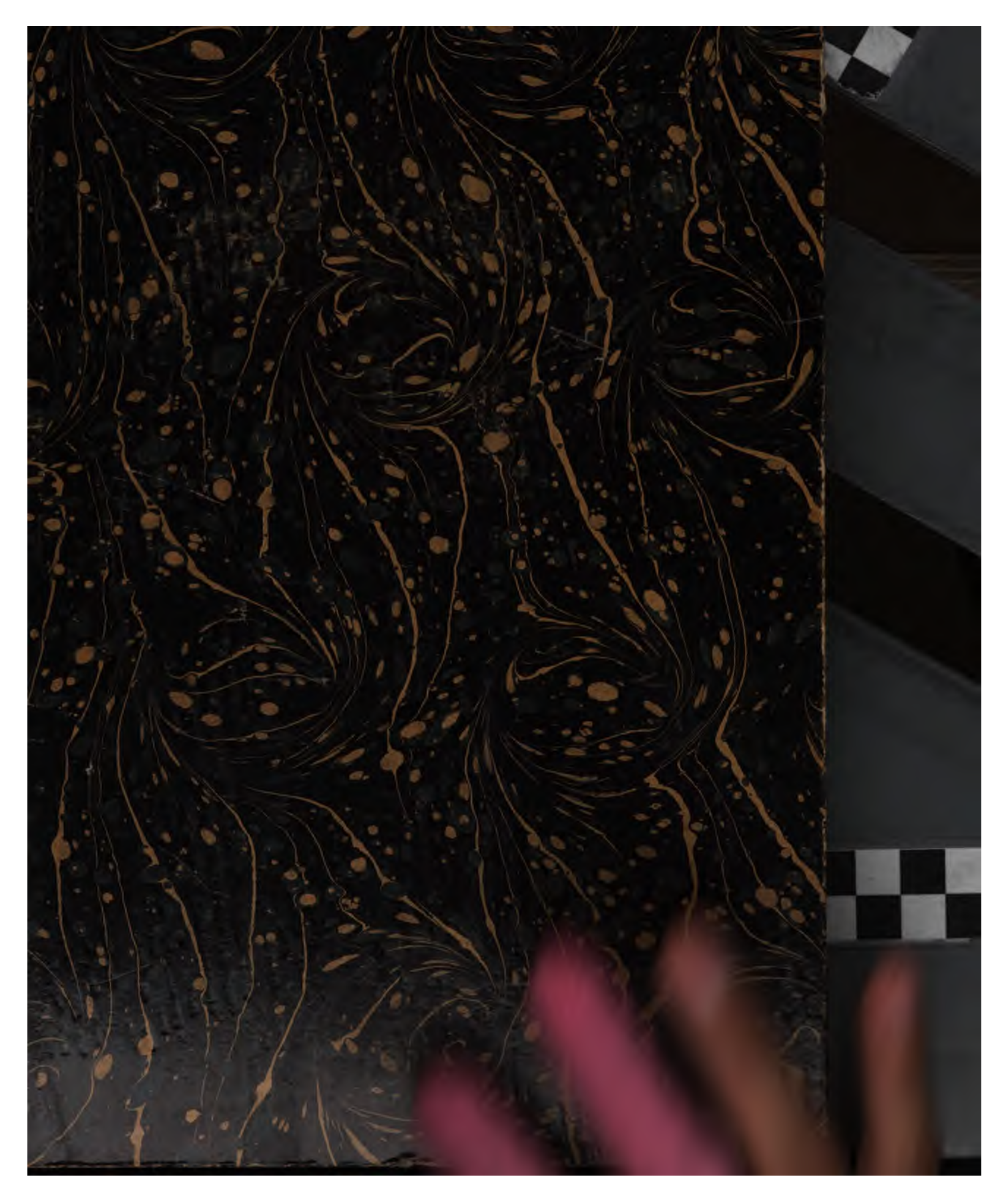








Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Neun und sechzigster Band.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1868.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Vorwort.

Das Journal für die reine und angewandte Mathematik, welches Ende 1825 durch *Crelle* gegründet wurde, war damals das einzige seiner Art in Deutschland und, mit Ausnahme des in *Montpellier* erscheinenden *Gergonne*schen Journals, das einzige in Europa.

Es lag in der Natur der Sache, dass das im Vorwort zum ersten Bande enthaltene Programm gleichzeitig die Erweiterung der Wissenschaft und die Verbreitung derselben als Zwecke des Unternehmens hinstellte. Beide Zwecke sind unter *Crelle*'s Redaction neben einander verfolgt worden, und wenn der erstere in den Vordergrund trat, so lag dies hauptsächlich an dem seltenen Glück, dass das Journal von so hervorragenden Forschern wie *Abel, Jacobi, Dirichlet* und *Steiner* zur Veröffentlichung ihrer Arbeiten gewählt wurde.

Als ich nach *Crelle*'s Tode Anfang 1856 die Redaction übernahm, modificirte ich im Vorwort zum 53sten Bande das bisherige Programm dahin, dass ich die Erweiterung der Wissenschaft als alleinigen Zweck des Journals bezeichnete, was um so angemessener schien, als in den inzwischen in Deutschland neu entstandenen mathematischen Zeitschriften für die Verbreitung der Wissenschaft Raum geschaffen war.

Indem ich nach Verlauf von mehr als 12 Jahren den 17ten unter meiner Redaction beendigten Band dem Publicum übergebe, habe ich nur zu erklären, dass ich die bisher befolgten Grundsätze ungeändert aufrecht erhalte und nur Original-Untersuchungen aufnehme, welche durch ihre Resultate oder die Begründung derselben neu sind.

Diesem Programm gemäss wird nach wie vor denjenigen Abhandlungen, welche neue wohldurchdachte Gedanken in knapper von unwesentlichem Beiwerk freier Darstellung entwickeln, vor allem Andern der Vorzug gegeben. Dagegen kann die mathematische Production in die Breite, welche wie zu allen Zeiten, auch in der unsrigen ihre Freunde hat, durch das hiesige Journal in keiner Weise begünstigt werden.

Wenn meine geehrten Herren Mitarbeiter, wenn die mathematischen Forscher Deutschlands, denen sich nicht selten fremde Forscher als Freunde oder willkommene Gäste anschlossen, mein Journal wie bisher mit ihrer Unterstützung beehren und diejenigen ihrer Arbeiten, in welchen sie eine Erweiterung der Wissenschaft erkennen, mir zur Veröffentlichung anvertrauen —, so wird dies Journal, wie zu hoffen ist, auch darin seinen Beruf zu erfüllen fortfahren, dass es die mathematischen Journal-Abhandlungen, in welchen sich der durch deutsche Arbeit erreichte Fortschritt der Wissenschaft niedergelegt findet, an einem Orte sammelt und vor einer dem Studium nichts weniger als förderlichen Verstreuung bewahrt.

Berlin, den 21. December 1868.

Borchardt.

Inhaltsverzeichniss des neun und sechzigsten Bandes.

Druckfehlerverzeichniss des 69. Bandes.

Pag. 189, Zeile 7 v. u. statt Multiplication lese man Multiplicatoren.
- 332, Ueberschrift zu §. 5 statt ϑ lese man V.

Ueber die Auflösung der Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f.u\ ^*).$$

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *E. Heine.*)

---

§. 1. Die Aufgabe wird gestellt.

In dieser Gleichung bedeuten die Grössen

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots\quad x_n$$

beliebige ganze positive oder negative Zahlen, und die Coefficienten des aus ihnen gebildeten linearen Ausdrucks,

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots\quad \alpha_n$$

gegebene ganze positive oder negative Zahlen, ferner f den allen diesen Coefficienten gemeinschaftlichen Theiler, wenn sie einen dergleichen haben, oder die Einheit, wenn sie mit keinem gemeinschaftlichen Theiler behaftet sind.

Es soll für die Grössen

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots\quad x_n$$

mittelst linearer Substitutionen eine gleiche Anzahl anderer Grössen eingeführt werden, welche ebenfalls jede beliebige ganze Zahl werden können, wenn man für x_1, x_2, ... x_n entsprechende Werthe setzt, und es soll eine derselben

---

*) Das hier aufgestellte und gelöste Problem ist das nämliche, auf welches *Jacobi* (Monatsbericht der Berliner Akademie aus dem Jahre 1848, S. 414—417) die Reduction quadratischer Formen auf die kleinste Anzahl Glieder zurückführt. Er verspricht dort eine Lösung desselben an einem anderen Orte, während er in dem Abdruck des obengenannten Aufsatzes im 39sten Bande des *Crelle*schen Journals S. 290—292 und im 2ten Bande von *Jacobi*s gesammelten Werken S. 135—138, welcher einige Abänderungen in der Redaction enthält, „bei einer andern Gelegenheit mehrere Methoden hierfür angeben" will. In der vorliegenden Arbeit lernt man vier Methoden kennen.

An derselben Stelle S. 291 des Abdrucks im Journal und S. 137 der gesammelten Werke findet man eine wichtige Bemerkung unter dem Texte, die im Monatsberichte fehlt, in welcher *Jacobi* von periodischen Algorithmen spricht, auf welche man bei Einführung gewisser Grenzbedingungen geführt wird. Die weitere Ausführung dieser Andeutungen bildet den letzten Theil des mir vorliegenden Manuscriptes, — die Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen.

Man kann wohl annehmen, dass das Manuscript entstand, als *Jacobi* die Abhandlung aus dem Monatsberichte für das Journal redigirte, also spätestens im Anfange des Jahres 1850, da die in demselben Hefte folgende Arbeit von *Jacobi* das Datum des 17. März 1850 trägt. Andrerseits wird man aus einem Citate ersehen, dass das Manuscript frühestens am Anfange des Jahres 1849 begonnen wurde. *H.*

durch die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f.u$$

gegeben sein.

Ich will zuerst einige Bemerkungen über die Beschaffenheit der anzuwendenden Substitutionen voranschicken.

Man nenne zwei Systeme Grössen, von denen jedes durch das andere mittelst linearer (homogener) Gleichungen definirt wird, und welche, wie es hier der Fall sein soll, die Eigenschaft haben, dass immer wenn man für die Grössen eines von ihnen ganze positive oder negative Zahlen setzt, auch die Grössen des andern Systems ganze positive oder negative Zahlen werden, *äquivalente Systeme Grössen.* Man nenne ferner *reciproke Systeme Gleichungen* zwei Systeme linearer Gleichungen, von denen das eine ein System Grössen (B) durch ein anderes System Grössen (A), das andere umgekehrt die Grössen (A) durch die Grössen (B) ausdrückt. Nach einem Satze der Algebra haben die Determinanten zweier Systeme von linearen Gleichungen, welche durch Umkehrung aus einander erhalten werden, reciproke Werthe, oder *es haben reciproke Gleichungen reciproke Determinanten.*

Man erhält zwei äquivalente Systeme von Grössen (A) und (B), wenn man für die Grössen (B) solche lineare Ausdrücke der Grössen (A) setzt, in denen die Coefficienten beliebige ganze Zahlen sind, deren Determinante ± 1 ist. Denn weil die Coefficienten dieser Ausdrücke ganze Zahlen sind, so werden immer die Grössen (B) ganze Zahlen, wenn man für die Grössen (A) ganze Zahlen setzt. Wenn man ferner die Gleichungen, welche die Grössen (B) durch die Grössen (A) ausdrücken, auflöst, so wird ihre Determinante, zufolge der für die algebraische Auflösung linearer Gleichungen bekannten Formeln, der gemeinschaftliche Nenner, mit welchem in den durch die Auflösung erhaltenen reciproken Gleichungen die Coefficienten der Grössen (B) behaftet werden. Da nun nach der Voraussetzung diese Determinante ± 1 ist, so werden auch die Coefficienten der reciproken Gleichungen ganze Zahlen. Es müssen daher immer auch die Grössen (A) ganze Zahlen werden, wenn man für die Grössen (B) ganze Zahlen setzt, oder es sind die Grössen (A) und (B) äquivalent, was zu beweisen war.

Auf die im Vorstehenden angegebne Art erhält man *alle* einem gegebnen Systeme Grössen äquivalenten Systeme, oder es gilt auch der umgekehrte Satz, *dass die Coefficienten der Gleichungen, welche ein System Grössen durch ein anderes äquivalentes ausdrücken, ganze Zahlen sein müssen, deren*

Determinante den Werth ± 1 *hat.* Dies ergiebt sich durch folgende Betrachtungen:

In den Gleichungen, welche die Grössen (B) durch äquivalente Grössen (A) ausdrücken, setze man eine der Grössen (A) der *Einheit* und alle übrigen der *Null* gleich, so werden die Coefficienten dieser Grössen in den verschiedenen Gleichungen die Werthe, welche die Grössen (B) für eine solche Bestimmung der Grössen (A) annehmen. Wenn man für die $=1$ gesetzte Grösse nach und nach alle verschiedenen desselben Systems nimmt, werden auf diese Weise sämmtliche Coefficienten Werthe, welche die Grössen des einen Systems annehmen, wenn man für die Grössen eines äquivalenten ganze positive Zahlen (hier 0 und 1) setzt. Es müssen daher zufolge der Definition äquivalenter Systeme die Coefficienten der Gleichungen, welche die Grössen (B) durch andere äquivalente Grössen (A) ausdrücken, ganze Zahlen sein. Aus demselben Grunde folgt, dass auch die Coefficienten der reciproken Gleichungen, welche die Grössen (A) durch die Grössen (B) ausdrücken, ganze Zahlen sein müssen. Es werden hiernach auch die Determinanten der beiden reciproken Systeme Gleichungen, welche die Grössen (B) durch die Grössen (A) und welche die Grössen (A) durch die Grössen (B) ausdrücken, ganze Zahlen, da die Determinanten ganze Functionen der Coefficienten sind, und zwar müssen sie zufolge des oben angeführten Satzes solche ganze Zahlen werden, welche reciproke Werthe haben. Es ist aber ± 1 die einzige ganze Zahl, deren reciproker Werth auch wieder eine ganze Zahl ist, und es müssen daher diese Determinanten den Werth ± 1 haben.

Dem Vorstehenden zufolge kommt die vorgelegte Aufgabe mit der Aufgabe überein, *wenn eine Reihe von n Zahlen*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_n$$

gegeben ist, deren gemeinschaftlicher Theiler f ist, $n-1$ *andere Reihen von n Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass die Determinante der* n^2 *Zahlen* $= \pm f$ *wird.* Unter dieser Form hat neulich Herr *Hermite* die vorgelegte Aufgabe in einer lehrreichen Abhandlung behandelt*).

Ich werde jetzt, nachdem ich diese Bemerkungen über die anzuwendenden Substitutionen zur Erläuterung der Aufgabe vorausgeschickt habe, mehrere Auflösungen derselben mittheilen. Die beiden ersten Auflösungen setzen voraus, dass man zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nach Belieben eine ge-

*) *Liouville,* Journal de mathématiques T. XIV, année 1849, p. 21—30. M. vergl. den Schluss der Bemerk. auf S. 1. *H.*

wisse Reihenfolge annimmt, und man wird, je nachdem man diese oder jene Ordnung, in welcher sie auf einander folgen sollen, festgesetzt hat, die verschiedensten Resultate erhalten können. Die dritte Auflösung ist von dieser Willkür grossen Theils befreit, und behandelt die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf mehr gleichmässige Weise. Diese drei Auflösungen beruhen auf der wiederholten Anwendung des Verfahrens, durch welches der gemeinschaftliche Theiler zweier gegebenen Zahlen gesucht wird. Es giebt aber noch eine andere Auflösungsmethode, welche sich anderer Algorithmen bedient, die mannigfaltigster Anwendungen auf Arithmetik und Analysis fähig sind *); diese Methode wird hier als die vierte mitgetheilt.

§. 2. Die Aufgabe wird auf eine einfachere zurückgeführt.

Da f der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ist, so werden die Zahlen

$$\frac{\alpha_1}{f}, \quad \frac{\alpha_2}{f}, \quad \ldots \quad \frac{\alpha_n}{f}$$

keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Man kann daher die vorgelegte Gleichung mittelst Division durch f immer auf eine andere zurückführen, in welcher $f = 1$ oder die Coefficienten der Gleichung keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es kann dann der Fall eintreten, dass auch eine kleinere Anzahl dieser Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Dieser Fall wird sogar die Regel bilden, da schon für ein mässig grosses n die n Coefficienten sehr grosse Werthe haben müssen, wenn je $n-1$ derselben einen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen **). Es lässt sich aber in diesem Falle die Gleichung auf eine andere zurückführen, welche eine geringere Anzahl Variabeln enthält.

---

*) Das Manuscript fährt hier folgender Massen fort: „Da diese mehrerer Entwicklungen bedürfen, so werde ich dieselben an einem andern Orte mittheilen, und hier nur die Auflösungen auseinandersetzen, welche sich an die gewöhnlichen Methoden anschliessen, da es gut schien, diese zuvor mit Sorgfalt zu erörtern". Von diesem ursprünglichen Plane weicht *Jacobi* ab, indem er nicht nur die vierte Methode sondern auch jene Anwendungen mittheilt. Ich musste mich daher zu einer Aenderung entschliessen und nahm hier noch die vierte Methode auf. Die Anwendungen sind der Gegenstand der folgenden Arbeit, welche den Titel erhalten hat, den ihr *Jacobi* als Ueberschrift eines Abschnittes gab. *H.*

**) Unten, bei der dritten Lösung, ist dieses weiter ausgeführt, und ein Beispiel für $n = 5$ gegeben (cf. §. 6). *H.*

Wenn nämlich von den n Coefficienten schon eine kleinere Anzahl, z. B. die Coefficienten

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m,$$

keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so zerfällt die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = u$$

in zwei andere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = v,$$

$$v = u - \alpha_{m+1} x_{m+1} - \alpha_{m+2} x_{m+2} - \cdots - \alpha_n x_n.$$

Die Aufgabe kommt dann bloss auf die Auflösung der ersten Gleichung zurück. Hat man nämlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ durch ein äquivalentes System von m anderen Grössen, von denen eine die Grösse v ist,

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_{m-1}, \quad v,$$

ausgedrückt, so hat man nur nöthig in diesen Ausdrücken für v seinen Werth aus der zweiten Gleichung zu substituiren. Man hat dann die gegebenen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Grössen

$$z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, u, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$$

ausgedrückt, und diese Grössen bilden, wie verlangt wird, ein den gegebenen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ äquivalentes System, zu welchem die durch die gegebene Gleichung bestimmte Grösse u gehört. Denn wenn nach der Voraussetzung die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$ und $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, v$ äquivalent sind, d. h. wenn die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, v$ immer ganze Zahlen werden, sobald $x_1, x_2, \ldots x_m$ ganze Zahlen sind, und umgekehrt, so werden auch die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, u, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ immer ganze Zahlen, wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganze Zahlen sind, und umgekehrt, und es werden daher auch diese beiden Systeme Grössen äquivalent sein.

Giebt es mehrere Gruppen von Coefficienten, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man jede solche Gruppe für die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ nehmen, und sich begnügen, in Bezug auf dieselben das obige Verfahren anzuwenden, nach welchem nur für die Variabeln, in welche die Coefficienten der gewählten Gruppe multiplicirt sind, neue Variabeln eingeführt werden. Je nachdem man diese oder jene Gruppe erwählt, wird man ganz andere Lösungen erhalten. Um auf die einfachste Art zu einer allgemeinen Lösung zu gelangen, wird man hierbei diejenige Gruppe wählen, welche die kleinste Anzahl Coefficienten, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, umfasst, weil man dann eine grössere Anzahl von den gegebenen Variabeln beibehalten kann, als dies bei einer andern Wahl der Fall sein würde.

Ist einer der Coefficienten z. B. $\alpha_1 = 1$, so hat man die Grössen u, x_2, x_3, ... x_n selber als das einfachste, den Grössen x_1, x_2, ... x_n äquivalente System Grössen, so dass man hier nur für eine Variable x_1 eine andere einzuführen hat, um die einfachste Lösung zu erhalten.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, was von Wichtigkeit für die dritte Lösung ist, *dass man die Aufgabe immer auf die Auflösung einer Gleichung*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = u$$

zurückführen kann, in welcher die Coefficienten so beschaffen sind, dass es keine Zahl giebt, welche sie sämmtlich theilt, während je $n-1$ derselben einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

§. 3. Die Aufgabe wird in einem besondern Falle gelöst.

Ehe ich die verschiedenen Lösungen der allgemeinen Aufgabe mittheile, will ich mich zuerst mit dem leichtesten und einfachsten Falle *zweier* Variabeln beschäftigen, nämlich mit der Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = f.u$, da die Lösung derselben das Element bildet, aus dem die Lösung der allgemeinen Aufgabe zusammengesetzt werden kann.

Da nach der Voraussetzung

$$\frac{\alpha_1}{f} \text{ und } \frac{\alpha_2}{f}$$

ganze Zahlen sind, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man zwei positive oder negative ganze Zahlen β und γ bestimmen, welche der Gleichung

$$\gamma \frac{\alpha_1}{f} - \beta \frac{\alpha_2}{f} = 1$$

genügen. Multiplicirt man diese Gleichung mit $f.u$ so erhält man

$$\alpha_1 . \gamma u - \alpha_2 . \beta u = f.u$$

oder allgemeiner

$$\alpha_1 \left\{ \gamma u - \frac{\alpha_2}{f} z \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{\alpha_1}{f} z - \beta u \right\} = f.u,$$

wo z eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Man kann daher

$$x_1 = \gamma u - \frac{\alpha_2}{f} z,$$

$$x_2 = -\beta u + \frac{\alpha_1}{f} z$$

setzen. Diese Gleichungen enthalten die verlangte Auflösung der vorgelegten

Gleichung. Denn, da die Ausdrücke rechts ganze Zahlen zu Coefficienten haben, deren Determinante

$$\gamma\frac{\alpha_1}{f}-\beta\frac{\alpha_2}{f}$$

der Einheit gleich ist, so ist das System der Grössen u und z, von denen eine die durch die vorgelegte Gleichung bestimmte Grösse u ist, dem Systeme der Grössen x_1 und x_2 äquivalent.

Durch Umkehrung erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = f.u,$$
$$\beta x_1+\gamma x_2 = z,$$

von denen die erste die vorgelegte Gleichung selber ist.

§. 4. Erste Auflösung der Gleichung $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n = f.u.$

Es sei f_2 der gemeinschaftliche Theiler von α_1 und α_2, so kann man zufolge der im Vorhergehenden gelösten Aufgabe für die Grössen x_1 und x_2 ein äquivalentes System anderer Grössen z_1 und y_2 von der Beschaffenheit einführen, dass

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = f_2 y_2.$$

Es sei ferner f_3 der gemeinschaftliche Theiler von f_2 und α_3, so kann man für die Grössen y_2 und x_3 ein äquivalentes System anderer Grössen z_2 und y_3 von der Beschaffenheit einführen, dass

$$f_2 y_2+\alpha_3 x_3 = f_3 y_3.$$

Fährt man so fort, und nennt allgemein f_i den gemeinschaftlichen Theiler von f_{i-1} und α_i, so hat man das folgende System Gleichungen *):

$$(1.)\quad\begin{cases} \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = f_2 y_2, \\ f_2 y_2+\alpha_3 x_3 = f_3 y_3, \\ f_3 y_3+\alpha_4 x_4 = f_4 y_4, \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_{n-2}y_{n-2}+\alpha_{n-1}x_{n-1} = f_{n-1}y_{n-1}, \\ f_{n-1}y_{n-1}+\alpha_n x_n = f_n y_n. \end{cases}$$

Da f_i der gemeinschaftliche Theiler von f_{i-1} und α_i, f_{i-1} der gemeinschaftliche

*) Eine spätere Hinzufügung zum Manuscripte machte hier eine Redactionsänderung erforderlich. H.

Theiler von f_{i-2} und α_{i-1} u. s. f., f_3 der gemeinschaftliche Theiler von f_2 und α_3, endlich f_2 der gemeinschaftliche Theiler von α_1 und α_2 ist, so wird f_i der gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$. Es ist daher f_n der gemeinschaftliche Theiler aller Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und daher *ist f_n der Theiler f selbst. Es kommt also y_n mit u überein.*

Da z_1 und y_2 ein den Grössen x_1 und x_2, und z_2 und y_3 ein den Grössen y_2 und x_3 äquivalentes System ist, so sind z_1, y_2, z_2, y_3 den Grössen x_1, x_2, y_2, x_3 äquivalent, oder es ist z_1, z_2, y_3 ein den Grössen x_1, x_2, x_3 äquivalentes System. Ebenso ergiebt die Zusammenstellung aller Substitutionen, aus welchen die Gleichungen (1.) erhalten worden sind, dass

$$z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, \ldots z_{n-2}, y_{n-1}, z_{n-1}, u$$

ein den Grössen

$$x_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, \ldots y_{n-2}, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n$$

äquivalentes System Grössen sind, woraus folgt, wenn man die beiden Systemen gemeinschaftlichen Grössen fortlässt, dass das System der Grössen

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-2}, z_{n-1}, u$$

dem System der gegebnen Grössen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$$

äquivalent ist. Da nun aus (1.) die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n = f.u$$

folgt, so haben wir für die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine äquivalentes System anderer Grössen eingeführt, von denen eine die durch die vorgelegte Gleichung bestimmte Grösse u ist, was die Aufgabe verlangt.

Um die Substitutionen selbst zu erhalten, durch welche im Vorigen für die gegebenen Variabeln nach und nach andere äquivalente eingeführt worden sind, suche man solche positive oder negative ganze Zahlen

$$\beta_1, \gamma_1; \quad \beta_2, \gamma_2; \quad \ldots \quad \beta_{n-1}, \gamma_{n-1},$$

welche den Gleichungen genügen

$$(2.) \quad \begin{cases} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_1 = f_2, \\ f_2 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 = f_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n-1} \gamma_{n-1} - \alpha_n \beta_{n-1} = f_n. \end{cases}$$

Man wird alsdann, zufolge der von der Elementaraufgabe gegebenen Lösung, die Gleichungen

$$
(3.)\quad \begin{cases}
x_1 = \gamma_1 y_2 - \dfrac{\alpha_2}{f_2} z_1, & x_2 = -\beta_1 y_2 + \dfrac{\alpha_1}{f_2} z_1, \\
y_2 = \gamma_2 y_3 - \dfrac{\alpha_3}{f_3} z_2, & x_3 = -\beta_2 y_3 + \dfrac{f_2}{f_3} z_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
y_{n-1} = \gamma_{n-1} y_n - \dfrac{\alpha_n}{f_n} z_{n-1}, & x_n = -\beta_{n-1} y_n + \dfrac{f_{n-1}}{f_n} z_{n-1}
\end{cases}
$$

haben, von denen je zwei in derselben Horizontalreihe befindliche die entsprechende von den Gleichungen (1.) ergeben. Ausserdem erhält man noch durch Auflösung von je zwei in derselben Horizontalreihe befindlichen Gleichungen die folgenden:

$$
(4.)\quad \begin{cases}
z_1 = \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, \\
z_2 = \beta_2 y_2 + \gamma_2 x_3, \\
\cdots\cdots \\
z_{n-1} = \beta_{n-1} y_{n-1} + \gamma_{n-1} x_n.
\end{cases}
$$

Umgekehrt wird man aus den Gleichungen (1.) und (4.) die Gleichungen (3.) erhalten.

Mittelst der Gleichungen (1.), (3.), (4.) kann man leicht durch Elimination der $n-2$ Hülfsgrössen

$$y_2,\quad y_3,\quad \ldots\quad y_{n-1}$$

die beiden äquivalenten Systeme Grössen

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n \quad \text{und} \quad z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{n-1},\ y_n$$

unmittelbar durch einander ausdrücken. Man kann nämlich aus den Gleichungen (1.) durch successive Substitution, indem man die letzte Gleichung fortlässt, die Hülfsgrössen

$$y_2,\quad y_3,\quad \ldots\quad y_{n-1}$$

durch $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ ausdrücken. Die Substitution dieser Ausdrücke in (4.) und in die letzte der Gleichungen (1.) giebt dann die verlangten Ausdrücke von $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, y_n$ durch $x_1, x_2, \ldots x_n$. Auf ähnliche Art werden aus dem ersten System der Gleichungen (3.), indem man von der untersten Gleichung anfängt und die erste fortlässt, durch successive Substitution die Ausdrücke der Hülfsgrössen $y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ durch y_n, z_{n-1}, $z_{n-2}, \ldots z_2$ gefunden, deren Substitution in die übrigen Gleichungen (3.) die Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, y_n$ giebt.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2 y_2 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \\ f_3 y_3 &= f_2 y_2 + \alpha_3 x_3, \\ & \cdots\cdots \\ f_{n-1} y_{n-1} &= f_{n-2} y_{n-2} + \alpha_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}$$

erhält man nach und nach

$$(5.)\quad \begin{cases} y_2 = \frac{\alpha_1}{f_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_2} x_2, \\ y_3 = \frac{\alpha_1}{f_3} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_3} x_2 + \frac{\alpha_3}{f_3} x_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = \frac{\alpha_1}{f_{n-1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_{n-1}} x_2 + \frac{\alpha_3}{f_{n-1}} x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} x_{n-1}. \end{cases}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, \\ z_2 &= \beta_2 y_2 + \gamma_2 x_3, \\ & \cdots\cdots \\ z_{n-1} &= \beta_{n-1} y_{n-1} + \gamma_{n-1} x_n, \\ y_n &= \frac{f_{n-1}}{f_n} y_{n-1} + \frac{\alpha_n}{f_n} x_n, \end{aligned}$$

so erhält man die folgenden Ausdrücke der neuen Variabeln

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_{n-1}, \quad u$$

aus den gegebenen $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$(6.)\quad \begin{cases} z_1 = \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, \\ z_2 = \frac{\beta_2}{f_2}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \gamma_2 x_3, \\ z_3 = \frac{\beta_3}{f_3}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \gamma_3 x_4, \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1} = \frac{\beta_{n-1}}{f_{n-1}}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}) + \gamma_{n-1} x_n, \\ u = \frac{1}{f_n}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_n x_n). \end{cases}$$

Die letzte von diesen Gleichungen ist die vorgelegte Gleichung selber.

Aus den Gleichungen

$$y_{n-1} = \gamma_{n-1} y_n - \frac{\alpha_n}{f_n} z_{n-1},$$

$$y_{n-2} = \gamma_{n-2} y_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} z_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_2 = \gamma_2 y_3 - \frac{\alpha_3}{f_3} z_2$$

erhält man nach und nach, wenn man mit Γ_i^k das Product

$$\gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_k = \Gamma_i^k$$

bezeichnet, die folgenden Werthe der Hülfsgrössen $y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ durch die neuen Variabeln ausgedrückt:

$$(7.)\quad \begin{cases} y_{n-1} = \Gamma_{n-1}^{n-1} y_n - \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n}, \\ y_{n-2} = \Gamma_{n-2}^{n-1} y_n - \Gamma_{n-2}^{n-2} \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \dfrac{\alpha_{n-1} z_{n-2}}{f_{n-1}}, \\ y_{n-3} = \Gamma_{n-3}^{n-1} y_n - \Gamma_{n-3}^{n-2} \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \Gamma_{n-3}^{n-3} \dfrac{\alpha_{n-1} z_{n-2}}{f_{n-1}} - \dfrac{\alpha_{n-2} z_{n-3}}{f_{n-2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_2 = \Gamma_2^{n-1} y_n - \Gamma_2^{n-2} \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \cdots - \Gamma_2^2 \dfrac{\alpha_4 z_3}{f_4} - \dfrac{\alpha_3 z_2}{f_3}. \end{cases}$$

Wenn man diese Werthe in die folgenden Gleichungen substituirt, welche in dem System der Gleichungen (3.) enthalten sind,

$$(7^*.)\quad \begin{cases} x_n = -\beta_{n-1} y_n + \dfrac{f_{n-1} z_{n-1}}{f_n}, \\ x_{n-1} = -\beta_{n-2} y_{n-1} + \dfrac{f_{n-2} z_{n-2}}{f_{n-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_2 = -\beta_1 y_2 + \dfrac{\alpha_1 z_1}{f_2}, \\ x_1 = \gamma_1 y_1 - \dfrac{\alpha_2 z_1}{f_2}, \end{cases}$$

so erhält man, wenn man u für y_n setzt,

$$
(8.)\quad \begin{cases}
x_n = -\beta_{n-1}u + \dfrac{f_{n-1}z_{n-1}}{f_n}, \\[2ex]
x_{n-1} = \beta_{n-2}\left\{-I'^{\,n-1}_{n-1}u + \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n}\right\} + \dfrac{f_{n-2}z_{n-2}}{f_{n-1}}, \\[2ex]
x_{n-2} = \beta_{n-3}\left\{-I'^{\,n-1}_{n-2}u + I'^{\,n-2}_{n-2}\dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} + \dfrac{\alpha_{n-1}z_{n-2}}{f_{n-1}}\right\} + \dfrac{f_{n-3}z_{n-3}}{f_{n-2}}, \\[2ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[2ex]
x_2 = \beta_1\left\{-I'^{\,n-1}_{2}u + I'^{\,n-2}_{2}\dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} + \cdots + I'^{\,2}_{2}\dfrac{\alpha_4 z_3}{f_4} + \dfrac{\alpha_3 z_2}{f_3}\right\} + \dfrac{\alpha_1 z_1}{f_2}, \\[2ex]
x_1 = I'^{\,n-1}_{1}u - I'^{\,n-2}_{1}\dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \cdots - I'^{\,2}_{1}\dfrac{\alpha_4 z_3}{f_4} - I'^{\,1}_{1}\dfrac{\alpha_3 z_2}{f_3} - \dfrac{\alpha_2 z_1}{f_2}.
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (6.) und (8.), welche zu einander reciprok sind, haben dieselbe charakteristische Form. In jedem dieser beiden Systeme Gleichungen enthalten nämlich die beiden letzten rechts alle Glieder, und jede vorhergehende Gleichung immer ein Glied weniger, so dass die erste Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen nur zwei Glieder hat. *Wenn man ferner in einer beliebigen Gleichung rechts das letzte Glied fortlässt, so giebt das lineare Aggregat der übrigen Variabeln, wenn man dasselbe mit verschiedenen constanten Factoren multiplicirt, die linearen Aggregate derselben Variabeln in den folgenden Gleichungen.*

Ich bemerke noch, dass, abgesehen von den zwischen den Grössen α_i, β_i, γ_i, f_i Statt findenden Relationen (2.), die Determinante sowohl der Gleichungen (6.) als der Gleichungen (8.) durch dasselbe Product

$$\frac{\alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_1}{f_2} \cdot \frac{f_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_2}{f_3} \cdots\cdots \frac{f_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_n\beta_{n-1}}{f_n}$$

dargestellt werden kann. Die einzelnen Factoren dieses Products werden zufolge der Gleichungen (2.) der *Einheit* gleich, weshalb auch, wie es bei reciproken Gleichungen zwischen zwei äquivalenten Systemen Grössen nach dem oben angeführten Satze der Fall sein muss, die beiden Determinanten selbst der *Einheit* gleich werden.

Dieselbe Rechenoperation, welche zur successiven Auffindung der Zahlen $f_2, f_3, \ldots f_n$ dient, führt zugleich auch zur Bestimmung der Zahlen β_i und γ_i. Denn wenn man von dem Kettenbruch, in den man den Bruch

$$\frac{\alpha_{i+1}}{f_i}$$

zu entwickeln hat, um den grössten Theiler f_{i+1} von f_i und α_{i+1} zu finden, den letzten Partialbruch fortlässt, und den übrig bleibenden Kettenbruch von

hinten berechnet, so giebt der Zähler und Nenner des so erhaltenen Bruches die Werthe von β_i und γ_i, welche die Gleichung

$$\frac{f_i}{f_{i+1}}\gamma_i - \frac{\alpha_{i+1}}{f_{i+1}}\beta_i = 1$$

erfüllen. Es können also die Zahlen β_i und γ_i immer so angenommen werden, dass, abgesehen vom Zeichen,

$$\beta_i < \tfrac{1}{2}\frac{f_i}{f_{i+1}}, \qquad \gamma_i < \frac{\alpha_{i+1}}{f_{i+1}}$$

wird. Hieraus folgt, dass in den Gleichungen (6.), welche die statt der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einzuführenden Grössen mittelst der Formel

$$z_i = \frac{\beta_i}{f_i}\alpha_1 x_1 + \frac{\beta_i}{f_i}\alpha_2 x_2 + \cdots + \frac{\beta_i}{f_i}\alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1}$$

geben, die Coefficienten von $x_1, x_2, \ldots x_{i+1}$ ihrem absoluten Werthe nach respective kleiner als die Zahlen

$$\tfrac{1}{2}\frac{\alpha_1}{f_{i+1}}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_2}{f_{i+1}}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_i}{f_{i+1}}, \quad \frac{\alpha_{i+1}}{f_{i+1}}$$

werden. Dagegen können die Gleichungen (8.), welche direct angeben, welche Ausdrücke der neuen Grössen man für die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu substituiren hat, sehr grosse Coefficienten erhalten, da z. B. u in dem Ausdrucke von x_1 die Zahl Γ_1^{n-1} oder das Product $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}$ zum Coefficienten hat. Es wird daher eine zweite Lösung wünschenswerth sein, welche solche Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die für dieselben einzuführenden Grössen giebt, in denen die Coefficienten möglichst kleine Zahlen werden.

§. 5. Zweite Lösung.

Wenn es bloss darauf ankommt, für ein gegebenes u Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu finden, welche die Gleichung

$$\frac{\alpha_1}{f}x_1 + \frac{\alpha_2}{f}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{f}x_n = u$$

erfüllen, so reichen hierzu die Gleichungen (1.) hin, welche die Stelle der gegebenen Gleichung vertreten. Schreibt man nämlich die Gleichungen (1.) in verkehrter Ordnung, indem man zugleich f und u für f_n und y_n setzt, so erhält man

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{f_{n-1}}{f}y_{n-1}+\frac{\alpha_n}{f}x_n = u, \\ \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}y_{n-2}+\frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}}x_{n-1} = y_{n-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{f_2}{f_3}y_2 + \frac{\alpha_3}{f_3}x_3 = y_3, \\ \frac{\alpha_1}{f_2}x_1 + \frac{\alpha_2}{f_2}x_2 = y_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach und nach die Zahlen

$$x_n \text{ und } y_{n-1},\; x_{n-1} \text{ und } y_{n-2},\; \ldots\; x_3 \text{ und } y_2,\; x_2 \text{ und } x_1$$

finden, und dieselben so bestimmen, dass wenn $i \geqq 2$ und f_1 statt α_1 gesetzt wird, vom Zeichen abgesehen immer

$$x_i < \tfrac{1}{2}\frac{f_{i-1}}{f_i}$$

wird. Die Grenze von x_1 würde von der Grösse von u abhängen, und am leichtesten aus der vorgelegten Gleichung selbst entnommen werden.

Allgemeine Ausdrücke, welche, für $x_1, x_2, \ldots x_n$ gesetzt, der vorgelegten Gleichung genügen, und in denen zugleich die Coefficienten verhältnissmässig kleine Zahlen sind, wird man aus denselben Gleichungen (9.) ableiten, wenn man jede derselben nach der zu Anfang entwickelten Vorschrift auflöst, und immer die kleinsten Werthe nimmt, welche man für die Coefficienten der für die beiden Variabeln jedesmal zu substituirenden Ausdrücke erhalten kann.

Aus der ersten Gleichung (9.)

$$\frac{f_{n-1}}{f}y_{n-1}+\frac{\alpha_n}{f}x_n = u$$

erhält man nämlich, wenn man die Zahlen a' und b' durch die Gleichung

$$\frac{f_{n-1}}{f}a'+\frac{\alpha_n}{f}b' = 1$$

bestimmt, die allgemeinen Ausdrücke

$$x_n = b'u+\frac{f_{n-1}}{f}u',$$

$$y_{n-1} = a'u-\frac{\alpha_n}{f}u',$$

wo u' eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Nach Substitution dieses Aus-

drucks von y_{n-1} wird die zweite Gleichung (9.)

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}y_{n-2}+\frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}}x_{n-1} = a'u-\frac{\alpha_n}{f}u'.$$

Bestimmt man *vier* ganze Zahlen a'', b'' und a''_1, b''_1 durch die Gleichungen

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}a''+\frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}}b'' = a',$$

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}a''_1+\frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}}b''_1 = -\frac{\alpha_n}{f},$$

so erhält man für x_{n-1} und y_{n-2} die allgemeinen Ausdrücke

$$x_{n-1} = b''u+b''_1u'+\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}u'',$$

$$y_{n-2} = a''u+a''_1u'-\frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}}u'',$$

wo u'' ebenfalls eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Fährt man so fort, so erhält man die Gleichungen

$$(10.)\quad\begin{cases} x_n = b'u+\frac{f_{n-1}}{f}u', \\ x_{n-1} = b''u+b''_1u'+\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}u'', \\ x_{n-2} = b'''u+b'''_1u'+b'''_2u''+\frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}u''', \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_2 = b^{(n-1)}u+b_1^{(n-1)}u'+b_2^{(n-1)}u''+\dots+b_{n-2}^{(n-1)}u^{(n-2)}+\frac{\alpha_1}{f_2}u^{(n-1)}, \\ x_1 = a^{(n-1)}u+a_1^{(n-1)}u'+a_2^{(n-1)}u''+\dots+a_{n-2}^{(n-1)}u^{(n-2)}-\frac{\alpha_2}{f_2}u^{(n-1)}, \end{cases}$$

wo die Zahlen $a_k^{(i)}$ und $b_k^{(i)}$ aus den Zahlen $a_k^{(i-1)}$ und $b_k^{(i-1)}$ durch die Formeln

$$(11.)\quad\begin{cases} \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}a^{(i)}+\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}b^{(i)} = a^{(i-1)}, \\ \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}a_1^{(i)}+\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}b_1^{(i)} = a_1^{(i-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}a_{i-2}^{(i)}+\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}b_{i-2}^{(i)} = a_{i-2}^{(i-1)}, \\ \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}a_{i-1}^{(i)}+\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}b_{i-1}^{(i)} = -\frac{\alpha_{n-i+2}}{f_{n-i+2}} \end{cases}$$

gefunden werden. Man erhält ferner

$$(12.)\quad y_{n-i} = a^{(i)}u+a_1^{(i)}u'+\dots+a_{i-1}^{(i)}u^{(i-1)}-\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}u^{(i)}.$$

Die Zahlen $b_k^{(i)}$ können immer so bestimmt werden, dass abgesehen vom Zeichen

$$b_k^{(i)} < \tfrac{1}{2}\frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}$$

wird.

Man sieht, dass auch in den Gleichungen (10.) die Zahl der Glieder rechts nur in den beiden letzten Gleichungen vollständig ist und in den vorhergehenden immer um eins abnimmt. Aber es wird dies nicht mehr bei den zu (10.) reciproken Gleichungen der Fall sein, deren jede im Allgemeinen sämmtliche Variabeln x_i enthält. Dass bei dieser Lösung auch die Zahlen $a_k^{(n-1)}$, welche die Coefficienten des für x_1 gefundenen Ausdrucks bilden, niemals sehr gross werden, erhellt aus den Gleichungen

$$(12^*.)\quad \begin{cases} a^{(n-1)} = -\dfrac{1}{\alpha_1}\{\alpha_2 b^{(n-1)}+\alpha_3 b^{(n-2)}+\cdots+\alpha_n b'-f\}, \\ a_k^{(n-1)} = -\dfrac{1}{\alpha_1}\left\{\alpha_2 b_k^{(n-1)}+\alpha_3 b_k^{(n-2)}+\cdots+\alpha_{n-k} b_k^{(k+1)}+\alpha_{n-k+1}\dfrac{f_{n-k}}{f_{n-k+1}}\right\}, \end{cases}$$

in welchen k die Werthe 1, 2, ... $n-2$ annehmen kann. Diese Gleichungen ergeben sich aus (10.) durch die Betrachtung, dass sich durch Substitution der für x_1, x_2, ... x_n gefundenen Ausdrücke das Aggregat

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n$$

auf den einen Term $f.u$ reduciren muss.

Da sowohl das System der Grössen u, z_1, z_2, ... z_{n-1} als das System der Grössen u, u', u'', ... $u^{(n-1)}$ dem System der Grössen x_1, x_2, ... x_n äquivalent ist, so müssen diese beiden Systeme Grössen auch einander äquivalent sein. Denn zwei Systeme Grössen, welche einem dritten äquivalent sind, sind auch untereinander äquivalent. Man findet die Gleichungen, welche die Variabeln z_1, z_2, ... z_{n-1} durch die Variabeln u, u', u'', ... $u^{(n-1)}$ ausdrücken, und mittelst deren man die beiden im Vorigen gegebenen Lösungen auf einander zurückführen kann, auf folgende Art:

Zufolge (2.) genügen die Zahlen β_{n-i} und γ_{n-i} der Gleichung

$$\frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}\gamma_{n-i}-\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}\beta_{n-i} = 1,$$

und zufolge (11.) die Zahlen $a_k^{(i)}$ und $b_k^{(i)}$ der Gleichung

$$\frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}a_k^{(i)}+\frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}}b_k^{(i)} = a_k^{(i-1)},$$

wo

$$a_{i-1}^{(i-1)} = -\frac{\alpha_{n-i+2}}{f_{n-i+2}}$$

gesetzt wird. Es folgt hieraus, dass man immer

$$(13.)\quad \begin{cases} a_k^{(i)} = \gamma_{n-i} a_k^{(i-1)} + \dfrac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} \lambda_k^{(i)}, \\ b_k^{(i)} = -\beta_{n-i} a_k^{(i-1)} + \dfrac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} \lambda_k^{(i)} \end{cases}$$

setzen kann, wo $\lambda_k^{(i)}$ eine ganze Zahl bedeutet. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x_{n-i+1} &= b^{(i)} u + b_1^{(i)} u' + \cdots + b_{i-1}^{(i)} u^{(i-1)} + \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} u^{(i)}, \\ &= -\beta_{n-i} \{ a^{(i-1)} u + a_1^{(i-1)} u' + \cdots + a_{(i-1)}^{(i-1)} u^{(i-1)} \} \\ &\quad + \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} \{ \lambda^{(i)} u + \lambda_1^{(i)} u' + \cdots + \lambda_{i-1}^{(i)} u^{(i-1)} + u^{(i)} \}. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist zufolge (12.) der in $-\beta_{n-i}$ multiplicirte Ausdruck $= y_{n-i+1}$; es ist ferner zufolge (7*.)

$$x_{n-i+1} = -\beta_{n-i} y_{n-i+1} + \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} z_{n-i},$$

und es wird daher

$$(14.)\quad z_{n-i} = \lambda^{(i)} u + \lambda_1^{(i)} u' + \cdots + \lambda_{i-1}^{(i)} u^{(i-1)} + u^{(i)}.$$

Durch diese allgemeine Formel können die beiden Lösungen auf einander zurückgeführt werden, nachdem man für jedes i die Zahlen $\lambda_k^{(i)}$ aus einer der Gleichungen (13.) bestimmt hat.

Beide im Vorigen gegebene Lösungen hängen von der willkürlichen Anordnung der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ab, und führen je nach der verschiedenen Reihenfolge, die man zwischen diesen Zahlen annimmt, zu verschiedenen Systemen von Grössen, welche man für die gegebenen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einzuführen hat. Eine mehr symmetrische Lösung ist die folgende.

§. 6. Dritte Lösung.

Es soll im Folgenden angenommen werden, dass die Coefficienten der vorgelegten Gleichung von einem gemeinsamen Theiler befreit sind, oder dass $f = 1$. Man kann ferner voraussetzen, dass je $n-1$ der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ einen gemeinsamen Theiler haben, weil wenn dies nicht der Fall ist, die Aufgabe, wie man oben §. 2 gesehen hat, immer auf eine einfachere zurückgeführt werden kann, in welcher diese Voraussetzung Statt findet.

Es sei h_i die grösste Zahl, welche alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ausser α_i theilt, so werden je zwei von den Zahlen $h_1, h_2, \dots h_n$ zueinander relative Primzahlen sein. Denn ein gemeinsamer Theiler von h_i und h_k müsste alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ausser α_i und auch alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ausser α_k theilen; da zu den letzteren Zahlen auch α_i gehört, so müsste derselbe alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ theilen, die doch keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen. Umgekehrt ist α_i durch alle Zahlen $h_1, h_2, \dots h_n$ ausser h_i theilbar, und da keine zwei von diesen Zahlen einen gemeinsamen Theiler haben, so muss α_i auch durch das Product aller Zahlen $h_1, h_2, \dots h_n$ ausser h_i theilbar sein. Wenn man daher

$$(15.)\qquad h_1 h_2 \dots h_n = H, \qquad \alpha_i = \frac{H}{h_i} m_i$$

setzt, so wird m_i eine ganze Zahl, und es kann diese ganze Zahl keinen gemeinschaftlichen Theiler mit h_i haben, weil dieser wieder gegen die Voraussetzung alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ theilen müsste.

Da h_i alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ausser α_i theilt, so folgt aus der vorgelegten Gleichung, dass x_i einer Gleichung von der Form

$$(16.)\qquad \alpha_i x_i + h_i w_i = u$$

genügen muss. Bestimmt man daher zwei positive oder negative ganze Zahlen c_i und d_i durch die Gleichung

$$(17.)\qquad \alpha_i c_i + h_i d_i = 1,$$

so wird, wie man weiss, der allgemeine Werth von x_i die Form

$$(18.)\qquad x_i = c_i u + h_i v_i$$

erhalten, in welchem, abgesehen vom Zeichen,

$$c_i < \tfrac{1}{2} h_i$$

angenommen werden kann, und v_i eine ganze Zahl bedeutet.

Wenn man die vorgelegte Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = u$$

durch H dividirt, so erhält sie nach Substitution der Gleichungen (15.) die Form

$$(19.)\qquad \frac{m_1 x_1}{h_1} + \frac{m_2 x_2}{h_2} + \dots + \frac{m_n x_n}{h_n} = \frac{u}{H}.$$

Substituirt man in diese Gleichung für $x_1, x_2, \dots x_n$ ihre durch die Formel (18.) gegebenen Werthe

$$x_i = c_i u + h_i v_i,$$

und setzt

$$(20.)\qquad \frac{1}{H} - \left\{ \frac{m_1 c_1}{h_1} + \frac{m_2 c_2}{h_2} + \dots + \frac{m_n c_n}{h_n} \right\} = g,$$

so erhält man

$$(21.)\qquad m_1v_1+m_2v_2+\cdots+m_nv_n = gu.$$

In dieser Gleichung (21.) ist g eine ganze Zahl. Multiplicirt man nämlich die Gleichung, durch welche g bestimmt ist, mit H, so erhält man vermöge (15.)

$$1-\{\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\cdots+\alpha_nc_n\} = gH.$$

Es ist aber die Grösse links eine ganze Zahl, welche durch jede der Zahlen h_1, h_2, ... h_n theilbar ist. Denn es theilt jede dieser Zahlen h_i nach der Voraussetzung alle Zahlen α_1, α_2, ... α_n mit Ausnahme von α_i und vermöge (17.) auch die Zahl $1-\alpha_ic_i$ und mithin die Zahl

$$1-\{\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\cdots+\alpha_nc_n\}.$$

Es wird daher die letztere Zahl auch durch das Product $H=h_1h_2\dots h_n$ theilbar sein, da je zwei von den Zahlen h_1, h_2, ... h_n relative Primzahlen zu einander sind; und da diese Zahl $=gH$ ist, so wird gH eine ganze durch H theilbare Zahl, und mithin g eine ganze Zahl sein.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen wird die vorgelegte Gleichung

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n = u,$$

in welcher α_1, α_2, ... α_n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, aber je $n-1$ von diesen Zahlen mit einem gemeinschaftlichen Theiler behaftet sind, auf die Gleichung

$$m_1v_1+m_2v_2+\cdots+m_nv_n = gu$$

zurückgeführt. Hat man nämlich ein den Grössen v_1, v_2, ... v_n äquivalentes System von Grössen, von welchen eine die durch die Gleichung (21.) bestimmte Grösse gu ist, gefunden und setzt die für v_1, v_2, ... v_n zu substituirenden Ausdrücke in die Werthe von x_1, x_2, ... x_n, welche durch die Gleichung (18.)

$$x_i = c_iu+h_iv_i$$

gegeben sind, so hat man die für x_1, x_2, ... x_n zu substituirenden Ausdrücke, welche der vorgelegten Aufgabe Genüge leisten.

Die Gleichung (21.) unterscheidet sich von der vorgelegten Gleichung in mehreren Punkten. Zunächst bemerkt man, dass an die Stelle von u die Grösse gu getreten ist, so dass in den für v_1, v_2, ... v_n zu substituirenden Ausdrücken die Coefficienten von u immer den Factor g haben müssen. Denn es hat g keinen Theiler mit sämmtlichen Zahlen m_1, m_2, ... m_n gemein, weil diese Zahlen überhaupt keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, indem sonst,

wie aus (15.) erhellt, auch sämmtliche Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssten, was gegen die Voraussetzung ist. Aber die Gleichung (21.) unterscheidet sich von der vorgelegten Gleichung wesentlich dadurch, dass es unter den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ auch keine $n-1$ giebt, welche einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn hätten z. B. die $n-1$ Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$ einen gemeinschaftlichen Theiler p, so würde aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = \frac{H}{h_1} m_1, \quad \alpha_2 = \frac{H}{h_2} m_2, \quad \ldots \quad \alpha_{n-1} = \frac{H}{h_{n-1}} m_{n-1}$$

folgen, dass sämmtliche Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ durch ph_n theilbar sind, was der Voraussetzung, dass h_n der *grösste* gemeinschaftliche Theiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ sein soll, zuwider ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass man unter den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ immer $n-1$ oder weniger wird angeben können, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es wird dies sogar auf mehrere, wenigstens auf n Arten geschehen können. Es kann daher nach der im Anfang gemachten Bemerkung die Gleichung (21.) unmittelbar auf eine andere zwischen nur ν Variabeln zurückgeführt werden, wo $\nu < n$, und man kann in dieser Gleichung, wie es in der vorgelegten vorausgesetzt worden ist, wieder annehmen, dass zwar alle ν Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, aber je $\nu-1$ derselben mit einem gemeinschaftlichen Theiler behaftet sind. Denn gäbe es unter den ν Variabeln $\nu-1$, deren Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so würde man die Gleichung (21.) auf eine zwischen diesen $\nu-1$ Variabeln Statt findende Gleichung zurückführen können.

Die Zurückführung der vorgelegten Gleichung auf die Gleichung (21.) wird hiernach immer eine wirkliche Vereinfachung gewähren, indem die Gleichung (21.) sich unmittelbar auf eine der vorgelegten ganz ähnliche Gleichung zwischen weniger Variabeln reducirt. Diese letztere hat man dann wieder einer ähnlichen Reduction zu unterwerfen und so fortzufahren, bis man auf eine Gleichung kommt, in welcher einer der Coefficienten der *Einheit* gleich ist, in welchem Falle, wie man im §. 2 gesehen hat, die Lösung unmittelbar gegeben ist.

Das Verfahren, durch welches die vorgelegte Gleichung auf die Gleichung (21.) zurückgeführt worden ist, bezog sich auf alle Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf eine vollkommen gleichmässige Art. Aber in Betreff der weitern Reduction findet eine gewisse Willkür Statt, indem sich, wie man gesehen hat, aus den

Zahlen m_1, m_2, ... m_n immer auf mehrere verschiedene Arten Gruppen solcher Zahlen auswählen lassen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; jeder solcher besondern Gruppe aber wird immer ein besonderer Verlauf der ferneren Rechnung entsprechen. Wenn es unter diesen Gruppen eine giebt, welche aus einer kleineren Anzahl von Coefficienten als alle übrigen besteht, so wird man in der Regel vorzugsweise diese auswählen.

Die Gleichung (21.) bietet auch noch dadurch eine wesentliche Reduction der vorgelegten Gleichung, dass in ihr die Coefficienten im Verhältniss zu ihren ursprünglichen Werthen immer überaus verkleinert sind. Ist z. B. $n = 5$, so sind die kleinsten Werthe, welche die fünf ursprünglichen Coefficienten annehmen können, wenn nach der gemachten Voraussetzung keine vier ohne einen gemeinschaftlichen Factor sein sollen *),

$$210 m_1, \quad 330 m_2, \quad 462 m_3, \quad 770 m_4, \quad 1155 m_5.$$

Man sieht hieraus, wie viel kleiner die Zahlen m_1, m_2, etc. oder die Coefficienten der reducirten Gleichung (21.) als die Coefficienten der vorgelegten Gleichung α_1, α_2, etc. werden müssen. Es wird daher in der Regel eine der Zahlen m_1, m_2, etc. der Einheit gleich werden, in welchem Falle die Aufgabe gelöst ist. Wenn z. B. $m_n = 1$, so hat man nur nöthig, in der Gleichung

$$x_n = c_n u + h_n v_n$$

für v_n seinen Werth aus (21.)

$$v_n = gu - \{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1}\}$$

einzuführen, wodurch man

$$x_n = (c_n + g h_n) u - h_n \{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1}\}$$

erhält. Es bilden dann u, v_1, v_2, ... v_{n-1} das für x_1, x_2, ... x_n einzuführende äquivalente System Grössen, durch welche x_1, x_2, ... x_n mittelst der vorstehenden Gleichung aus den Gleichungen (18.) ausgedrückt werden.

§. 7. Vierte Lösung.

Im 2ten Bande der *Opuscula Analytica* von *Euler* S. 91 (wieder abgedruckt im 2ten Bande von *Leonhardi Euleri Commentationes Arithmeticae collectae,* Petersburg 1849 S. 99) findet man in einer Abhandlung *De relatione inter*

---

*) Da diese fünf gemeinschaftlichen Factoren relative Primzahlen sein müssen, so sind ihre kleinsten Werthe 2, 3, 5, 7 und 11, deren Product H durch je eine von ihnen getheilt, die nachfolgenden Factoren der m giebt. *H.*

ternas pluresve quantitates instituenda eine Methode, um einen Ausdruck

$$aA+bB+cC,$$

in welchem A, B, C gegebene Grössen sind, durch möglichst kleine ganze positive oder negative Zahlen a, b, c der *Null* gleich zu machen, wenn A, B, C rational sind, oder wenn dies nicht der Fall ist, dieses näherungsweise zu erreichen, oder auch, wenn zwischen den irrationalen Grössen A, B, C eine solche lineare Relation

$$aA+bB+cC = 0$$

in welcher a, b, c ganze Zahlen sind, Statt findet, diese zu entdecken. Die Methode ist der der successiven Division bei ganzen Zahlen analog, indem man die beiden grösseren von den gegebenen Grössen immer durch die Reste ersetzt, die sie durch die kleinste dividirt übrig lassen, so dass der kleinste Rest der nächste Divisor wird.

Euler setzt die erwähnte Methode an mehreren Beispielen auseinander, wobei er zeigt, wie man für die zu suchenden ganzen Zahlen allgemeine Formeln finden kann. Es soll hier genügen, die beiden ersten Beispiele zu wiederholen, wobei nur, ohne den Gang der *Euler*schen Rechnung zu ändern, auf der rechten Seite statt 0 allgemeiner u gesetzt werden soll, damit man sogleich sieht, wie diese Methode auch auf das hier behandelte Problem Anwendung findet.

Erste Aufgabe. *Solche ganze positive oder negative Zahlen a, b, c zu finden, dass*

$$49a+59b+75c = 0.$$

Die *Euler*schen Rechnungen lösen die allgemeinere Aufgabe, für a, b, c solche Ausdrücke äquivalenter Grössen, von denen eine u ist, zu finden, dass

$$49a+59b+75c = u.$$

Nach der allgemeinen Regel hat man zu setzen:

$$(22.)\quad \begin{cases} a+\ b+\ c=d, & 10b+26c+49d=u, \\ b+2c+4d=e, & 6c+\ 9d+10e=u, \\ c+\ d+\ e=f, & 3d+\ 4e+\ 6f=u, \\ d+\ e+2f=g, & e \qquad +\ 3g=u. \end{cases}$$

Euler bricht die Rechnung früher ab, indem er, was für seine Aufgabe, in welcher $u=0$, verstattet ist, sogleich $3e$ für e setzt, wodurch auch eine geringe Modification in den folgenden Zahlen herbeigeführt wird.

Aus dem zweiten System der vorstehenden Gleichungen folgt nach und nach

$$\begin{aligned} e &= u - 3g, \\ d &= -u + 4g - 2f, \\ c &= -g + 3f, \\ b &= 5u - 17g + 2f \end{aligned}$$

und aus der ersten Gleichung des ersten Systems

$$a = -6u + 22g - 7f,$$

und man sieht in der That, wenn man die vorstehenden, für a, b, c gefundenen Ausdrücke substituirt, dass die Gleichung

$$49(-6u + 22g - 7f) + 59(5u - 17g + 2f) + 75(-g + 3f) = u$$

identisch erfüllt wird. Die *Euler*schen Werthe von a, b, c werden aus den vorstehenden erhalten, wenn man $u = 0$ und $f - 2e$ und $-e$ für f und g setzt.

Die vorstehende Lösung hat die Eigenschaft, *dass sämmtliche Coefficienten des in die grösste Zahl multiplicirten Ausdrucks die absolut kleinsten Werthe erhalten, nämlich die Werthe* 0, -1, 3.

Wollte man dieselbe Aufgabe nach den früher angegebenen Methoden lösen, so würde man

$$\begin{aligned} 59b + 75c &= y = u - 49a, \\ b &= 14y + 75z = 14u - 686a + 75z, \\ c &= -11y - 59z = -11u + 539a - 59z \end{aligned}$$

zu setzen haben, und man sieht, mit wie grossen Coefficienten in den Ausdrücken von b und c man den Vortheil erkaufen muss, die eine Grösse a unverändert zu lassen, oder für die eine Gleichung bloss $a = a$ zu setzen.

Man findet ferner aus dem ersten Systeme der Gleichungen (22.)

$$\begin{aligned} f &= e + d + c = 5d + 3c + b = 8c + 6b + 5a, \\ g &= 2f + e + d = 3e + 3d + 2c = 15d + 8c + 3b = 23c + 18b + 15a. \end{aligned}$$

Es werden demnach die beiden reciproken Systeme Gleichungen zwischen den beiden äquivalenten Systemen Grössen a, b, c und u, f, g

$$\begin{aligned} a &= -6u - 7f + 22g, & u &= 49a + 59b + 75c, \\ b &= 5u + 2f - 17g, & f &= 5a + 6b + 8c, \\ c &= 3f - g, & g &= 15a + 18b + 23c. \end{aligned}$$

Aus dem zweiten System dieser Gleichungen ersieht man, dass die Aufgabe,

zu der Reihe Zahlen 49, 59, 75 zwei andere Reihen von 3 Zahlen zu finden, so dass die Determinante aller 9 Zahlen der Einheit gleich wird, durch die Zahlen

$$\begin{matrix} 49 & 59 & 75 \\ 5 & 6 & 8 \\ 15 & 18 & 23 \end{matrix}$$

gelöst wird.

Wegen der Neuheit dieser Methode, die, obgleich seit 1775 publicirt *), doch niemals angewendet worden zu sein scheint, will ich noch ein anderes von *Euler* gegebenes complicirteres Beispiel, jedoch wieder in seiner allgemeineren Form, hinzufügen.

Zweite Aufgabe. *Die Grössen a, b, c durch andere äquivalente, von denen eine u ist, auszudrücken, so dass*

$$1000000a + 1414214b + 1732051c = u$$

wird.

Die in b und c multiplicirten Zahlen, durch den Coefficienten von a dividirt, sind hier die Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.

Man erhält zufolge der *Euler*schen Rechnung nach und nach

$$\begin{array}{rlr} & a+b+c=d, & 414214b+732051c+1000000d=u, \\ & b+c+2d=e, & 317837c+171572d+414214e=u, \\ & d+c+2e=f, & 146265c+71070e+171572f=u, \\ & e+2c+2f=g, & 4125c+29432f+71070g=u, \\ ^{**}) & c+7f+17g=h, & 557f+945g+4125h=u, \\ & f+g+7h=i, & 388g+226h+557i=u, \\ & g+h+2i=k, & 162g+105i+226k=u, \\ & g+i+2k=l, & 57g+16k+105l=u, \\ & 3g+k+6l=m, & 9g+9l+16m=u, \\ & g+l+m=n, & 7m+9n=u, \\ & m+n=p, & 2n+7p=u, \\ & n+3p=q, & p+2q=u, \\ & p+2q=u. & \end{array}$$

*) Hiermit ist gemeint, dass die im 2ten Bande der Opuscula Analytica 1785 zum ersten Male gedruckte Arbeit bereits 1775 von *Euler* der Petersburger Akademie mitgetheilt worden war, wie aus der Notiz: (Op. anal. II. 1785, p. 91. Exhib. 1775. Aug. 14) in den Opera collecta hervorgeht. *H.*

**) In den Opusc. anal. ist die Rechnung von dieser Stelle an, wegen Vertauschung von 557 mit 575, unrichtig. In den Opera collecta ist die Rechnung richtig weitergeführt. *H.*

Euler, welcher $u = 0$ hat, setzt die Rechnung nur bis zur Gleichung

$$9g+9l+16m = 0$$

fort, die er durch die Annahme

$$g=1, \quad l=-1, \quad m=0$$

erfüllt, wofür er nach und nach findet:

$$k=3, \quad i=-8, \quad h=18, \quad f=-135, \quad c=946, \quad e=-1621,$$
$$d=2161, \quad b=-6889, \quad a=8104.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen kann man durch successive einfache Substitutionen leicht a, b, c durch l, q, u oder umgekehrt l, q, u durch a, b, c ausdrücken, wovon das eine hinreicht. Das Letztere wird dadurch eine Erleichterung gewähren, dass man den Ausdruck von u schon kennt, da er durch die vorgelegte Gleichung gegeben wird; dagegen wird man bei der Aufgabe, a, b, c durch l, q, u auszudrücken, mit kleineren Zahlen zu thun haben.

Man erhält nach und nach

$$q = n+3p = 3m+4n = 4g+4l+7m = 25g+7k+46l;$$
$$q-46l = 25g+7k = 32g+7h+14i = 14f+46g+105h$$
$$= 105c+749f+1831g = 1831e+3767c+4411f$$
$$= 4411d+8178c+10653e = 10653b+18831c+25717d$$
$$= 25717a+36370b+44548c;$$
$$l = g+i+2k = 3g+2h+5i = 5f+8g+37h = 37c+264f+637g$$
$$= 637e+1311c+1538f = 1538d+2849c+3713e$$
$$= 3713b+6562c+8964d = 8964a+12677b+15526c.$$

Hieraus ergeben sich durch Substitution zwischen den Grössen a, b, c und u, l, q die folgenden Gleichungen

$$u = 1000000a+1414214b+1732051c$$
$$49l-q = 1175a+1661b+2030c$$
$$l = 8964a+12677b+15526c,$$

welche man durch die *Euler*schen Werthe

$$u=0, \qquad q=0, \qquad l=-1$$
$$a=8104, \quad b=-6889, \quad c=946$$

prüfen kann. Durch Umkehrung dieser Gleichungen erhält man die Ausdrücke von a, b, c durch u, q, l; doch ist diese Umkehrung, da sie die Bildung von 18 Producten erfordert, beschwerlicher, als wenn man die Ausdrücke von a, b, c durch u, q, l direct durch die successiven Substitutionen sucht.

Durch die im Vorigen befolgte, von *Euler* gegebene Regel, immer durch den kleinsten der drei Coefficienten zu dividiren, wird in dem zweiten Beispiel, wie

man sieht, der Gang der Rechnung unregelmässig, indem die zuerst eingeführten Grössen nicht auch immer zuerst wieder eliminirt werden, und nicht jeder der Ausdrücke, für welchen eine neue Grösse gesetzt wird, aus den zuletzt eingeführten Grössen besteht. So kommt die Grösse c in fünf Gleichungen, die Grösse g gar in sieben Gleichungen vor, dagegen d, e, h, i, k nur in drei Gleichungen, während bei einer regelmässigen Ordnung jede Grösse, die ersten und letzten ausgenommen, in vier Gleichungen vorkommen müssten wie f. *Um einen regelmässigen Gang der Rechnung zu erhalten, muss man immer durch den Coefficienten derjenigen Grösse dividiren, welche in der Reihenfolge, wie sie zuerst eingeführt worden, vorangeht.* Um aus drei positiven Coefficienten α, β, γ, Grössen, von denen die erste α kleiner als die dritte γ ist, die nächst folgenden α', β', γ' zu erhalten, nimmt man

$$\alpha' = \beta - m\alpha, \quad \beta' = \gamma - n\alpha, \quad \gamma' = \alpha,$$

wo m und n resp. die ganzen Zahlen bedeuten, welche zunächst kleiner als die Brüche $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ sind. Man wird also, wenn $\alpha > \beta$, $m = 0$, $\alpha' = \beta$ erhalten. Die drei ersten Coefficienten oder die Coefficienten des gegebenen Ausdrucks kann man der Grösse nach ordnen, wie dies in den beiden gegebenen Beispielen geschehen ist.

Wendet man diese Regel auf das zweite Beispiel an, so werden die successiven Reductionsformeln die folgenden für *die allgemeine Auflösung der Gleichung* $1000000a + 1414214b + 1732051c = u$:

$a + b + c = d$	$414214b + 732051c + 1000000d = u$
$b + c + 2d = e$	$317837c + 171572d + 414214e = u$
$c + e = f$	$171572d + 96377e + 317837f = u$
$d + f = g$	$96377e + 146265f + 171572g = u$
$e + f + g = h$	$49888f + 75195g + 96377h = u$
$f + g + h = i$	$25307g + 46489h + 49888i = u$
$g + h + i = k$	$21182h + 24581i + 25307k = u$
$h + i + k = l$	$3399i + 4125k + 21182l = u$
$i + k + 6l = m$	$726k + 788l + 3399m = u$
$k + l + 4m = n$	$62l + 495m + 726n = u$
$l + 7m + 11n = p$	$61m + 44n + 62p = u$
$m + p = q$	$44n + p + 61q = u$
$n + q = r$	$p + 17q + 44r = u$
$p + 17q + 44r = u.$	

Aus diesen Formeln erhält man, wenn man von den letzten ausgeht, durch successive Substitutionen die Ausdrücke von a, b, c durch u, r, q, oder wenn man von den ersten Gleichungen ausgeht, die reciproken Ausdrücke von u, r, q durch a, b, c. Ich will hier nur die ersteren suchen. Man erhält die Coefficienten von u in den Ausdrücken von a, b, c, wenn man in den vorstehenden Formeln $u=1$, $r=0$, $q=0$ setzt; die Coefficienten von r, wenn man in denselben Formeln $u=0$, $r=1$, $q=0$ setzt, die Coefficienten von q, wenn man $u=0$, $r=0$, $q=1$ setzt. Auf diese Weise erhält man nach und nach,

wenn $u=1$, $r=0$, $q=0$,

$$p=1,\ n=0,\ m=-1,\ l=8,\ k=-4,\ i=-45,\ h=57,\ g=-16,$$
$$f=-86,\ e=159,\ d=70,\ c=-245,\ b=264,\ a=51;$$

wenn $u=0$, $r=1$, $q=0$,

$$p=-44,\ n=1,\ m=44,\ l=-363,\ k=188,\ i=2034,\ h=-2585,\ g=739,$$
$$f=3880,\ e=-7204,\ d=-3141,\ c=11084,\ b=-12006,\ a=-2219;$$

wenn $u=0$, $r=0$, $q=1$,

$$p=-17,\ n=-1,\ m=18,\ l=-132,\ k=59,\ i=751,\ h=-942,\ g=250,$$
$$f=1443,\ e=-2635,\ d=-1193,\ c=4078,\ b=-4327,\ a=-944.$$

Hiernach werden die gesuchten Formeln

$$\begin{aligned} a &= \quad 51u-\ 2219r-\ 944q \\ b &= \quad 264u-12006r-4327q \\ c &= -245u+11084r+4078q. \end{aligned}$$

Um aus denselben die *Euler*schen Werthe

$$a=8104,\quad b=-6889,\quad c=946$$

abzuleiten, hat man

$$u=0,\quad r=24,\quad q=-65$$

zu setzen.

Um die einfachsten Formeln zu haben muss man nicht, wie im Vorhergehenden, bei der Gleichung

$$p+17q+44r=u$$

stehen bleiben, sondern muss noch die folgenden hinzufügen:

$$\begin{aligned} q+2r &= s & \qquad p+10r+17s &= u \\ r+\ s &= t & p+\ 7s+10t &= u \\ s+\ t &= v & p+\ 3t+\ 7v &= u \\ t+2v &= w & p+\ v+\ 3w &= u. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach und nach

$$t = w - 2v, \quad s = 3v - w, \quad r = 2w - 5v, \quad q = 13v - 5w.$$

Die Substitution der Werthe von r und q in die obigen Ausdrücke von a, b, c giebt die viel einfacheren

$$\begin{aligned} a &= 51u - 1177v + 282w \\ b &= 264u + 3779v - 2377w \\ c &= -245u - 2406v + 1778w. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus, wenn man $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$ setzt, die Werthe

$$a = 282, \quad b = -2377, \quad c = 1778,$$

welche kleiner als die von *Euler* gegebenen sind; diese letzteren gehen aus den vorstehenden Formeln hervor, wenn man

$$u = 0, \quad v = -10, \quad w = -13$$

setzt.

Ueber die im Vorstehenden durch ein Beispiel erläuterten Algorithmen lassen sich, wie man aus der folgenden Abhandlung ersehen wird, analoge Betrachtungen wie bei der Theorie der Kettenbrüche anstellen. Ich will mich dabei, wie in dem vorhergehenden Beispiele, auf Ausdrücke von drei Grössen beschränken, obgleich dieselben Betrachtungen ohne Schwierigkeit auf Ausdrücke von jeder Anzahl von Grössen ausgedehnt werden können.

Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus *drei* vorhergehenden gebildet wird.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *E. Heine.*)

Beziehungen unter den Ausdrücken, welche an die Stelle der Zähler und Nenner von Näherungsbrüchen treten.

§. 1. Es seien

$$a,\quad a_1,\quad a_2$$

unbestimmte Zahlen, dagegen

$$l,\quad m,\quad l_1,\quad m_1,\quad l_2,\quad m_2\quad \text{etc.}$$

gegebene Grössen; ferner

$$(1.)\quad \begin{cases} a+l\,a_1+m\,a_2 = a_3, \\ a_1+l_1a_2+m_1a_3 = a_4, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_i+l_ia_{i+1}+m_ia_{i+2} = a_{i+3}, \end{cases}$$

so kann man durch successive Substitutionen sowohl a_{i+3}, a_{i+2}, a_{i+1} durch a, a_1, a_2 als auch umgekehrt a, a_1, a_2 durch a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} ausdrücken. Bei diesen successiven Substitutionen, in denen man immer jede der allgemeinen Grössen a_k entweder durch die vorhergehenden oder durch die folgenden ausdrückt, hat man niemals eine Division auszuführen, weil in der Gleichung, welche zur Elimination einer Grösse angewandt wird, diese Grösse immer den Coefficienten 1 hat. Setzt man daher

$$(2.)\quad \begin{cases} a = p_i\,a_i+q_i\,a_{i+1}+r_i\,a_{i+2}, \\ a_1 = p_i'\,a_i+q_i'\,a_{i+1}+r_i'\,a_{i+2}, \\ a_2 = p_i''a_i+q_i''a_{i+1}+r_i''a_{i+2}, \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(3.)\quad \begin{cases} a_i = P_i\;\,a+P_i'\;\,a_1+P_i''\;\,a_2, \\ a_{i+1} = P_{i+1}a+P_{i+1}'a_1+P_{i+1}''a_2, \\ a_{i+2} = P_{i+2}a+P_{i+2}'a_1+P_{i+2}''a_2, \end{cases}$$

so werden in beiden Systemen Gleichungen die Coefficienten ganze rationale Functionen der Grössen l_k und m_k, und es werden daher, wenn l_k und m_k ganze Zahlen sind, auch die Coefficienten in (2.) und (3.) ganze Zahlen. Hieraus folgt nach dem im §. 1 der vorigen Abhandlung bewiesenen Satze, dass in beiden Systemen Gleichungen die Determinante $= \pm 1$ sein muss, was natürlich auch allgemein Statt hat, wenn für l_k und m_k *beliebige* Zahlen gesetzt werden. Denn keine ganze rationale Function mehrerer Grössen kann für unendlich viele Systeme von Werthen dieser Grössen einen bestimmten Werth annehmen, wenn sie sich nicht identisch auf diesen Werth reducirt.

Fügt man zu (3.) die Gleichung

$$a_{i+3} = P_{i+3}a + P'_{i+3}a_1 + P''_{i+3}a_2$$

hinzu, und substituirt die Werthe von a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} in die zwischen diesen vier Grössen Statt findende Gleichung

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i,$$

so erhält man eine lineare Gleichung zwischen den Grössen a, a_1, a_2, die identisch sein muss, da a, a_1, a_2 ganz beliebige Grössen bedeuten. Es können daher die Coefficienten von a, a_1, a_2 auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich gesetzt werden, was darauf hinauskommt, dass man von den Grössen a, a_1, a_2 zwei $=0$ und die dritte $=1$ setzt. Man erhält hieraus die folgenden Gleichungen, welche zeigen, wie man jede der Grössen P_i, P'_i, P''_i aus drei vorhergehenden oder drei folgenden bilden kann:

$$(4.)\quad \begin{cases} P_{i+3} = m_i P_{i+2} + l_i P_{i+1} + P_i, \\ P'_{i+3} = m_i P'_{i+2} + l_i P'_{i+1} + P'_i, \\ P''_{i+3} = m_i P''_{i+2} + l_i P''_{i+1} + P''_i. \end{cases}$$

Setzt man ferner $i+1$ in (2.) für i, und substituirt für a_{i+3} seinen Werth

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i,$$

so erhält man für jede der Grössen a, a_1, a_2 einen doppelten Ausdruck durch a_i, a_{i+1}, a_{i+2} und daher drei Gleichungen zwischen a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, welche identisch sein müssen, da auch a_i, a_{i+1}, a_{i+2} beliebige Grössen sein können. Setzt man die beiden Ausdrücke von a einander gleich, so erhält man

$$p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2} = r_{i+1} a_i + (p_{i+1} + l_i r_{i+1}) a_{i+1} + (q_{i+1} + m_i r_{i+1}) a_{i+2}$$

und daher

$$(5.)\quad p_i = r_{i+1}, \quad q_i = p_{i+1} + l_i r_{i+1}, \quad r_i = q_{i+1} + m_i r_{i+1}$$

oder umgekehrt

$$(6.)\quad p_{i+1} = q_i - l_i p_i, \quad q_{i+1} = r_i - m_i p_i, \quad r_{i+1} = p_i.$$

Diese Gleichungen zeigen, wie man aus den Grössen p_i, q_i, r_i die nächst folgenden oder nächst vorhergehenden bilden kann. Man hat ferner aus (6.)

$$(7.)\qquad q_{i+1} = p_{i-1} - m_i p_i = p_{i+2} + l_{i+1} p_{i+1}$$

und daher

$$(8.)\qquad p_{i+2} = p_{i-1} - m_i p_i - l_{i+1} p_{i+1}.$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man jede Grösse p_i aus den drei vorhergehenden oder drei folgenden bilden; die Grössen q_i und r_i werden dann aus den Grössen p_i mittelst der Gleichungen (7.) und der Gleichung $r_i = p_{i-1}$ erhalten. Ganz dieselben Relationen erhält man zwischen den analogen, mit einem oder zwei oberen Accenten versehenen Grössen.

§. 2. Man beweist leicht aus den allgemeinen Eigenschaften der Determinanten, dass die Determinante der Gleichungen

$$(9.)\qquad \begin{cases} a = p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2}, \\ a_1 = p'_i a_i + q'_i a_{i+1} + r'_i a_{i+2}, \\ a_2 = p''_i a_i + q''_i a_{i+1} + r''_i a_{i+2} \end{cases}$$

unverändert bleibt*), wenn man den Index i um eine Einheit vermehrt oder der Determinante der Gleichungen

$$(10.)\qquad \begin{cases} a = p_{i+1} a_{i+1} + q_{i+1} a_{i+2} + r_{i+1} a_{i+3}, \\ a_1 = p'_{i+1} a_{i+1} + q'_{i+1} a_{i+2} + r'_{i+1} a_{i+3}, \\ a_2 = p''_{i+1} a_{i+1} + q''_{i+1} a_{i+2} + r''_{i+1} a_{i+3} \end{cases}$$

gleich wird. Um die Determinante vollkommen zu bestimmen**), will ich annehmen, dass immer das Product der Coefficienten, welche in derjenigen Diagonale sich befinden, die von oben links nach unten rechts sich erstreckt, das positive Zeichen haben soll. Eine Eigenschaft der Determinante besteht darin, dass sie (auch in Bezug auf das Zeichen) unverändert bleibt, wenn man die Coefficienten einer Vertikalreihe mit demselben Factor multiplicirt zu den Coefficienten einer anderen Vertikalreihe hinzufügt. Wenn man daher in (10.) die Coefficienten der dritten Vertikalreihe, respective mit l_i und m_i multiplicirt, zu den Coefficienten der ersten und zweiten Vertikalreihe addirt, so

---

*) Der Beweis wird hier vollständig nach dem Manuskripte mitgetheilt. *Jacobi*'s, des Schriftstellers und *Lehrers* Verdienst ist es, dass ein heutiger Autor Beweise dieses und ähnlicher Sätze über Determinanten übergehen darf. *H.*

**) Dass ihr Quadrat die Einheit ist, weiss man bereits. *H.*

bleibt die Determinante unverändert. Diese Veränderung der Coefficienten wird auch erhalten, wenn man für a_{i+3} seinen Werth

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i$$

substituirt. Die Relationen zwischen den Coefficienten, welche sich auf den Index i, und den Coefficienten, welche sich auf den Index $i+1$ beziehen, sind aber so bestimmt worden, dass durch die Substitution dieses Werthes von a_{i+3} die Gleichungen (10.) sich in die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= q_i\, a_{i+1} + r_i\, a_{i+2} + p_i a_i, \\ a_1 &= q_i'\, a_{i+1} + r_i'\, a_{i+2} + p_i' a_i, \\ a_2 &= q_i''\, a_{i+1} + r_i''\, a_{i+2} + p_i'' a_i \end{aligned}$$

verwandeln. Diese Gleichungen kommen mit (9.) überein, nur dass die Verticalreihen alle eine Stelle nach links gerückt sind, und die erste die letzte geworden ist. Hierdurch bleibt das Zeichen der Determinante ungeändert oder geht in das entgegengesetzte über, je nachdem die Zahl der Gleichungen ungrade oder grade ist. Die Determinante, welche in der Theorie der Kettenbrüche, wenn i um eine Einheit wächst, immer das Zeichen ändert, wird also in den hier betrachteten Algorithmen unverändert bleiben.

Dass auch die Determinante der Gleichungen (3.) unverändert bleibt, wenn man in den Coefficienten i um 1 vermehrt, kann man folgendermassen beweisen: Wenn man zu einer Horizontalreihe der Coefficienten die übrigen Horizontalreihen, mit verschiedenen Factoren multiplicirt, hinzufügt, so bleibt die Determinante auch in Bezug auf das Zeichen unverändert. Wenn man daher in den Gleichungen

$$(11.)\quad \begin{cases} a_i = P_i a + P_i' a_1 + P_i'' a_2, \\ a_{i+1} = P_{i+1} a + P_{i+1}' a_1 + P_{i+1}'' a_2, \\ a_{i+2} = P_{i+2} a + P_{i+2}' a_1 + P_{i+2}'' a_2 \end{cases}$$

die zweite Horizontalreihe mit l_i und die dritte mit m_i multiplicirt zur ersten Horizontalreihe hinzufügt, oder was dasselbe ist, wenn man statt der ersten Gleichung diejenige setzt, welche den Werth von

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i$$

giebt, so bleibt die Determinante ungeändert. Es bleibt also die Determinante ungeändert, wenn man die erste Gleichung durch die Gleichung

$$a_{i+3} = P_{i+3} a + P_{i+3}' a_1 + P_{i+3}'' a_2$$

ersetzt, oder was dasselbe ist, wenn man $i+1$ in (11.) für i setzt, und die

Gleichungen alle um eine Stelle herunterrückt, und die letzte zur ersten macht. Durch dieses Verrücken der Gleichungen bleibt aber die Determinante ungeändert oder ändert das Zeichen, je nachdem die Anzahl der Gleichungen ungrade oder grade ist. Sie wird also in der Theorie der Kettenbrüche, in welcher diese Anzahl 2 beträgt, so oft i um eine Einheit wächst das Zeichen ändern, und in der hier auseinandergesetzten Theorie unverändert bleiben. Man sieht, wie diese Beweise mit Hülfe der allgemeinen Sätze von den Determinanten ohne die geringste Aenderung auch für die allgemeineren Algorithmen gelten, in welchen jede Grösse, statt aus drei, aus n vorhergehenden oder folgenden bestimmt wird.

§. 3. Ich will jetzt die Coefficienten der Gleichungen (9.) und (11.) für die ersten Werthe von i angeben.

Setzt man $i=0$ in (9.), so müssen sich die Ausdrücke rechts identisch auf a, a_1, a_2 reduciren, wenn man a für a_0 setzt. Es wird demnach

$$\begin{array}{lll} p_0 = 1, & q_0 = 0, & r_0 = 0, \\ p'_0 = 0, & q'_0 = 1, & r'_0 = 0, \\ p''_0 = 0, & q''_0 = 0, & r''_0 = 1. \end{array}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6.)

$$p_{i+1} = q_i - l_i p_i, \quad q_{i+1} = r_i - m_i p_i, \quad r_{i+1} = p_i$$

und der ähnlichen, welche für die mit einem oder zwei Accenten versehenen Grössen Statt finden, folgt hieraus

$$\begin{array}{lll} p_1 = -l_0, & q_1 = -m_0, & r_1 = 1, \\ p'_1 = 1, & q'_1 = 0, & r'_1 = 0, \\ p''_1 = 0, & q''_1 = 1, & r''_1 = 0, \end{array}$$

und hieraus zufolge derselben Gleichungen

$$\begin{array}{lll} p_2 = -m_0 + l_0 l_1, & q_2 = 1 + l_0 m_1, & r_2 = -l_0, \\ p'_2 = \quad -l_1, & q'_2 = \quad -m_1, & r'_2 = 1, \\ p''_2 = \quad 1, & q''_2 = \quad 0, & r''_2 = 0. \end{array}$$

Aus diesen Werthen leitet man nach und nach die Werthe von p_k, p'_k, p''_k mittelst der Gleichungen

$$\begin{array}{l} p_{i+3} = -l_{i+2} p_{i+2} - m_{i+1} p_{i+1} + p_i, \\ p'_{i+3} = -l_{i+2} p'_{i+2} - m_{i+1} p'_{i+1} + p'_i, \\ p''_{i+3} = -l_{i+2} p''_{i+2} - m_{i+1} p''_{i+1} + p''_i \end{array}$$

ab, aus welchen sich dann die übrigen Grössen mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} q_k &= p_{k-2} - m_{k-1} p_{k-1}, & r_k &= p_{k-1}, \\ q'_k &= p'_{k-2} - m_{k-1} p'_{k-1}, & r'_k &= p'_{k-1}, \\ q''_k &= p''_{k-2} - m_{k-1} p''_{k-1}, & r''_k &= p''_{k-1} \end{aligned}$$

ergeben. Man erhält hieraus

$$\begin{aligned} p_3 &= -l_0 l_1 l_2 + m_0 l_2 + l_0 m_1 + 1, \\ p'_3 &= l_1 l_2 - m_1, \\ p''_3 &= -l_2, \\ p_4 &= l_0 l_1 l_2 l_3 - m_0 l_2 l_3 - l_0 l_3 m_1 - l_0 l_1 m_2 + m_0 m_2 - l_3 - l_0, \\ p'_4 &= -l_1 l_2 l_3 + m_1 l_3 + l_1 m_2 + 1, \\ p''_4 &= l_2 l_3 - m_2, \end{aligned}$$

u. s. w.

§. 4. Man sieht aus den vorstehenden Beispielen, *dass die Determinante der Gleichungen* (9.) *für* $i = 0, 1, 2$ *den Werth* 1 *annimmt, welchen sie daher dem Obigen zufolge für jeden Werth von* i *unverändert behält.*

Setzt man $i = 0$ in (11.), so müssen sich die Ausdrücke rechts identisch auf a, a_1, a_2 reduciren. Man erhält daher

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P'_0 &= 0, & P''_0 &= 0, \\ P_1 &= 0, & P'_1 &= 1, & P''_1 &= 0, \\ P_2 &= 0, & P'_2 &= 0, & P''_2 &= 1, \end{aligned}$$

woraus sich mittelst der Gleichungen (4.)

$$P_{i+3} = m_i P_{i+2} + l_i P_{i+1} + P_i, \quad \text{etc.}$$

die folgenden Werthe ergeben:

$$\begin{aligned} P_3 &= 1, & P'_3 &= l_0, & P''_3 &= m_0, \\ P_4 &= m_1, & P'_4 &= l_0 m_1 + 1, & P''_4 &= m_0 m_1 + l_1, \\ P_5 &= m_1 m_2 + l_2, & P'_5 &= l_0 m_1 m_2 + l_0 l_2 + m_2, & P''_5 &= m_0 m_1 m_2 + l_1 m_2 + l_2 m_0 + 1. \end{aligned}$$

u. s. w.

Man ersieht aus den vorstehenden Werthen, *dass die Determinante der Gleichungen* (3.) *für* $i = 0, 1, 2, 3$, *den Werth* $+1$ *erhält, welchen Werth sie daher dem Obigen zufolge unverändert für jeden Werth von* i *behalten muss.* Man kann auf diese Weise aus den dem Index 0 entsprechenden Werthen auch das Zeichen der Determinante bestimmen, welches die angestellte allgemeine Betrachtung der vorhergehenden Abhandlung unbestimmt lassen

musste, da sie nur den Satz ergab, dass wenn die Coefficienten zweier reciproken Systeme Gleichungen ganze rationale Functionen derselben Grössen sind, welche ganze Zahlen zu Coefficienten haben, die Determinanten dieser Gleichungen den Werth ± 1 haben müssen.

§. 5. Aus der Bildungsweise der hier betrachteten Grössen geht hervor, dass es verstattet ist, in den Gleichungen (9.) und (11.) die Indices von a, a_1, a_2 um eine beliebige Zahl k zu erhöhen, wenn man in den Coefficienten dieser Gleichungen den Index i um k erniedrigt, und hierauf in ihren Ausdrücken durch die Grössen l und m die Indices der letzteren sämmtlich um k erhöht. Wenn man daher durch das Einschliessen in eine Klammer mit unten beigefügtem k andeutet, dass in den aus den Grössen l und m zusammengesetzten Ausdrücken die Indices dieser Grössen sämmtlich um dieselbe Zahl k erhöht werden sollen, so hat man aus (9.) und (11.)

$$\begin{aligned} a_k &= (p_{i-k})_k a_i + (q_{i-k})_k a_{i+1} + (r_{i-k})_k a_{i+2}, \\ a_{k+1} &= (p'_{i-k})_k a_i + (q'_{i-k})_k a_{i+1} + (r'_{i-k})_k a_{i+2}, \\ a_{k+2} &= (p''_{i-k})_k a_i + (q''_{i-k})_k a_{i+1} + (r''_{i-k})_k a_{i+2}, \\ a_i &= (P_{i-k})_k a_k + (P'_{i-k})_k a_{k+1} + (P''_{i-k})_k a_{k+2}. \end{aligned}$$

Substituirt man die vorstehenden Ausdrücke von a_k, a_{k+1}, a_{k+2} in die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= p_k a_k + q_k a_{k+1} + r_k a_{k+2}, \\ a_1 &= p'_k a_k + q'_k a_{k+1} + r'_k a_{k+2}, \\ a_2 &= p''_k a_k + q''_k a_{k+1} + r''_k a_{k+2}, \end{aligned}$$

so giebt die Vergleichung mit (9.) selbst

$$(9^*.) \quad \begin{cases} p_k (p_{i-k})_k + q_k (p'_{i-k})_k + r_k (p''_{i-k})_k = p_i, \\ p'_k (p_{i-k})_k + q'_k (p'_{i-k})_k + r'_k (p''_{i-k})_k = p'_i, \\ p''_k (p_{i-k})_k + q''_k (p'_{i-k})_k + r''_k (p''_{i-k})_k = p''_i, \end{cases}$$

und ähnliche Formeln, welche aus diesen erhalten werden, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen und unter der Klammer q für p setzt.

Ebenso erhält man aus dem obigen Ausdruck von a_i, wenn man darin die Gleichung

$$a_k = P_k a + P'_k a_1 + P''_k a_2$$

substituirt, und die Vergleichung mit (11.) selbst anstellt

$$(10^*.) \quad \begin{cases} P_i = P_k (P_{i-k})_k + P_{k+1} (P'_{i-k})_k + P_{k+2} (P''_{i-k})_k, \\ P'_i = P'_k (P_{i-k})_k + P'_{k+1} (P'_{i-k})_k + P'_{k+2} (P''_{i-k})_k, \\ P''_i = P''_k (P_{i-k})_k + P''_{k+1} (P'_{i-k})_k + P''_{k+2} (P''_{i-k})_k. \end{cases}$$

Setzt man $k=1$, so folgt hieraus

$$p_i = -l_0(p_{i-1})_1 - m_0(p'_{i-1})_1 + (p''_{i-1})_1;\quad p'_i = (p_{i-1})_1;\quad p''_i = (p'_{i-1})_1,$$
$$P_i = (P''_{i-1})_1;\quad P'_i = (P_{i-1})_1 + l_0(P''_{i-1})_1;\quad P''_i = (P'_{i-1})_1 + m_0(P''_{i-1})_1,$$

woraus auch

$$p_i = -l_0(p_{i-1})_1 - m_0(p_{i-2})_2 + (p_{i-3})_3;\quad p'_i = (p_{i-1})_1;\quad p''_i = (p_{i-2})_2,$$
$$P_i = (P''_{i-1})_1;\quad P'_i = (P''_{i-2})_2 + l_0(P''_{i-1})_1;\quad P''_i = (P''_{i-3})_3 + l_1(P''_{i-2})_2 + m_0(P''_{i-1})_1.$$

Dieser Gleichungen kann man sich eben so gut, wie der Gleichungen (4.) und (6.) zur algebraischen Bildung der Grössen p und P bedienen, und die Uebereinstimmung beider Bildungsweisen an den im Vorstehenden gegebenen Werthen dieser Grössen prüfen. Wenn man $k=i-1$ in (9*.) und (10*.) setzt, erhält man (3.) und (4.).

Wenn die Werthe der Grössen l und m periodisch wiederkehren, so dass sie unverändert bleiben wenn man ihre Indices um eine Zahl k vermehrt, so wird in den Formeln (9*.) und (10*.)

$$(p_{i-k})_k = p_{i-k},\quad (p'_{i-k})_k = p'_{i-k},\quad (p''_{i-k})_k = p''_{i-k},$$
$$(P_{i-k})_k = P_{i-k},\quad (P'_{i-k})_k = P'_{i-k},\quad (P''_{i-k})_k = P''_{i-k}.$$

Setzt man in diesem Falle für i nach und nach Vielfache von k, so kann man mittelst (9*.) und (10*.) aus den Grössen p und P, in welchen der Index die Werthe k, $k+1$, $k+2$ annimmt, die Werthe derjenigen Grössen p und P finden, deren Index ein Vielfaches von k ist.

§. 6. Die Grössen l und m sind im Vorhergehenden ganz allgemeine Grössen; ich will annehmen, dass sie ganze positive Zahlen sind, welche folgendermassen bestimmt werden:

Es seien u_0, v_0, w_0 drei gegebene positive Grössen, deren grösste w_0 ist: aus ihnen bestimme man l_0 und m_0 als die den Brüchen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ nächst kleineren ganzen Zahlen. Setzt man

$$v_0 - l_0u_0 = u_1,\quad w_0 - m_0u_0 = v_1,\quad u_0 = w_1,$$

so bestimme man ähnlich l_1 und m_1 als die den Brüchen $\frac{v_1}{u_1}$, $\frac{w_1}{u_1}$ nächst kleineren ganzen Zahlen. Man setzt wieder

$$v_1 - l_1u_1 = u_2,\quad w_1 - m_1u_1 = v_2,\quad u_1 = w_2.$$

Allgemein bestimme man aus u_i, v_i, w_i die Grössen l_i und m_i als die den Brüchen $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ nächst kleineren ganzen Zahlen, und mit Hülfe derselben

u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} durch die Gleichungen

$$(12.)\quad v_i - l_i u_i = u_{i+1},\quad w_i - m_i u_i = v_{i+1},\quad u_i = w_{i+1}.$$

Wenn $u_i > v_i$, so wird

$$l_i = 0,\quad v_i = u_{i+1}.$$

Es folgt hieraus, dass u_i, v_i, w_i positive Grössen von der Beschaffenheit sind, dass

$$u_i < u_{i-1},\quad v_i < u_{i-1};$$

es wird daher auch, da $u_{i-1} = w_i$,

$$w_i > u_i,\quad w_i > v_i$$

und mithin w_i immer die grösste der drei Grössen u_i, v_i, w_i.

Die Grössen u_i und w_i nehmen mit wachsendem i fortwährend ab. Aus (12.) folgt

$$(13.)\quad u_{i+2} = u_{i-1} - m_i u_i - l_{i+1} u_{i+1};$$

es wird daher

$$u_{i+2} < \frac{u_{i-1}}{1 + m_i + l_{i+1}},$$

also gewiss $u_{i+2} < \frac{1}{2} u_{i-1}$. Die Grössen u_i können daher Null werden, oder der Null so nahe kommen, dass der Unterschied kleiner als jede gegebene noch so kleine Zahl wird.

Die Grösse v_i wird aus den Grössen u_i mittelst der Gleichungen

$$v_i = l_i u_i + u_{i+1} = u_{i-2} - m_{i-1} u_{i-1}$$

bestimmt. Diese Grösse ist immer kleiner als u_{i-1}; wenn sie auch $< u_i$, so kann der Fall eintreten, dass $v_{i+1} > v_i$ wird. Es ist dann aber immer $v_{i+2} < v_i$, da $v_{i+2} < u_{i+1}$ und $u_{i+1} = v_i$. Ferner wird in diesem Falle

$$v_{i+3} = u_{i+1} - m_{i+2} u_{i+2} = v_i - m_{i+2} u_{i+2},$$

woraus

$$v_{i+3} < \frac{v_i}{1 + m_{i+2}},$$

also gewiss $v_{i+3} < \frac{1}{2} v_i$ folgt. Aus $v_i < u_i$, $v_{i+1} > v_i$ folgt auch $v_{i+1} > u_{i+1}$, da $u_{i+1} = v_i$, wenn $v_i < u_i$; dagegen wird aus $v_i < u_i$, $v_{i+1} < v_i$ wiederum $v_{i+1} < u_{i+1}$ folgen, so dass es möglich ist, dass die Grössen v_i immer kleiner als u_i bleiben, und daher die Zahlen l_i sämmtlich verschwinden. Ich bemerke noch, dass immer $m_i \geqq l_i$, dass ferner nur dann $l_i = 0$ werden kann, wenn $m_{i-1} > l_{i-1}$, niemals aber wenn $m_{i-1} = l_{i-1}$.

Setzt man

$$(14.)\quad U = u_0 a + v_0 a_1 + w_0 a_2,$$

so erhält man durch fortgesetzte Substitution der Gleichungen

$$a_i+l_i a_{i+1}+m_i a_{i+2} = a_{i+3},$$

$$v_i-l_i u_i=u_{i+1}, \qquad w_i-m_i u_i=v_{i+1}, \qquad u_i=w_{i+1}$$

nach und nach

$$\begin{aligned} U &= u_0 a+v_0 a_1+w_0 a_2 \\ &= u_1 a_1+v_1 a_2+w_1 a_3 \\ &= u_2 a_2+v_2 a_3+w_2 a_4 \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und allgemein

$$(15.) \qquad U = u_i a_i+v_i a_{i+1}+w_i a_{i+2}.$$

Substituirt man in der Gleichung

$$u_0 a+v_0 a_1+w_0 a_2 = u_i a_i+v_i a_{i+1}+w_i a_{i+2}$$

für a, a_1, a_2 die Ausdrücke (9.), und setzt die Coefficienten von a_i, a_{i+1}, a_{i+2} auf beiden Seiten der so transformirten Gleichung respective einander gleich, oder für a_i, a_{i+1}, a_{i+2} die Ausdrücke (11.), und setzt respective die Coefficienten von a, a_1, a_2 einander gleich, so erhält man die Gleichungen

$$(16.) \qquad \begin{cases} u_i = p_i u_0+p'_i v_0+p''_i w_0, \\ v_i = q_i u_0+q'_i v_0+q''_i w_0, \\ w_i = r_i u_0+r'_i v_0+r''_i w_0, \end{cases}$$

und die reciproken

$$(17.) \qquad \begin{cases} u_0 = P_i u_i+P_{i+1} v_i+P_{i+2} w_i, \\ v_0 = P'_i u_i+P'_{i+1} v_i+P'_{i+2} w_i, \\ w_0 = P''_i u_i+P''_{i+1} v_i+P''_{i+2} w_i. \end{cases}$$

Alle in den letzteren Gleichungen vorkommenden Grössen sind positiv; man hat daher, da $w_i=u_{i-1}$,

$$(18.) \qquad \frac{u_{i-1}}{u_0}<\frac{1}{P_{i+2}}, \qquad \frac{u_{i-1}}{v_0}<\frac{1}{P'_{i+2}}, \qquad \frac{u_{i-1}}{w_0}<\frac{1}{P''_{i+2}},$$

oder auch, wenn man i für $i-1$ setzt, und die erste der Gleichungen (16.) anwendet,

$$(19.) \qquad \begin{cases} p_i+p'_i\frac{v_0}{u_0}+p''_i\frac{w_0}{u_0}<\frac{1}{P_{i+3}}, \\ p_i\frac{u_0}{v_0}+p'_i+p''_i\frac{w_0}{v_0}<\frac{1}{P'_{i+3}}, \\ p_i\frac{u_0}{w_0}+p'_i\frac{v_0}{w_0}+p''_i<\frac{1}{P''_{i+3}}. \end{cases}$$

Da die Determinanten der Gleichungen (16.) und (17.) gleich $+1$ sind, so hat man die Gleichungen

$$(20.)\quad \begin{cases} q'_i r''_i - q''_i r'_i = P_i, & q''_i r_i - q_i r''_i = P'_i, & q_i r'_i - q'_i r_i = P''_i, \\ r'_i p''_i - r''_i p'_i = P_{i+1}, & r''_i p_i - r_i p''_i = P'_{i+1}, & r_i p'_i - r'_i p_i = P''_{i+1}, \\ p'_i q''_i - p''_i q'_i = P_{i+2}, & p''_i q_i - p_i q''_i = P'_{i+2}, & p_i q'_i - p'_i q_i = P''_{i+2}, \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} P'_{i+1}P''_{i+2} - P'_{i+2}P''_{i+1} = p_i, & P''_{i+1}P_{i+2} - P''_{i+2}P_{i+1} = p'_i, & P_{i+1}P'_{i+2} - P_{i+2}P'_{i+1} = p''_i, \\ P'_{i+2}P''_i - P'_i P''_{i+2} = q_i, & P''_{i+2}P_i - P''_i P_{i+2} = q'_i, & P_{i+2}P'_i - P_i P'_{i+2} = q''_i, \\ P'_i P''_{i+1} - P'_{i+1}P''_i = r_i, & P''_i P_{i+1} - P''_{i+1}P_i = r'_i, & P_i P'_{i+1} - P_{i+1}P'_i = r''_i. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (16.) und (17.) folgt ferner

$$(22.)\quad \begin{cases} P_i p_i + P'_i p'_i + P''_i p''_i = 1, \\ P_{i+1}p_i + P'_{i+1}p'_i + P''_{i+1}p''_i = 0, \\ P_{i+2}p_i + P'_{i+2}p'_i + P''_{i+2}p''_i = 0, \end{cases}$$

zu denen man noch die folgenden hinzufügen kann

$$(23.)\quad \begin{cases} P_{i+3}p_i + P'_{i+3}p'_i + P''_{i+3}p''_i = 1, \\ P_{i+4}p_i + P'_{i+4}p'_i + P''_{i+4}p'' = m_{i+1}, \\ P_{i-1}p_i + P'_{i-1}p'_i + P''_{i-1}p''_i = -l_{i-1}, \end{cases}$$

die sich aus (22.) mittelst der Gleichung

$$P_{i+3} = m_i P_{i+2} + l_i P_{i+1} + P_i$$

ergeben.

Aus (17.) und (21.) folgt

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{v_0}{u_0} = \dfrac{P'_{i+2}}{P_{i+2}} + \dfrac{q''_i u_i - p''_i v_i}{u_0 P_{i+2}}, \\ \dfrac{w_0}{u_0} = \dfrac{P''_{i+2}}{P_{i+2}} - \dfrac{q'_i u_i - p'_i v_i}{u_0 P_{i+2}}. \end{cases}$$

Es werden daher die Brüche

$$\frac{P'_{i+2}}{P_{i+2}},\quad \frac{P''_{i+2}}{P_{i+2}}$$

zwei *mit demselben Nenner* behaftete Näherungswerthe *) für die Grössen $\frac{v_0}{u_0}$ und $\frac{w_0}{u_0}$.

*) Das Gesetz, nach welchem die Annäherung erfolgt, ist in dem mir vorliegenden Manuscripte nicht weiter untersucht. *H.*

Entwickelung der reellen Wurzel einer cubischen Gleichung durch kettenbruchähnliche periodische Algorithmen.

§. 7. Ich will im Folgenden für u_0 eine ganze Zahl, und für v_0 und w_0 Ausdrücke von der Form

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

setzen *), in welchen α, β, γ ganze Zahlen sind, und x eine reelle Wurzel einer irreductibeln kubischen Gleichung bezeichnet, in welcher der Coefficient von x^3 gleich 1 und die Coefficienten der drei übrigen Glieder reelle ganze Zahlen sind. Ein Ausdruck dieser Art kann nicht verschwinden, ohne dass α, β, γ selbst Null sind; hieraus folgt unmittelbar, dass eine Grösse sich nur auf eine einzige Weise durch die Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ darstellen lässt, also nicht auch gleich $\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2$ wird, wenn α', β', γ' gleichfalls ganze Zahlen bedeuten, ohne dass $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$ sind. Zugleich werde ich aber den Grössen u_i, v_i, w_i eine modificirte Bedeutung geben.

Es soll nämlich im Folgenden immer u_i eine *ganze Zahl* sein, während v_i und w_i Ausdrücke von derselben Form wie v_0 und w_0 bedeuten. Solchen Ausdruck $\alpha+\beta x+\gamma x^2$, in welchem α, β, γ ganze Zahlen sind, werde ich hier der Kürze halber einen *complexen Ausdruck*, und α, β, γ die Coefficienten desselben nennen, und unter *dem Theiler* desselben die grösste ganze Zahl verstehn, welche zugleich alle drei Zahlen α, β, γ theilt.

Es sollen ferner, wie früher, l_i und m_i die den Brüchen

$$\frac{v_i}{u_i},\quad \frac{w_i}{u_i}$$

nächst kleineren ganzen Zahlen bedeuten, so dass, wenn u_i, v_i, w_i positive Zahlen sind, auch die Grössen

$$v_i-l_i u_i,\quad w_i-m_i u_i,\quad u_i$$

positive Grössen werden. Diese letzteren Grössen selbst sollen aber nicht mehr, wie im Vorhergehenden, mit u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} bezeichnet werden, sondern *ihre Producte durch den einfachsten complexen Factor, welcher* $v_i-l_i u_i$ *zu*

**) An dieser Stelle betrachtet *Jacobi* allerdings nur solche Ausdrücke von der vorstehenden Form, in welchen x die reelle dritte Wurzel einer ganzen Zahl n ist. Dem Manuscripte hat er aber, nachträglich wie es scheint, mehrere lose Blätter hinzugefügt, auf denen x die allgemeinere Bedeutung erhält, die ich ihm hier gleich von vorn herein gebe. Ich erlaubte mir diese Aenderung, da sie nur ganz geringe Modificationen erforderte. *H.*

einer ganzen Zahl macht, dividirt durch die grösste ganze Zahl, welche alle diese Producte theilt. Nennt man v'_i und w'_i, v''_i und w''_i die Grössen, welche aus v_i und w_i entstehen, wenn man für x die beiden andern Wurzeln x' und x'' der kubischen Gleichung setzt, so wird dieser Factor, den ich mit f_i bezeichnen werde,

$$f_i = \frac{(v'_i - l_i u_i)(v''_i - l_i u_i)}{g_i},$$

wenn g_i die grösste ganze Zahl ist, welche die drei Coefficienten des complexen Ausdrucks

$$v'_i v''_i - l_i u_i (v'_i + v''_i) + l_i^2 u_i^2 = (v'_i - l_i u_i)(v''_i - l_i u_i)$$

theilt. Bezeichnet man hierauf mit k_i die grösste ganze Zahl, welche die drei Ausdrücke

$$f_i(v_i - l_i u_i), \quad f_i(w_i - l_i u_i), \quad f_i u_i$$

theilt, so wird

$$k_i u_{i+1} = f_i(v_i - l_i u_i), \quad k_i v_{i+1} = f_i(w_i - m_i u_i), \quad k_i w_{i+1} = f_i u_i.$$

Hieraus folgt, dass wenn man mit F_i das Product

$$\frac{f_0}{k_0} \frac{f_1}{k_1} \cdots \frac{f_{i-1}}{k_{i-1}} = F_i$$

bezeichnet, die früher mit u_i, v_i, w_i bezeichneten Grössen jetzt durch

$$\frac{u_i}{F_i}, \quad \frac{v_i}{F_i}, \quad \frac{w_i}{F_i}$$

ersetzt werden müssen. Es bleiben daher die Verhältnisse von u_i, v_i, w_i, und daher die Quotienten l_i und m_i, und daher auch alle Grössen

$$a_i, \quad p_i, \quad p'_i, \quad p''_i, \quad P_i, \quad P'_i, \quad P''_i$$

unverändert.

Es folgt hieraus, dass man in allen im Vorhergehenden aufgestellten Formeln keine weitere Veränderung zu treffen braucht, als dass man überall $\frac{u_i}{F_i}$, $\frac{v_i}{F_i}$, $\frac{w_i}{F_i}$ für u_i, v_i, w_i setzt. So erhält man, wenn man

$$U_0 = u_0 a + v_0 a_1 + w_0 a_2$$

$$U_i = u_i a_i + v_i a_{i+1} + w_i a_{i+2}$$

setzt, die Gleichung

$$U_i = F_i U_0.$$

Man wird aus (16.) und (17.) die Gleichungen

$$(25.)\quad\begin{cases}\frac{u_i}{F_i} = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0,\\ \frac{v_i}{F_i} = q_i u_0 + q_i' v_0 + q_i'' w_0,\\ \frac{w_i}{F_i} = r_i u_0 + r_i' v_0 + r_i'' w_0,\end{cases}$$

$$(26.)\quad\begin{cases}F_i u_0 = P_i\, u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i,\\ F_i v_0 = P_i'\, u_i + P_{i+1}' v_i + P_{i+2}' w_i,\\ F_i w_0 = P_i''\, u_i + P_{i+1}'' v_i + P_{i+2}'' w_i\end{cases}$$

erhalten.

§. 8. Die Factoren f_i sind ihrer Natur nach immer positive Grössen; es werden daher auch F_i und u_i, v_i, w_i immer positive Grössen sein, wenn man für u_0, v_0, w_0 solche angenommen hat; es wird ferner, wie früher, w_i die grösste von den drei Grössen u_i, v_i, w_i sein, wenn man, wie früher, für w_0 die grösste der Grössen u_0, v_0, w_0 nimmt.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{F_i u_0}{w_i} > P_{i+2},\quad \frac{F_i v_0}{w_i} > P_{i+2}',\quad \frac{F_i w_0}{w_i} > P_{i+2}'',$$

nnd daher

$$\frac{w_i}{F_i u_0} < \frac{1}{P_{i+2}},\quad \frac{w_i}{F_i v_0} < \frac{1}{P_{i+2}'},\quad \frac{w_i}{F_i w_0} < \frac{1}{P_{i+2}''}$$

woraus folgt, *dass die complexe Grösse*

$$p_{i-1} u_0 + p_{i-1}' v_0 + p_{i-1}'' w_0 = \frac{w_i}{F_i}$$

kleiner als die Grössen

$$\frac{u_0}{P_{i+2}},\quad \frac{v_0}{P_{i+2}'},\quad \frac{w_0}{P_{i+2}''}$$

wird. Es wird daher die complexe Grösse mit wachsendem i kleiner als jede gegebene noch so kleine Grösse.

Wenn man durch successive Ausführung der Multiplication das Product

$$\frac{f_0}{k_0}\cdot\frac{f_1}{k_1}\cdots\frac{f_{i-1}}{k_{i-1}} = F_i$$

bildet, so müssen sich, wenn $u_0 = 1$ *), die Nenner nach jeder Multiplication

*) D. h. wenn die Grössen $\frac{v_0}{u_0}$ und $\frac{w_0}{u_0}$, welche entwickelt werden, complexe Zahlen sind, nicht solche Zahlen noch dividirt durch eine ganze Zahl. *H.*

fortheben. Denn man sieht aus der ersten Gleichung (26.), dass F_i eine complexe Zahl ist, oder ein Ausdruck, in dem die Potenzen der Wurzelgrösse mit ganzen Zahlen multiplicirt sind, und auch die hinzukommende Constante eine ganze Zahl ist. Da

$$k_i w_{i+1} = u_i f_i,$$

und f_i durch keine ganze Zahl theilbar ist, so folgt, *dass k_i immer ein Theiler von u_i ist.* Wenn daher $u_0 = 1$, so ist auch $k_0 = 1$. Wenn u_0 von 1 verschieden ist, so folgt aus derselben Gleichung (26.), dass der complexe Ausdruck F_i niemals einen andern Nenner als u_0 erhalten kann.

Aus der Gleichung

$$f_i(v_i - l_i u_i) = k_i u_{i+1} \quad \text{oder} \quad \frac{k_i}{f_i} = \frac{v_i - l_i u_i}{u_{i+1}}$$

folgt

$$(27.)\quad \frac{1}{F_i} = \frac{(v_0 - l_0 u_0)(v_1 - l_1 u_1)\dots(v_{i-1} - l_{i-1} u_{i-1})}{u_1 u_2 \dots u_i},$$

durch welche Gleichung man den inversen Werth von F_i nach und nach bequem als complexen Ausdruck darstellt.

§. 9. *Setzen wir den Fall, dass gleichzeitig*

$$u_i = u_0, \quad v_i = v_0, \quad w_i = w_0,$$

so wird die Norm von F_i, d. h. das Product aller Ausdrücke, welche aus F_i erhalten werden, wenn man darin der Wurzelgrösse x ihre verschiedenen Werthe giebt, der Einheit gleich.

Es folgt nämlich in diesem Falle*) aus (25.)

$$(28.)\quad \begin{cases} 0 = \left(p_i - \frac{1}{F_i}\right)u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0, \\ 0 = q_i u_0 + \left(q_i' - \frac{1}{F_i}\right)v_0 + q_i'' w_0, \\ 0 = p_{i-1} u_0 + p_{i-1}' v_0 + \left(p_{i-1}'' - \frac{1}{F_i}\right)w_0. \end{cases}$$

oder aus (26.)

$$(29.)\quad \begin{cases} 0 = (P_i - F_i)u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i, \\ 0 = P_i' u_i + (P_{i+1}' - F_i)v_i + P_{i+2}' w_i, \\ 0 = P_i'' u_i + P_{i+1}'' v_i + (P_{i+2}'' - F_i)w_i. \end{cases}$$

Durch Elimination von u_0, v_0, w_0 aus (28.) oder von u_i, v_i, w_i aus (29.) findet man zwei cubische Gleichungen, deren Wurzeln die drei verschiedenen

*) Nach §. 3 ist nämlich $r_k = p_{k-1}$ etc. H.

Werthe sind, welche resp. $\frac{1}{F_i}$ und F_i annehmen, wenn man darin für x successive x' und x'' setzt. Das von $\frac{1}{F_i}$ und F_i freie Glied in der Determinante der Gleichungen (28.) und (29.) ist die Norm resp. der Grösse $\frac{1}{F_i}$ und F_i. Dieses Glied der Determinante ist wiederum eine Determinante, welche nach dem Obigen (§. 4) den Werth $+1$ hat.

§. 10. Man sieht, dass im Vorhergehenden die Norm eines complexen Ausdrucks auf eine eigenthümliche Weise eingeführt wird, nämlich als das constante Glied der algebraischen Gleichung, deren Wurzel der complexe Ausdruck ist. Ich will diese Gleichung für ein beliebiges F_i aufsuchen, ohne die obige Voraussetzung zu machen, dass $u_i = u_0$, $v_i = v_0$, $w_i = w_0$.

Da man nach der Voraussetzung jede complexe Zahl als eine lineare homogene Function von u_0, v_0, w_0, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, darstellen kann, so sei

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha u_0, \\ v_i &= \beta u_0 + \beta' v_0 + \beta'' w_0, \\ w_i &= \gamma u_0 + \gamma' v_0 + \gamma'' w_0. \end{aligned}$$

Man erhält hiernach

$$\begin{aligned} 0 &= \left(p_i - \frac{\alpha}{F_i}\right)u_0 + \quad p'_i v_0 \quad + \quad p''_i w_0, \\ 0 &= \left(q_i - \frac{\beta}{F_i}\right)u_0 + \left(q'_i - \frac{\beta'}{F_i}\right)v_0 + \left(q''_i - \frac{\beta''_i}{F_i}\right)w_0, \\ 0 &= \left(r_i - \frac{\gamma}{F_i}\right)u_0 + \left(r'_i - \frac{\gamma'}{F_i}\right)v_0 + \left(r''_i - \frac{\gamma''_i}{F_i}\right)w_0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Determinante dieser Gleichungen durch Δ, so wird F_i eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta = 0$. Der Coefficient von $\frac{1}{F_i^3}$ in Δ ist $-\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')$ und das ganz constante Glied $+1$, also, *wenn man N_i die Norm von F_i nennt,*

$$(30.) \qquad N_i = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma');$$

oder *es ist die Norm von F_i die Determinante der Gleichungen, welche u_i, v_i, w_i durch u_0, v_0, w_0 ausdrücken.*

Setzt man

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \delta, \quad \beta''\gamma - \beta\gamma'' = \delta', \quad \beta\gamma' - \beta'\gamma = \delta'',$$

also $N_i = \alpha\delta$, so wird

$$u_0 = \frac{u_i}{\alpha},$$
$$v_0 = \frac{\delta' u_i}{\alpha\delta} + \frac{\gamma'' v_i - \beta'' w_i}{\delta},$$
$$w_0 = \frac{\delta'' u_i}{\alpha\delta} - \frac{\gamma' v_i - \beta' w_i}{\delta}.$$

Hieraus folgt

$$0 = \left(P_i - \frac{F_i}{\alpha}\right)u_i + \quad P_{i+1}v_i \quad + \quad P_{i+2}w_i,$$
$$0 = \left(P'_i - \frac{\delta' F_i}{\alpha\delta}\right)u_i + \left(P'_{i+1} - \frac{\gamma'' F_i}{\delta}\right)v_i + \left(P'_{i+2} + \frac{\beta'' F_i}{\delta}\right)w_i,$$
$$0 = \left(P''_i - \frac{\delta'' F_i}{\alpha\delta}\right)u_i + \left(P''_{i+1} + \frac{\gamma' F_i}{\delta}\right)v_i + \left(P''_{i+2} - \frac{\beta' F_i}{\delta}\right)w_i.$$

Durch Elimination von u_i, v_i, w_i aus diesen Gleichungen erhält man ebenfalls eine Gleichung für F_i, welche die früher gefundenen enthalten muss.

§. 11. *Wir beschränken uns von hier an auf den Fall, wo $u_0 = 1$ ist,* woraus folgt, dass α eine ganze Zahl und zwar gleich u_i wird. Die Gleichung (30.) verwandelt sich durch diese Annahme in

$$(30^*.) \qquad N_i = u_i(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma').$$

Ferner sollen die β und γ von hier an ganze Zahlen bedeuten, was dadurch von selbst geschieht, dass man annimmt, die complexen Zahlen v_0 und w_0, von denen man ausging, und welche die Form

$$v_0 = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2,$$
$$w_0 = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$$

haben, seien so beschaffen, das $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \pm 1$. Alsdann lässt sich nämlich x und x^2 durch die Form $a + bv_0 + cw_0$, oder, da $u_0 = 1$, durch die Form $au_0 + bv_0 + cw_0$ darstellen, wo a, b, c ganze Zahlen sind; folglich nimmt jede complexe Zahl, also auch v_i und w_i diese Form an.

Aus (30*.) folgt nun, dass immer wenn N_i gleich 1 wird, auch

$$u_i = 1, \qquad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = 1$$

ist, und dass auch umgekehrt, wenn diese Gleichungen erfüllt sind, die Norm von F_i der Einheit gleich wird. *Aber damit die Norm von F_i der Einheit gleich werde, ist die eine Bedingung $u_i = 1$ ausreichend, indem sie die andere $\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = 1$ mit sich bringt.* Damit nämlich $\frac{u_i}{F_i}$ eine ganze complexe Zahl

$$p_i + p'_i v_0 + p''_i w_0$$

ist, muss auch die Norm von $\frac{u_i}{F_i}$ oder

$$\frac{u_i^3}{N_i} = \frac{u_i^3}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}$$

eine ganze Zahl, *und daher* u_i^3 *durch* $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ *theilbar sein*. Wenn daher $u_i = 1$, so muss $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ als Theiler von 1 der Einheit gleich sein. Es kann $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ nicht -1 sein, welches ebenfalls ein Theiler von 1 ist, weil f_i immer einen positiven Werth hat, wie aus seiner Definition hervorgeht, woraus folgt, dass auch F_i, und daher seine Norm $u_i(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')$ immer positiv ist. *Es muss daher, da* u_i *positiv ist, auch* $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ *immer positiv sein.*

Man kann auch zeigen, *dass* u_i *selbst durch* $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ *theilbar ist.* Denn da *)

$$\frac{u_i}{F_i} = \frac{u_i F_i' F_i''}{N_i} = \frac{F_i' F_i''}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}$$

eine ganze complexe Zahl ist, (§. 7) so kann $F_i'F_i''$ durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ getheilt werden. Also ist auch, wenn man für die Wurzel einen ihrer beiden anderen Werthe setzt, F_iF_i'' und F_iF_i' durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar, also das Product

$$F_i^2 F_i' F_i'' = u_i F_i(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')$$

durch $(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2$, und mithin $u_i F_i$ durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$. Es wird also u_i multiplicirt mit dem Theiler von F_i durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sein. Es kann aber F_i keinen Theiler haben. Denn sonst würden alle drei Ausdrücke

$$\begin{aligned} u_i &= F_i(p_i + p_i' v_0 + p_i'' w_0), \\ v_i &= F_i(q_i + q_i' v_0 + q_i'' w_0), \\ w_i &= F_i(r_i + r_i' v_0 + r_i'' w_0) \end{aligned}$$

denselben Theiler besitzen, während doch u_i, v_i, w_i keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen. Da also F_i ohne Theiler, und $u_i F_i$ durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar ist, muss u_i durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sein, w. z. b. w.

Anmerkung. Dass die Norm von F_i der Einheit gleich ist, wenn $u_i = 1$, erhellt auch unmittelbar aus dem allgemeinen Satz, dass F_i und $\frac{u_i}{F_i}$ oder $\frac{1}{F_i}$ nicht ganze complexe Zahlen sein können, wenn nicht die Norm von F_i entweder $+1$ oder -1 ist. Denn es werden dann die Normen von F_i

*) F_i' und F_i'' sind die Werthe, welche F_i annimmt, wenn man darin für x successive die beiden andern Wurzeln der cubischen Gleichung x' und x'' setzt. Es ist jetzt u_i wieder allgemein, und nicht grade 1.

oder $\frac{1}{F_i}$ ganze Zahlen, welche inverse Werthe haben, welche Eigenschaft nur den ganzen Zahlen $+1$ oder -1 zukommt.

§. 12. Es soll jetzt gezeigt werden, *dass durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ nicht bloss u_i sondern auch $\beta''\gamma-\beta\gamma''$ und $\beta\gamma'-\beta'\gamma$ theilbar sind.*

Man setze

$$\Phi_i = \frac{u_i}{F_i} = \frac{F_i' F_i''}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'} = p_i + p_i' v_0 + p_i'' w_0,$$

so hat Φ_i keinen Theiler, weil p_i, p_i', p_i'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können, da sie eine Horizontalreihe der neun Grössen bilden, deren Determinante $=1$ gefunden war. Aus den Gleichungen

$$\frac{u_i v_i}{F_i} = v_i \Phi_i = u_i(q_i + q_i' v_0 + q_i'' w_0) = (\beta + \beta' v_0 + \beta'' w_0)\Phi_i,$$

$$\frac{u_i w_i}{F_i} = w_i \Phi_i = u_i(r_i + r_i' v_0 + r_i'' w_0) = (\gamma + \gamma' v_0 + \gamma'' w_0)\Phi_i$$

folgt, dass die beiden Ausdrücke

$$(\beta + \beta' v_0 + \beta'' w_0)\Phi_i \quad \text{und} \quad (\gamma + \gamma' v_0 + \gamma'' w_0)\Phi_i$$

und mithin auch die beiden Ausdrücke

$$\{-(\beta''\gamma-\beta\gamma'') + (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')v_0\}\Phi_i,$$
$$\{-(\beta\gamma'-\beta'\gamma) + (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')w_0\}\Phi_i$$

durch u_i und also durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sind. Es sind also auch die beiden Ausdrücke

$$(\beta''\gamma-\beta\gamma'')\Phi_i \quad \text{und} \quad (\beta\gamma'-\beta'\gamma)\Phi_i$$

und mithin, da Φ_i keinen Theiler hat, auch $\beta''\gamma-\beta\gamma''$ und $\beta\gamma'-\beta'\gamma$ selber durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar.

Es folgt hieraus, dass man immer

$$\beta = a\beta' + b\beta'',$$
$$\gamma = a\gamma' + b\gamma''$$

und daher (§. 10)

$$v_i = \beta'(v_0 + a) + \beta''(w_0 + b),$$
$$w_i = \gamma'(v_0 + a) + \gamma''(w_0 + b)$$

setzen kann, wo a und b ganze Zahlen sind.

Da ein Theiler von v_i alle drei Zahlen β, β', β'' theilt, so theilt er auch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ und mithin auch u_i, weil dieses (§. 11) ein Vielfaches von $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ ist. Ebenso wird jeder Theiler von w_i die Zahlen γ, γ', γ'',

$\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ und u_i theilen. *Hieraus folgt, dass v_i und w_i keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können,* weil denselben auch u_i haben müsste, und keine Zahl zugleich u_i, v_i, w_i theilt.

Es sei h_i der gemeinschaftliche Theiler der Zahlen β'_i und β''_i, der also auch Theiler von

$$v_i, \quad \beta'\gamma''-\beta''\gamma', \quad u_i, \quad v_i-l_iu_i$$

ist. Setzt man

$$v_i-l_iu_i = h_i\varphi_i,$$

wo φ_i keinen Theiler hat, so wird

$$\varphi_iF_{i+1} = \frac{\varphi_if_iF_i}{k_i} = \frac{u_{i+1}}{h_i}F_i,$$

und mithin, da F_i keinen Theiler hat, h_i Theiler von u_{i+1}. *Es theilt daher h_i sowohl u_i als u_{i+1}, oder es ist u_i sowohl durch h_i als durch h_{i-1} theilbar.*

Setzt man

$$\beta'\gamma''-\beta''\gamma' = C_i$$

und wie oben

$$p_i+p'_iv_0+p''_iw_0 = \Phi_i,$$

so wird $u_i = F_i\Phi_i$, und, da die Norm von F_i oder

$$F_iF'_iF''_i = C_iu_i,$$

$$F'_iF''_i = C_i\Phi_i.$$

Aus der Gleichung

$$f'_if''_i = \frac{k_iu_{i+1}}{g_i}(v_i-l_iu_i)$$

folgt, *dass g_i Theiler von $h_ik_iu_{i+1}$ ist.* Bemerkt man die Gleichung

$$\Phi_i(v_i-l_iu_i) = \Phi_iF_i\Phi_{i+1} = u_i\Phi_{i+1},$$

so wird

$$F'_{i+1}F''_{i+1} = C_{i+1}\Phi_{i+1} = \frac{f'_if''_i}{k_i^2}F'_iF''_i = C_i\Phi_i\cdot\frac{u_{i+1}}{k_ig_i}(v_i-l_iu_i) = \frac{C_iu_iu_{i+1}}{k_ig_i}\Phi_{i+1},$$

also

$$C_{i+1}k_ig_i = C_iu_iu_{i+1}$$

oder

$$g_i = C_i\frac{u_i}{k_i}\cdot\frac{u_{i+1}}{C_{i+1}}.$$

Es ist also g_i das Product der drei ganzen Zahlen C_i, $\frac{u_i}{k_i}$, $\frac{u_{i+1}}{C_{i+1}}$ oder wenn man will, das Product der vier ganzen Zahlen

$$\frac{k_{i-1}C_i}{u_{i-1}}, \quad \frac{u_{i-1}}{k_{i-1}}, \quad \frac{u_i}{k_i}, \quad \frac{u_{i+1}}{C_{i+1}}.$$

Die erste von diesen vier Grössen ist nämlich eine ganze Zahl, weil $\frac{u_{i-1}}{k_{i-1}}$ in w_i aufgeht, und jeder Theiler von w_i, wie in diesem Paragraphen bewiesen wurde, auch C_i theilt. Ferner ist $\frac{u_i}{k_i}$ eine ganze Zahl, weil, wie man oben §. 7 sah, $k_i w_{i+1} = f_i u_i$ und f_i durch keine ganze Zahl theilbar ist, also k_i in u_i aufgehen muss.

Da g_i ein Theiler von $h_i k_i u_{i+1}$ ist, so folgt hieraus, *dass* $\frac{C_i}{h_i}\frac{u_i}{k_i}$ *Theiler von* $k_i C_{i+1}$ *ist.* Aus der Gleichung

$$g_i \cdot \frac{k_i C_{i+1}}{u_i} = C_i u_{i+1}$$

ergiebt sich, *dass* g_i *Theiler von* $C_i u_{i+1}$ *oder* $\frac{g_i}{C_i}$ *Theiler von* u_{i+1} *ist.* Es folgt aus dem Vorstehenden ferner, *dass* $\frac{C_i}{h_i}$ *Theiler von* $k_i \cdot \frac{C_{i+1} k_i}{u_i}$ *ist.*

Aus $u_i = F_i \Phi_i$ ergiebt sich

$$u_i^2 = u_i F_i \Phi_i = F_i' F_i'' \Phi_i' \Phi_i'' = C_i \Phi_i \Phi_i' \Phi_i'',$$

und daher

$$\Phi_i' \Phi_i'' = \frac{u_i}{C_i} F_i.$$

Es folgen hieraus die Normen von F_i, f_i, Φ_i resp. gleich

$$C_i u_i, \quad \frac{u_{i+1}^2}{g_i}, \quad \frac{u_i^2}{C_i}.$$

Man ersieht ferner aus diesen Formeln, dass die Producte

$$F_i' F_i'', \quad f_i' f_i'', \quad \Phi_i' \Phi_i''$$

resp. die Zahlen

$$C_i, \quad \frac{k_i u_{i+1} h_i}{g_i}, \quad \frac{u_i}{C_i}$$

zu ihren grössten Theilern haben.

Setzt man

$$q_i + q_i' v_0 + q_i'' w_0 = \Psi_i,$$

so hat man die Gleichungen

$$\Phi_i v_i = \Psi_i u_i,$$
$$\Phi_i w_i = \Phi_{i-1} u_i.$$

Es folgt hieraus, dass die beiden Ausdrücke

$$(\gamma'' v_i - \beta'' w_i)\Phi_i = C_i(v_0 + a)\Phi_i,$$
$$(\beta' w_i - \gamma' v_i)\Phi_i = C_i(w_0 + b)\Phi_i$$

durch u_i theilbar sind. Es werden daher die beiden complexen Ausdrücke

$$(v_0+a)\Phi_i, \quad (w_0+b)\Phi_i,$$

durch die Zahl $\frac{u_i}{C_i}$ theilbar, und $\frac{u_i}{C_i}$ theilt die Normen *) von v_0+a und w_0+b.

Hieraus ergiebt sich die folgende merkwürdige Eigenschaft der Grössen u_i, v_i, w_i. *Es sei*

$$v_i = \beta_i'(v_0+a_i)+\beta_i''(w_0+b_i),$$
$$w_i = \gamma_i'(v_0+a_i)+\gamma_i''(w_0+b_i),$$

so sind die Zahlen

$$\frac{u_i}{\beta_i'\gamma_i''-\beta_i''\gamma_i'}$$

so beschaffen, dass in Bezug auf dieselben als Moduln die cubischen Gleichungen, deren Wurzeln v_0 und w_0 sind, gelöst werden können, und es werden resp. $-a_i$ und $-b_i$ die Werthe der Wurzeln dieser Congruenzen. Ist insbesondere

$$v_0=\sqrt[3]{n}, \quad w_0=\sqrt[3]{n^2},$$

so sind die Zahlen $\frac{u_i}{\beta_i'\gamma_i''-\beta_i''\gamma_i'}$ solche, von denen n cubischer Rest ist, und es werden

$$a_i^3+n, \quad b_i^3+n^2$$

durch $\frac{u_i}{\beta_i'\gamma_i''-\beta_i''\gamma_i'}$ theilbar.

Zur Vervollständigung des vorstehenden Satzes für den Fall, wo $v_0=x$, $w_0=x^2$, muss noch bemerkt werden, *dass auch a^2+b durch $\frac{u_i}{C_i}$ aufgeht.* Da

---

*) Wenn ich von den Ausdrücken zu den Normen übergehe, so finde ich, dass das C_i fache der Normen durch $\frac{u_i}{C_i}$ theilbar ist, kann also das obige Resultat nur unter der Voraussetzung nachweisen, dass C_i zu $\frac{u_i}{C_i}$ relative Primzahl ist. Haben die beiden Grössen den grössten Theiler δ gemein, so kann ich demnach nur schliessen, dass die Normen durch $\frac{u_i}{\delta C_i}$ theilbar sind, wodurch die Resultate bis zum Schluss dieses Paragraphen sich etwas modificiren würden. Dieser Theil des Manuscriptes, der aus einer Reihe von Einschiebungen besteht, befindet sich in einem weniger druckfertigen Zustande als der frühere, und giebt nicht hinreichende Andeutungen für den Beweis.

Den folgenden Satz erhält man, da die Norm von $a+v_0$ gleich

$$a^3+a^2(v_0+v_0'+v_0'')+a(v_0v_0'+v_0'v_0''+v_0''v_0)+v_0v_0'v_0''$$

ist, und die Coefficienten der Potenzen von a zugleich die Coefficienten der Gleichung für $-v$ sind. *H.*

nämlich in diesem Falle die Ausdrücke

$$(a+x)\Phi_i, \qquad (b+x^2)\Phi_i$$

durch $\frac{u_i}{C_i}$ aufgehen, so ist dies auch der Fall mit

$$\{(a-x)(a+x)+b+x^2\}\Phi_i = (a^2+b)\Phi_i,$$

woraus der zu beweisende Satz folgt. Man wird im Allgemeinen zeigen können, *dass die zwischen den Grössen v_0 und w_0 Statt findende Gleichung zweiten Grades eine Congruenz in Bezug auf den Modul $\frac{u_i}{C_i}$ wird, wenn man v_0 und w_0 resp. durch $-a$ und $-b$ ersetzt.*

§. 13. Ich will jetzt einige allgemeine Betrachtungen über den Fall anstellen, wenn eine aus den Wurzeln einer cubischen Gleichung gebildete Zahl selber keinen Theiler hat, aber das Product zweier ihrer Werthe durch eine Zahl theilbar ist.

Es seien s, s', s'' die Werthe der complexen Zahl, welche respective aus der ersten, zweiten, dritten Wurzel der Gleichung, oder den Grössen x, x', x'' gebildet werden. Man kann dann mittelst der gegebenen Gleichung das Product $s's''$ durch die erste Wurzel ausdrücken, und es wird dieser Ausdruck wieder eine complexe Zahl, von der ich annehme, dass sie einen Theiler t habe. Denselben Theiler werden die Producte $s''s$ und ss' besitzen, wenn man dieselben respective durch die zweite und dritte Wurzel ausdrückt. Es wird daher das Product

$$(s-s')(s-s'')(s'-s'') = s's''(s'-s'')+s''s(s''-s)+ss'(s-s')$$

als eine ganze rationale Function der drei Wurzeln dargestellt werden können, deren Coefficienten ganze, durch t theilbare Zahlen sind.

Es sei

$$s = \alpha+\beta x+\gamma x^2, \qquad s's'' = \alpha'+\beta' x+\gamma' x^2,$$

wo die Buchstaben nicht ihre frühere Bedeutung haben. Zufolge der gemachten Voraussetzung sollen α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, aber α', β', γ' durch t aufgehen. Substituirt man die Ausdrücke von s' und s'', so erhält man

$$s'-s'' = (x'-x'')\{\beta+\gamma(x'+x'')\} = (x'-x'')(\delta-\gamma x),$$

wo

$$\delta = \beta+\gamma a,$$

wenn a die durch die Gleichung gegebene *Summe der drei Wurzeln* x, x', x'' bezeichnet. Hieraus folgt, wenn man

$$X = (x-x')(x-x'')(x'-x'')$$

setzt, die Gleichung

$$(s-s')(s-s'')(s'-s'') = X(\delta-\gamma x)(\delta-\gamma x')(\delta-\gamma x'').$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} s'-s'' + s''-s + s-s' &= 0, \\ x(s'-s'')+x'(s''-s)+x''(s-s') &= -\gamma X, \\ x^2(s'-s'')+x'^2(s''-s)+x''^2(s-s') &= \beta X, \end{aligned}$$

und daher

$$s's''(s'-s'')+s''s(s''-s)+ss'(s-s') = X(\beta\gamma'-\beta'\gamma).$$

Hieraus ergiebt sich die merkwürdige Gleichung

$$(\delta-\gamma x)(\delta-\gamma x')(\delta-\gamma x'') = \beta\gamma'-\beta'\gamma.$$

Es folgt aus dieser Gleichung, dass, *wenn t das Product $s's''$, und mithin die beiden Zahlen β' und γ' theilt, die gegebene cubische Gleichung eine in Bezug auf den Modul t lösbare Congruenz ist.*

Zur näheren Erläuterung dieses Satzes bemerke ich, *dass t mit γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben kann.* Es müsste nämlich durch diesen auch das Product

$$(\alpha+\beta x')(\alpha+\beta x'')$$

aufgehen, welches, wenn man mit b die durch die cubische Gleichung gegebene Summe der Amben der drei Wurzeln bezeichnet, dem Ausdrucke

$$\alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2-x(\alpha\beta+a\beta^2)+x^2\beta^2$$

gleich wird. Hieraus aber würde folgen, dass auch α und β einen Theiler mit γ und t gemein haben müssten, was gegen die Voraussetzung ist, dass α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen.

Die obige Formel giebt zugleich eine Wurzel der cubischen Congruenz. *Es ist dieselbe die Summe der Wurzeln vermehrt um eine Zahl, welche mit γ multiplicirt und durch t dividirt denselben Rest wie β giebt.* Für den besondern Fall, wenn die complexe Zahl s aus der Cubikwurzel von n gebildet ist, oder $x^3 = n$ die gegebene Gleichung war, folgt dass n *cubischer* Rest von t sein muss.

Ich will im Folgenden den Werth von γ' bestimmen. Stellt man die Grössen

$$x'x'', \quad x'^2+x''^2, \quad x'x''(x'+x''), \quad x'^2x''^2$$

durch einen Ausdruck von der Form

$$\nu x^2+\nu' x+\nu''$$

dar, und nennt die Werthe von ν in diesen vier Ausdrücken resp. ν_1, ν_2,

ν_3, ν_4, so wird

$$\gamma' = \beta^2\nu_1+\alpha\gamma\nu_2+\beta\gamma\nu_3+\gamma^2\nu_4.$$

Ist die gegebene cubische Gleichung

$$x^3-ax^2+bx-c = 0,$$

so wird

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = -1, \quad \nu_3 = a, \quad \nu_4 = b.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\gamma' = \beta^2-\alpha\gamma+a\beta\gamma+b\gamma^2,$$

und hieraus, weil γ' durch t theilbar ist, wenn man wiederum $\delta = \beta+\gamma a$ einführt

$$\beta\delta-\alpha\gamma+\gamma^2 b \equiv 0 \pmod{t}.$$

Eine Wurzel ϱ der Congruenz

$$x^3-ax^2+bx-c \equiv 0 \pmod{t}$$

wurde durch die Congruenz

$$\gamma\varrho \equiv \delta \equiv \gamma a+\beta \pmod{t}$$

gegeben. Substituirt man in die gefundene Congruenz für δ diesen Werth $\gamma\varrho$ und dividirt durch γ, welches (s. o.) keinen Theiler mit t gemein hat, so erhält man

$$\alpha \equiv \beta\varrho+\gamma b \equiv \gamma(\varrho^2-a\varrho+b) \pmod{t}$$

und daher

$$\alpha\varrho \equiv \gamma c \pmod{t}.$$

Wenn die gegebene Gleichung

$$x^3 = n$$

ist, also $a = 0$, $b = 0$, $c = n$, so folgt hieraus

$$\alpha\varrho \equiv \gamma n, \quad \text{oder} \quad \alpha\beta \equiv n\gamma^2 \pmod{t}.$$

Aus den Congruenzen

$$\alpha\varrho \equiv \gamma c, \quad \beta\varrho-\alpha \equiv -\gamma b, \quad \gamma\varrho-\beta \equiv \gamma a \pmod{t}$$

folgt *die in Bezug auf x identische Congruenz*

$$(\varrho-x)(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \equiv \gamma(c-bx+ax^2-x^3) \pmod{t}.$$

Man erhält aus derselben einen Satz, der in dem Falle, dass t eine ungrade Primzahl ist, besonders einfach wird und besagt, *dass die beiden andern Wurzeln der cubischen Congruenz, wenn dergleichen vorhanden sind, durch die Congruenz*

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2 \equiv 0 \pmod{t}$$

gegeben werden, und dass daher die cubische Congruenz in Bezug auf den

Modulus t eine oder drei Wurzeln hat, je nachdem die Zahl

$$\beta^2-4\alpha\gamma$$

quadratischer Nichtrest oder Rest von t ist.

Setzt man

$$s = \frac{1}{h_i}(v_i-l_i u_i),$$

so wird

$$t = \frac{g_i}{h_i^2}.$$

Es ist daher die cubische Gleichung, aus deren Wurzel v_0 und w_0 gebildet sind, in Bezug auf alle Moduln $\frac{g_i}{h_i^2}$ lösbar. Wenn ferner $v_0=x$, $w_0=x^2$, so hat man

$$sh_i = \beta'_i(x+a)+\beta''_i(x^2+b)-l_i u_i$$

und es wird

$$\beta h_i = \beta'_i, \quad \gamma h_i = \beta''_i;$$

β hat keinen Theiler mit γ gemein, weil h_i der Theiler von β'_i und β''_i war. Ferner hat γ oder $\frac{\beta''_i}{h_i}$ keinen Theiler mit $t=\frac{g_i}{h_i^2}$ gemein. *Man hat in dem speciellen Falle, wenn $v_0=\sqrt[3]{n}$, $w_0=\sqrt[3]{n^2}$,* also auch $x^3=n$ ist, dass

$$\varrho^3 \equiv n \pmod{t}$$

also

$$(\gamma\varrho)^3-n\gamma^3 \equiv 0 \pmod{t},$$

woraus folgt, dass

$$\beta^3-n\gamma^3 \equiv 0 \pmod{t}.$$

In diesem speciellen Falle ist also n von allen Zahlen $\frac{g_i}{h_i^2}$ cubischer Rest, und immer

$$\frac{1}{h_i^3}(\beta_i'^3-n\beta_i''^3)$$

theilbar durch $\frac{g_i}{h_i^2}$.

Da ferner g_i ein Theiler von $C_i u_{i+1}$ war (§. 12) und C_i und u_{i+1} durch h_i theilbar sind, so ist $\frac{C_i}{h_i}$ ein Theiler von $\frac{g_i}{h_i^2}$. Man hat auch

$$\frac{\gamma_i''^3}{h_i^3}\{\beta_i'^3-n\beta_i''^3\} = \frac{\beta_i''^3}{h_i^3}(\gamma_i'^3-n\gamma_i''^3)+\frac{\beta_i'^3\gamma_i''^3-\beta_i''^3\gamma_i'^3}{h_i^3}.$$

Das letzte Glied ist durch

$$\frac{C_i}{h_i} = \frac{\beta'_i\gamma''_i-\beta''_i\gamma'_i}{h_i}$$

theilbar, während γ, d. h. $\frac{\beta''_i}{h_i}$ keinen Theiler mit t, also auch mit $\frac{C_i}{h_i}$ ge-

mein hat. Hieraus folgt, *dass auch*

$$(\gamma_i'^3 - n\gamma_i''^3)$$

theilbar durch $\frac{C_i}{h_i}$ ist.

§. 14. Um mich in diesen Algorithmen näher zu orientiren, und zu sehen, ob die Quotienten l_i und m_i, wie bei der Verwandlung der Quadratwurzeln in einen Kettenbruch, periodisch wiederkehren, endlich, ob man hierbei auf complexe Ausdrücke kommt, deren Norm $=1$ wird, habe ich, als ich zuerst im Jahre 1839 diesen Gegenstand untersuchte, mehrere Beispiele berechnet, welche ich hier mittheilen will, da seitdem mehrere Mathematiker sich mit ähnlichen Untersuchungen zu beschäftigen angefangen haben, denen solche ziemlich mühsame Beispiele zur Aufstellung einer vollständigen Theorie zu Anhaltspunkten dienen können. Das Resultat, dass man hierbei nach einigen unregelmässigen Anfangsgliedern zuletzt wirklich auf Perioden geführt wird, habe ich in damaliger Zeit meinen Freunden *Dirichlet* und *Borchardt* mitgetheilt.

Erstes Beispiel.

Entwickelung von $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$.

$(\sqrt[3]{2}=1,260;\ \sqrt[3]{4}=1,587)$.

$u_0 = 1$ $\qquad$ $l_0 = 1$

$v_0 = \sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $m_0 = 1$

$w_0 = \sqrt[3]{4}$ $\qquad$ $f_0 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

$u_1 = f_0(\sqrt[3]{2}-1) = 1$ $\qquad$ $l_1 = 2$

$v_1 = f_0(\sqrt[3]{4}-1) = \sqrt[3]{2}+1$ $\qquad$ $m_1 = 3$

$w_1 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ $\qquad$ $f_1 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

$u_2 = f_1(\sqrt[3]{2}-1) = 1$ $\qquad$ $l_2 = 3$

$v_2 = f_1(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2) = \sqrt[3]{2}+2$ $\qquad$ $m_2 = 3$

$w_2 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ $\qquad$ $f_2 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

$u_3 = f_2(\sqrt[3]{2}-1) = 1$

$v_3 = f_2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2) = \sqrt[3]{2}+2$

$w_3 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$

Weiter braucht man die Rechnung nicht fortzusetzen, da u_3, v_3, w_3 dieselben Grössen wie u_2, v_2, w_2 sind, und also auch alle folgenden, wenn $i \geqq 2$, dieselben Werthe

$$u_i = 1, \quad v_i = \sqrt[3]{2}+2, \quad w_i = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

erhalten. Schreibt man, um die unregelmässigen Anfangsglieder zu vermeiden, u_0, v_0, w_0 für u_2, v_2, w_2 und berechnet die ganzen Zahlen p_i, p'_i, etc., P_i, P'_i, etc. nach den gegebenen Regeln, indem man alle Quotienten l und m gleich 3 setzt, so erhält man

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i} = (\sqrt[3]{2}-1)^i = p_i + p'_i(\sqrt[3]{2}+2)+p''_i(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),$$

$$\frac{2+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i} = (\sqrt[3]{2}-1)^i(2+\sqrt[3]{2}) = q_i + q'_i(\sqrt[3]{2}+2)+q''_i(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1);$$

ferner

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i &= P_i + P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2)+P_{i+2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\\ (\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i(2+\sqrt[3]{2}) &= P'_i + P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2)+P'_{i+2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\\ (\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i &= P''_i + P''_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2)+P''_{i+2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1).\end{aligned}$$

Daraus, dass sich die Quotienten l und m nicht ändern, wenn man ihre Indices vermehrt, ergiebt sich zufolge der aus den Gleichungen (10*.) und (9*.) für $k=1$ abgeleiteten Formeln

$$P''_i = P_{i+1}, \quad P'_i = 3P_i + P_{i-1}, \quad p'_i = p_{i-1}, \quad p''_i = p_{i-2}.$$

Die vorstehenden Formeln geben ein leichtes Mittel, die Potenzen von $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ zu bilden, indem man sie unter der Form

$$P_i + P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2)+P_{i+2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1) = (\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i$$

darstellt, wo

$$P_0 = 1,\ P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_3 = 1,\ P_4 = 3,\ P_5 = 12,\ P_6 = 46,\ P_7 = 177,$$

und immer

$$P_{i+3} = 3(P_{i+2}+P_{i+1})+P_i.$$

Um dies zu prüfen setze man

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = x,$$

woraus

$$x\sqrt[3]{2} = x+1, \quad x^3 = 3x^2+3x+1$$

und daher auch

$$x^{i+3} = 3x^{i+2}+3x^{i+1}+x^i$$

folgt, woraus sich die angegebene recurrirende Bildungsweise von x_i ergiebt.

Unter derselben Form kann man nach dem Vorstehenden leicht auch die positiven Potenzen von $\sqrt[3]{2}-1$ darstellen. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= p_i+p_i'(\sqrt[3]{2}+2)+p_i''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)\\ &= p_i+p_{i-1}(\sqrt[3]{2}+2)+p_{i-2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\end{aligned}$$

wo

$$p_0=1,\ p_1=-3,\ p_2=6,\ p_3=-8,\ p_4=3,\ p_5=21,\ p_6=-80, \text{ etc.}$$

und immer

$$p_{i+3} = -3(p_{i+2}+p_{i+1})+p_i.$$

Auch dies folgt, wenn man

$$\sqrt[3]{2}-1 = y$$

setzt, aus den Gleichungen

$$y^3=-3y^2-3y+1, \quad y^{i+3}=-3y^{i+2}-3y^{i+1}+y^i.$$

Von p_6 an werden die Grössen p_i regelmässig das Zeichen wechseln und ihrem absoluten Werthe nach jede ungefähr das Dreifache der vorhergehenden, wie dies auch bei den Grössen P_i der Fall ist. Es wird demnach p_i immer absolut kleiner als P_{i+1}.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= p_i\ \ +p_i'(\sqrt[3]{2}+2)\ \ +p_i''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\\ (\sqrt[3]{2}-1)^{i-1} &= p_{i-1}+p_{i-1}'(\sqrt[3]{2}+2)+p_{i-1}''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)\end{aligned}$$

geben, wenn man die oben gefundenen Ausdrücke (20.) der Grössen P durch die Grössen p benutzt

$$\begin{aligned}p_i''(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-1}''(\sqrt[3]{2}-1)^i &= -P_{i+1}'+P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2),\\ p_i'(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-1}'(\sqrt[3]{2}-1)^i &= P_{i+1}''-P_{i+1}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\end{aligned}$$

oder da $p_i''=p_{i-2},\ p_i'=p_{i-1},\ P_{i+1}''=P_{i+2},\ P_{i+1}'=3P_{i+1}+P_i$,

$$\begin{aligned}p_{i-2}(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-3}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= -P_i\ \ +P_{i+1}(\sqrt[3]{2}-1),\\ p_{i-1}(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-2}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= P_{i+2}-P_{i+1}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1).\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen geben für $\sqrt[3]{2}-1=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ Näherungswerthe $\frac{P_i}{P_{i+1}}$, $\frac{P_{i+1}}{P_{i+2}}$. Diese Näherungswerthe werden nach einander

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{12},\ \tfrac{12}{46},\ \tfrac{46}{177},\ \tfrac{177}{681},\ \text{u. s. w.}$$

Der Näherungswerth $\frac{177}{681}$ beträgt 0,259912, während der wahre Werth 0,259921 ist.

Addirt man die beiden vorstehenden Gleichungen, so erhält man die Reihe der Näherungswerthe für $\sqrt[3]{4}$ durch die Formel

$$(p_{i-1}+p_{i-2})(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-(p_{i-2}+p_{i-3})(\sqrt[3]{2}-1)^{i}$$
$$= P_{i+2}-2P_{i+1}-P_{i+1}\sqrt[3]{4}-P_i = P_{i+1}+2P_i+P_{i-1}-P_{i+1}\sqrt[3]{4},$$

woraus annäherungsweise

$$\sqrt[3]{4} = \frac{P_{i+1}+2P_i+P_{i-1}}{P_{i+1}}, \quad \sqrt[3]{4}-1 = \frac{2P_i+P_{i-1}}{P_{i+1}}.$$

Setzt man $2P_i+P_{i-1} = Q_{i-1}$, so wird

$$Q_2 = 2, \quad Q_3 = 7, \quad Q_4 = 27, \quad Q_5 = 104, \quad Q_6 = 400, \quad \text{etc.}$$

und allgemein

$$Q_{i+3} = 2(Q_{i+2}+Q_{i+1})+Q_i.$$

Die successiven Näherungswerthe für $\sqrt[3]{4}-1$ werden

$$\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{7}{12}, \quad \tfrac{27}{46}, \quad \tfrac{104}{177}, \quad \tfrac{400}{681}, \quad \text{etc.}$$

Der Näherungswerth $\frac{400}{681}$ beträgt 0,58737 während der wahre Werth 0,58740 ist. Das Charakteristische dieser Annäherungen ist, dass die beiderlei Näherungswerthe für $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ Brüche *mit demselben Nenner* sind (cf. §. 6).

Zweites Beispiel.

Entwickelung von $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{9}$.

$$(\sqrt[3]{3} = 1{,}442, \ \sqrt[3]{9} = 2{,}080)$$

Wenn

$$v_i - l_i u_i = \alpha\sqrt[3]{9}+\beta\sqrt[3]{3}+\gamma,$$
$$f_i = \alpha'\sqrt[3]{9}+\beta'\sqrt[3]{3}+\gamma',$$

so wird nach §. 7,

$$g_i\alpha' = \beta^2-\alpha\gamma, \quad g_i\beta' = 3\alpha^2-\beta\gamma, \quad g_i\gamma' = \gamma^2-3\alpha\beta,$$

wo g_i der gemeinschaftliche Theiler der drei rechter Hand befindlichen Zahlen ist; ferner

$$k_i u_{i+1} = f_i(v_i-l_i u_i) = 3(\beta\alpha'+\alpha\beta')+\gamma\gamma',$$
$$k_i v_{i+1} = f_i(w_i-m_i u_i),$$
$$k_i w_{i+1} = f_i u_i,$$

wo k_i eine Zahl ist, die alle Ausdrücke rechter Hand theilt.

Man setze $\sqrt[3]{3} = x$.

$$\begin{array}{lll}
u_0 = 1 & l_0 = 1 & g_0 = 1 \\
v_0 = x & m_0 = 2 & k_0 = 1 \\
w_0 = x^2 & f_0 = x^2+x+1 & \\
\\
u_1 = 2 & l_1 = 0 & g_1 = 2 \\
v_1 = f_0(x^2-2) = -x^2+x+1 & m_1 = 2 & k_1 = 2 \\
w_1 = x^2+x+1 & f_1 = x^2+x+2 & \\
\\
u_2 = 1 & l_2 = 1 & g_2 = 1 \\
v_2 = \frac{1}{2} f_1(x^2+x-3) = x & m_2 = 5 & k_2 = 1 \\
w_2 = x^2+x+2 & f_2 = x^2+x+1 & \\
\\
u_3 = 2 & l_3 = 1 & g_3 = 2 \\
v_3 = f_2(x^2+x-3) = -x^2+x+3 & m_3 = 2 & k_3 = 2 \\
w_3 = x^2+x+1 & f_3 = x^2+x+2 &
\end{array}$$

$$u_4 = u_2, \quad v_4 = v_2, \quad w_4 = w_2,$$

so dass man hier aufhören kann.

Wenn man, um wieder die nicht zur Periode gehörigen Anfangsglieder zu vermeiden, von den Grössen

$$u_0 = 1, \quad v_0 = x, \quad w_0 = x^2+x+2$$

ausgeht, wodurch alle unteren Indices um 2 verringert werden müssen, so hat man

$$\begin{array}{llll}
u_{2i} = u_0 = 1 & v_{2i} = v_0 = x & w_{2i} = w_0 = x^2+x+2 & \\
u_{2i+1} = u_1 = 2 & v_{2i+1} = v_1 = -x^2+x+3 & w_{2i+1} = w_1 = x^2+x+1 & \\
f_{2i} = f_0 = x^2+x+1 & l_{2i} = l_0 = 1 & m_{2i} = m_0 = 5 & k_{2i} = k_0 = 1 \\
f_{2i+1} = f_1 = x^2+x+2 & l_{2i+1} = l_1 = 1 & m_{2i+1} = m_1 = 2 & k_{2i+1} = k_1 = 2
\end{array}$$

$$F_2 = \frac{f_0 f_1}{2} = 2x^2+3x+4 \qquad F_{2i} = F_0^i \qquad F_{2i+1} = F_0^i f_0,$$

ferner

$$\begin{array}{ll}
P_{2i+3} = 5P_{2i+2} + P_{2i+1} + P_{2i} & p_{2i+3} = -p_{2i+2} - 2p_{2i+1} + p_{2i} \\
P_{2i+4} = 2P_{2i+3} + P_{2i+2} + P_{2i+1} & p_{2i+4} = -p_{2i+3} - 5p_{2i+2} + p_{2i+1}
\end{array}$$

$$q_{2i+1} = p_{2i-1} - 5p_{2i} = p_{2i+2} + p_{2i+1}$$
$$q_{2i+2} = p_{2i} - 2p_{2i+1} = p_{2i+3} + p_{2i+2},$$

in welchen Gleichungen man sämmtlichen Grössen auch einen oder zwei Accente geben kann. Aus (24.) folgt, dass die mit demselben Nenner behafteten Brüche

$$\frac{P'_{i+2}}{P_{i+2}},\quad \frac{P''_{i+2}}{P_{i+2}}$$

Näherungswerthe der Grössen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ oder der Grössen x und x^2+x+2 sind. Die Anfangswerthe der Grössen P und p sind

$$\begin{array}{lllll}
P_0 = 0 & P_1 = 0 & P_2 = 0 & P_3 = 1 & P_4 = 2 \\
P'_0 = 0 & P'_1 = 1 & P'_2 = 0 & P'_3 = 1 & P'_4 = 3 \\
P''_0 = 0 & P''_1 = 0 & P''_2 = 1 & P''_3 = 5 & P''_4 = 11
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
p_0 = 1 & p_1 = -1 & p_2 = -4 & p_3 = 7 & p_4 = 12 \\
p'_0 = 0 & p'_1 = 1 & p'_2 = -1 & p'_3 = -1 & p'_4 = 7 \\
p''_0 = 0 & p''_1 = 0 & p''_2 = 1 & p''_3 = -1 & p''_4 = -4.
\end{array}$$

Man kann auf folgende Art die Grössen p'_i und p''_i auf p_i, und die Grössen P'_i und P''_i auf P_i zurückführen, und eine recurrirende Gleichung zwischen vier Grössen P erhalten, welche die Indices i, $i+2$, $i+4$, $i+6$ haben.

Aus den Formeln (9*.) in §. 5 ergeben sich für $k=1$ die allgemeinen Formeln

$$p_i = -l_0(p_{i-1})_1 - m_0(p'_{i-1})_1 + (p''_{i-1})_1$$
$$p'_i = (p_{i-1})_1 \qquad p''_i = (p'_{i-1})_1.$$

Zu diesen Gleichungen muss man die folgenden hinzufügen, welche sich aus ihnen ergeben, wenn man die Indices der Quotienten um 1 vermehrt,

$$(p_i)_1 = -l_1(p_{i-1})_2 - m_1(p'_{i-1})_2 + (p''_{i-1})_2$$
$$(p'_i)_1 = (p_{i-1})_2 \qquad (p''_i)_1 = (p'_{i-1})_2.$$

Für unsern Fall geben diese Gleichungen

$$p_i = -(p_{i-1})_1 - 5(p'_{i-1})_1 + (p''_{i-1})_1 = -p'_i - 5p_{i-2} + p'_{i-2}$$
$$(p_i)_1 = p'_{i+1} = -p_{i-1} - 2p'_{i-1} + p''_{i-1} \qquad p''_i = p_{i-2}.$$

Es folgen hieraus, wenn man in dem Ausdruck von p'_{i+1} den Index i um 1 erniedrigt und p_{i-4} für p''_{i-2} substituirt, zwischen den Grössen p und p' die beiden Gleichungen

$$-p'_i + p'_{i-2} = p_i + 5p_{i-2}$$
$$p'_i + 2p'_{i-2} = -p_{i-2} + p_{i-4},$$

und hieraus

$$3p'_i = -2p_i - 11p_{i-2} + p_{i-4}$$
$$3p'_{i-2} = p_i + 4p_{i-2} + p_{i-4}$$

oder

$$3p'_{i+4} = -2p_{i+4} - 11p_{i+2} + p_i = p_{i+6} + 4p_{i+4} + p_{i+2}$$
$$p_{i+6} = -6(p_{i+4} + 2p_{i+2}) + p_i.$$

In der letzteren Gleichung kann man auch p' oder p'' für p setzen, und sieht hieraus, dass

$$p_{2i},\quad p'_{2i},\quad p''_{2i},\quad p_{2i+1},\quad p'_{2i+1},\quad p''_{2i+1}$$

die Coefficienten der allgemeinen Glieder in der Entwickelung von Brüchen werden, welche den Nenner

$$(1+2z)^3 - 9z^3$$

haben.

Auf ähnliche Art leitet man aus (10*.) die folgenden Gleichungen ab:

$$(P_i) = (P''_{i-1})_1,\qquad P'_i = (P_{i-1})_1 + l_0(P''_{i-1})_1,\qquad P''_i = (P'_{i-1})_1 + m_0(P''_{i-1})_1,$$
$$(P_i)_1 = P''_{i-1}\qquad (P'_i)_1 = P_{i-1} + l_1 P''_{i-1},\qquad (P''_i)_1 = P'_{i-1} + m_1 P''_{i-1},$$

aus welchen

$$P'_i = P''_{i-2} + P_i,\quad P''_i = P_{i-2} + P''_{i-2} + 5P_i,\quad P_{i+1} = P'_{i-1} + 2P''_{i-1}$$

folgt. Die letzte dieser Gleichungen giebt

$$P_{i+1} = P''_{i-3} + P_{i-1} + 2P''_{i-1}.$$

Setzt man hierin $i+1$ für i, so hat man zwischen den Grössen P und P'' die beiden Gleichungen

$$P''_i - P''_{i-2} = P_{i-2} + 5P_i,\qquad 2P''_i + P''_{i-2} = P_{i+2} - P_i,$$

aus welchen

$$3P''_i = P_{i+2} + 4P_i + P_{i-2},\qquad 3P''_{i-2} = P_{i+2} - 11P_i - 2P_{i-2}$$

und daher

$$3P''_{i+2} = \quad P_{i+4} + 4P_{i+2} + P_i = P_{i+6} - 11P_{i+4} - 2P_{i+2}$$
$$3P'_{i+4} = \quad 4P_{i+4} + 4P_{i+2} + P_i = P_{i+6} - \ 8P_{i+4} - 2P_{i+2}$$
$$P_{i+6} = 12P_{i+4} + 6P_{i+2} + P_i$$

hervorgeht. In der letzten Gleichung kann auch P', P'' für P gesetzt werden. Man sieht aus derselben, dass die recurrirenden Reihen, deren allgemeine Glieder

$$P_{2i},\quad P'_{2i},\quad P''_{2i},\quad P_{2i+1},\quad P'_{2i+1},\quad P''_{2i+1}$$

sind, aus der Entwickelung von Brüchen hervorgehen, welche den Nenner

$$9-(2+y)^3$$

haben, der aus dem vorigen erhalten wird, wenn man $z = \frac{1}{y}$ setzt und mit $-y^3$ multiplicirt.

Die oben aufgestellte allgemeine Theorie ergiebt durch einige leicht anzustellende Betrachtungen, dass diese Nenner jedesmal die resp. mit $-z^3$, $-y^3$ *multiplicirten Determinanten der Grössen*

$$\begin{matrix} p_i-\frac{1}{z} & p'_i & p''_i \\ q_i & q_i-\frac{1}{z} & q''_i \\ p_{i-1} & p'_{i-1} & p''_{i-1}-\frac{1}{z} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} P_i-\frac{1}{y} & P_{i+1} & P_{i+2} \\ P'_i & P'_{i+1}-\frac{1}{y} & P'_{i+2} \\ P''_i & P''_{i+1} & P''_{i+2}-\frac{1}{y} \end{matrix}$$

werden, wenn i *der Index der Periode oder*

$$u_i = u_0, \quad v_i = v_0, \quad w_i = w_0$$

ist. Für unser Beispiel werden diese Determinanten

$$\begin{matrix} -\left(4+\frac{1}{z}\right) & -1 & 1 \\ 3 & -\left(2+\frac{1}{z}\right) & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{z} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -\frac{1}{y} & 1 & 2 \\ 0 & 1-\frac{1}{y} & 3 \\ 1 & 5 & 11-\frac{1}{y}, \end{matrix}$$

und ihre resp. mit $-z^3$, $-y^3$ multiplicirten Ausdrücke geben in der That die im Vorhergehenden gefundenen Nenner.

Ich will noch bemerken, dass man, *wenn* i *grade ist,* die Gleichungen

$$-p'_i+p'_{i-2} = p_i+5p_{i-2} = p_{i-3}-p_{i-1},$$
$$P''_i-P''_{i-2} = P_{i-2}+5P_i = P_{i+1}-P_{i-1}$$

hat, aus denen, da

$$p_1 = p'_2 = -1, \quad P''_0 = P_1 = 0$$

ist, allgemein $p'_i = p_{i-1}$, $P''_i = P_{i-1}$, oder wenn man $2i$ für i setzt

$$p'_{2i} = p_{2i-1}, \quad P''_{2i} = P_{2i-1}$$

folgt.

Der complexe Ausdruck

$$F_2 = 2\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4,$$

hat zufolge des oben gegebenen allgemeinen Satzes, wie man leicht prüft, die Einheit zur *Norm*. Der inverse Werth derselben wird durch die Formel

$$\frac{1}{F_2} = \frac{k_0 k_1}{f_0 f_1} = \frac{(v_0-l_0 u_0)(v_1-l_1 u_1)}{u_0 u_1},$$
$$= \frac{(\sqrt[3]{3}-1)(-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}{2} = \sqrt[3]{9}-2$$

gegeben. Setzt man denselben $= y$, so wird

$$9-(2+y)^3 = 0,$$

wo der Ausdruck links der ...
die recurrirenden Reihen hervor...
P_i, P_{i+1}, P'_i, etc. sind.

Drit... ...igenschaften der Klasse
...elcher das *Fourier*sche
Entwickel... ...ehört.

($\sqrt[3]{5} = 1,7$ ... Heidelberg.)

Man setze $\sqrt[3]{5} = x$.

$u_0 = 1$ $\quad l$...
$v_0 = x$ $\quad m$...
$w_0 = x^2$ $\quad f_0$...
$f_0(x-1) = 4$ $\quad f_0$...
$u_1 = 4$ $\quad l_1 =$...
$v_1 = -x^2+3x+3$ $\quad m_1 =$...
$w_1 = x_2+x+1$ $\quad f_1 = x$...
$f_1(-x^2+3x-1) = 8$ $\quad f_1(x^2+x-$...

$u_2 = 2$ $\quad l_2 = 1$ $\quad g_2 = 1$
$v_2 = x+1$ $\quad m_2 = 3$ $\quad k_2 = 2$
$w_2 = x^2+x+2$ $\quad f_2 = x^2+x+1$
$f_2(x-1) = 4$ $\quad f_2(x^2+x-4) = -2x^2+2x+6$

$u_3 = 2$ $\quad l_3 = 0$ $\quad g_3 = 2$
$v_3 = -x^2+x+3$ $\quad m_3 = 2$ $\quad k_3 = 2$
$w_3 = x^2+x+1$ $\quad f_3 = 2x^2+x+7$
$f_3(-x^2+x+3) = 26$ $\quad f_3(x^2+x-3) = 2x^2+14x-6$

$u_4 = 13$ $\quad l_4 = 0$ $\quad g_4 = 26$
$v_4 = x^2+7x-3$ $\quad m_4 = 1$ $\quad k_4 = 13$
$w_4 = 2x^2+x+7$ $\quad f_4 = 2x^2+x-1$
$f_4(x^2+7x-3) = 78$ $\quad f_4(2x^2+x-6) = -13x^2+13x+26$

$u_5 = 6$ $\quad l_5 = 0$ $\quad g_5 = 3$
$v_5 = -x^2+x+2$ $\quad m_5 = 1$ $\quad k_5 = 6$
$w_5 = 2x^2+x-1$ $\quad f_5 = x^2+x+3$
$f_5(-x^2+x+2) = 6$ $\quad f_5(2x^2+x-7) = 6x+6$

$u_6 = 1$ $\quad l_6 = 2$ $\quad g_6 = 1$
$v_6 = x+1$ $\quad m_6 = 7$ $\quad k_6 = 1$
$w_6 = x^2+x+3$ $\quad f_6 = x^2+x+1 = f_0$
$f_6(x-1) = 4$ $\quad f_6(x^2+x-4) = -2x^2+2x+6$

$u_7 = 4$	$l_7 = 0$	$g_7 = 8$
$v_7 = -2x^2+2x+6$	$m_7 = 1$	$k_7 = 2$
$w_7 = x^2+x+1$	$f_7 = 2x^2+x+7 = f_3$	
$f_7(-2x^2+2x+6) = 52$	$f_7(x^2+x-3) = 2x^2+14x-6$	
$u_8 = 26$	$l_8 = 0$	$g_8 = 26$
$v_8 = x^2+7x-3$	$m_8 = 1$	$k_8 = 26$
$w_8 = 4x^2+2x+14$	$f_8 = 2x^2+x-1 = f_4$	
$f_8(x^2+7x-3) = 78$	$f_8(4x^2+2x-12) = -26x^2+26x+52$	
$u_9 = 3$	$l_9 = 0$	$g_9 = 3$
$v_9 = -x^2+x+2$	$m_9 = 2$	$k_9 = 3$
$w_9 = 2x^2+x-1$	$f_9 = x^2+x+3 = f_5$	
$f_9(-x^2+x+2) = 6$	$f_9(2x^2+x-7) = 6x+6$	
$u_{10} = 2$	$l_{10} = 2$	$g_{10} = 4$
$v_{10} = 2x+2$	$m_{10} = 3$	$k_{10} = 1$
$w_{10} = x^2+x+3$	$f_{10} = x^2+x+1 = f_6$	
$f_{10}(2x-2) = 8$	$f_{10}(x^2+x-3) = -x^2+3x+7$	
$u_{11} = 8$	$l_{11} = 1$	$g_{11} = 8$
$v_{11} = -x^2+3x+7$	$m_{11} = 1$	$k_{11} = 8$
$w_{11} = 2x^2+2x+2$	$f_{11} = x^2+x+2 = f_1$	
$f_{11}(-x^2+3x-1) = 8$	$f_{11}(2x^2+2x-6) = 8x+8$	
$u_{12} = 1$	$l_{12} = 2$	$g_{12} = 1$
$v_{12} = x+1$	$m_{12} = 6$	$k_{12} = 1$
$w_{12} = x^2+x+2$	$f_{12} = x^2+x+1 = f_6$	
$f_{12}(x-1) = 4$	$f_{12}(x^2+x-4) = -2x^2+2x+6$	
$u_{13} = 4$		
$v_{13} = -2x^2+2x+6$		
$w_{13} = x^2+x+1$		

Da nun

$$u_{13} = u_7, \quad v_{13} = v_7, \quad w_{13} = w_7,$$

so beginnt an dieser Stelle die Periode, und die Rechnung kann demnach hier abgebrochen werden.

Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das *Fourier*sche Doppelintegral gehört.

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Heidelberg.)

Einleitung.

Die *Fourier*sche Formel

$$(1.)\qquad \pi f(\xi) = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(y(x-\xi)) f(x)$$

gehört zu einer grösseren Klasse von Doppelintegralen, deren wahre Natur zu entwickeln vornehmlich deshalb von Interesse ist, weil diese Integrale als Grenzfälle der Auflösungen linearer partieller Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielen.

Der besondere analytische Charakter des *Fourier*schen Doppelintegrals, auf welchem seine Eigenschaft, gesetzlose Functionen darzustellen, beruht, erscheint indessen in obiger Form, hauptsächlich durch die unendlichen Grenzen, etwas verhüllt. Durch eine naheliegende Umformung können wir alsbald die Fundamentaleigenschaft des *Fourier*schen Doppelintegrals hervortreten lassen.

Wir setzen $\xi = 0$ und für einen Augenblick auch $f(x) = 0$ ausserhalb des Intervalls $x = a \dots x = b$. Ist der Werth $x = 0$ *nicht* in diesem Intervall gelegen, so folgt:

$$(2.)\qquad 0 = \int_0^\infty dy \int_a^b dx \cos(xy) f(x).$$

Diese Formel gilt aber auch, wenn wir die über $f(x)$ gemachte Voraussetzung, dass diese Function ausserhalb des Intervalls $a \dots b$ gleich Null sei, fallen lassen, und sie uns vielmehr von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ beliebig gegeben denken. Denn eine beliebig gegebene Strecke einer gesetzlosen Function enthält keine Bestimmung für deren übrigen Verlauf, und in dem Integral (2.) sind nur die in dem Intervall $a \dots b$ stattfindenden Werthe der Function $f(x)$ vertreten, so dass wir über ihren übrigen Verlauf nach Willkür verfügen können.

Die Formel (2.) drückt die erste Grundeigenschaft des *Fourier*schen Integrals aus. Die andere Eigenschaft erhält man so. Wir denken uns in (1.) $\xi = 0$, und wieder für einen Augenblick $f(x) = 0$ ausserhalb des Intervalls $x = -a \dots x = +a$, wodurch wir erhalten:

$$\pi f(0) = \int_0^\infty dy \int_{-a}^{+a} dx \cos(xy) f(x).$$

Nun nehmen wir an $f(x) = f(-x)$. Daraus folgt:

$$\int_0^\infty dy \int_{-a}^{+a} dx \cos(xy) f(x) = 2\int_0^\infty dy \int_0^a dx \cos(xy) f(x) = \pi f(0)$$

oder

$$(3.) \qquad \frac{\pi}{2} f(0) = \int_0^\infty dy \int_0^a dx \cos(xy) f(x).$$

Auch in dieser Formel geben wir die Voraussetzungen über $f(x)$, die zu ihr führten, auf, und denken uns $f(x)$ im ganzen Intervall $x = -\infty \dots x = +\infty$ beliebig gegeben.

Die Formel (2.) kann als eine Folge von Formel (3.) angesehen werden. In beiden Formeln sind a und b beliebige positive Grössen, und man kann sich sowohl a als $b-a$ kleiner denken als jede noch so kleine gegebene Grösse.

Dass die Formeln (2.) und (3.) mit der *Fourier*schen Formel (1.) vollkommen äquivalent sind, wird dadurch erwiesen, dass man, ähnlich wie wir eben von (1.) zu (3.) gelangten, von (3.) zu (1.) zurückgelangen kann. Setzen wir in (3.) unter dem Integralzeichen $-x$ statt x, kehren die Grenzen um und bezeichnen mit $f_1(x)$ die willkürliche Function $f(-x)$, so finden wir:

$$\frac{\pi}{2} f_1(0) = \int_0^\infty dy \int_{-a}^{0} dx \cos(xy) f_1(x).$$

Diese Gleichung addiren wir zu $\frac{\pi}{2} f_1(0) = \int_0^\infty dy \int_0^b dx \cos(xy) f_1(x)$. Dann schreiben wir $F(x+\xi)$ statt $f_1(x)$ und führen unter dem Integralzeichen das neue Argument $\beta = x+\xi$ für x ein. Dadurch gehen die Grenzen $-a$ und b für die Integration nach x in die Grenzen $\xi - a$ und $\xi + b$ für die Integration nach β über. Darauf lassen wir a und b so wachsen, dass für alle Werthe von ξ die Grenzen $\xi - a$ und $\xi + b$ resp. $-\infty$ und $+\infty$ werden. Die dann erhaltene Formel ist mit (1.) identisch.

Seine Formel (1.) erhielt *Fourier* durch einen merkwürdigen Grenz-

übergang, dem er die Sinus-Cosinus-Reihe unterwarf. Diesen Grenzübergang selbst als unbedenklich angesehen, setzt die strenge Ableitung der Formel (1.) den Convergenzbeweis der Sinus-Cosinus-Reihe voraus. Das ist ein Umweg, welchen man vermeiden kann, indem man mit Hülfe des bekannten *Dirichlet*schen Beweisverfahrens die mit (1.) äquivalente Formel (3.) direct beweist.

Denn es ist:

$$\int_0^x dy \int_0^a dx \cos(xy) f(x) = \lim_{h=\infty} \int_0^h dy \int_0^a dx \cos(xy) f(x) = \lim_{h=\infty} \int_0^a \frac{\sin hx}{x} f(x)\, dx.$$

Für die Summe der n ersten Gliederpaare der Sinus-Cosinus-Reihe fand *Dirichlet* den Ausdruck:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta) \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} d\beta,$$

dessen Werthbestimmung für $n = \infty$ leicht auf diejenige des Integrals

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a \frac{\sin hx}{\sin x} f(x)\, dx$$

(h eine *ungerade* Zahl) zurückgeführt werden kann. Von diesem Integral bewies er, dass es für $a < \pi$ gegen $\frac{\pi}{2} f(0)$ convergirt, und fügte dieser Werthbestimmung später das Resultat hinzu *), dass für $a > \pi$ der Grenzwerth vorstehenden Integrals $\pi(\frac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \cdots + f(l\pi))$ ist, wo $l\pi$ das grösste in a enthaltene Vielfache von π bedeutet. Wächst h wie eine *gerade* Zahl, so ist der Grenzwerth des Integrals ein anderer, und wächst h nicht wie eine *ganze* Zahl, so hat das Integral keinen bestimmten Grenzwerth.

Das *Dirichlet*sche Raisonnement lässt sich nun sofort vom Integral $\int_0^a \frac{\sin hx}{\sin x} f(x)\, dx$ auf das Integral $\int_0^a \frac{\sin hx}{x} f(x)\, dx$ übertragen, und zwar im Uebrigen ganz unverändert, nur dass es bei dem letzteren Integral gleichgültig ist, wie gross wir a annehmen, und in welcher Weise h unendlich wird, ob als ganze Zahl oder irrationale Werthe durchlaufend. Das Integral nimmt für $h = \infty$ und alle positiven reellen Werthe von a den Werth $\frac{\pi}{2} f(0)$ an. Ist dies einmal bewiesen, so gelangt man, indem man die angegebenen Umformungen rückwärts ausführt, auf dem kürzesten und directesten Wege zu Formel (1.).

---

*) Siehe Bd. 17, p. 60 dieses Journals.

Indessen knüpfen sich an diesen directen Weg, das *Fourier*sche Theorem herzuleiten, naturgemäss weitere Ueberlegungen.

Der auffallende Umstand, dass der Werth der Integrale

$$\int_0^a \frac{\sin hx}{x} f(x)\,dx, \qquad \int_0^a \frac{\sin hx}{\sin x} f(x)\,dx$$

an der Grenze $h = \infty$ nur von dem Werthe von $f(x)$ für $x = 0$ abhängt, steht, dies leuchtet auf den ersten Blick ein, damit in enger Beziehung, dass die Integrale

$$\int_0^a \frac{\sin hx}{x}\,dx, \qquad \int_0^a \frac{\sin hx}{\sin x}\,dx$$

an der Grenze $h = \infty$ *von a unabhängige, endliche Werthe* haben. Sie werden, a mag noch so klein sein, gleich $\frac{\pi}{2}$. Denn würden die letzteren Integrale von a abhängen, also Theile von ihnen wie $\int_a^{a+\Delta} \frac{\sin hx}{x}\,dx$, etc. für $h = \infty$ nicht verschwinden, so kann man geradezu mit Hülfe von Mittelwerthsätzen beweisen, dass die ersteren Integrale im allgemeinen auch nicht von den im Intervall $0 \ldots a$ stattfindenden Werthen von $f(x)$ unabhängig werden könnten. Wenn wir nun so die eigentliche Grundlage der Sätze von *Fourier* und *Dirichlet* richtig erkannt haben, so liegen zwei weitere Fragen sehr nahe. Giebt es noch andere Integrale $\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x,y)$, die einen von a unabhängigen, von Null verschiedenen, endlichen Werth haben? Und findet bei ihnen dann ebenfalls die Gleichung:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, f(x)\,\varphi(x,y) = f(0) \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x,y)$$

statt? Der Beantwortung dieser Fragen, denen sich folgerichtig andere anschlossen, ist nachstehende Abhandlung gewidmet.

Die Eigenschaft von Doppelintegralen der Form $\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x,y)$, von a unabhängig zu werden, erwies sich als eine sehr verbreitete und es war leicht, sie auf Functionaleigenschaften des unbestimmten Integrals zurückzuführen. Der Beweis des wichtigsten Satzes der Theorie:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, f(x)\,\varphi(x,y) = f(0) \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x,y)$$

wurde nicht am Doppelintegral geführt, sondern, $\int\limits_0^h \varphi(x, y)\,dy = \Phi(x, h)$ gesetzt, wurde die Gleichung

$$\lim_{h=\infty} \int\limits_0^a \Phi(x, h) f(x)\,dx = f(0) \lim_{h=\infty} \int\limits_0^a \Phi(x, h)\,dx$$

bewiesen. Was diesen Beweis betrifft, so ist zu bemerken, dass er sich auf ganz andere Eigenschaften der in Rede stehenden Integrale stützen musste, als *Dirichlet*'s Beweis der Gleichung $\lim_{h=\infty} \int\limits_0^a f(x) \frac{\sin hx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} f(0)$, dem der Vortheil zu Grunde liegt, dass sich das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin hx}{\sin x}\,dx$ leicht in eine Reihe alternirender abnehmender Theile zerlegen lässt. Der in §. 3. und §. 4. gegebene Beweis stützt sich wesentlich auf die Fundamentaleigenschaft des Integrals

$$\int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^a dx\, \varphi(x, y) = \lim_{h=\infty} \int\limits_0^a \Phi(x, h)\,dx$$

von a unabhängig zu sein. Durch ganz ähnliche Schlüsse gelang es dann noch den Werth des Integrals

$$\int\limits_0^\infty dy \int\limits_a^b dx\, f(x)\, \varphi(\lambda(x), y),$$

wo $f(x)$ und $\lambda(x)$ gesetzlose Functionen sein dürfen, zwischen beliebigen Grenzen a und b anzugeben. Da endlich die merkwürdigen Eigenschaften der in Rede stehenden Doppelintegrale darauf schliessen lassen, dass die Convergenz der Volumina unter den Oberflächen $z = \varphi(x,y)$ ebenfalls besonderer Art sei, so wird, um den Gegenstand nach jeder Richtung möglichst klar zu legen, im letzten Abschnitt der nachstehenden Abhandlung die Convergenz des Volums $\int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^a dx\, \varphi(xy)$, wo φ also nur vom Product xy abhängt, vollständig discutirt, wozu die Werthbestimmung des Integrals $\int\limits_0^\infty dy \int\limits_a^b dx\, \varphi(\lambda(x), y)$ im III. Abschnitt die Mittel bietet.

Der Kürze wegen, und da die zu betrachtenden Integrale ziemlich zahlreiche Klassen bilden, habe ich keinen Anstand genommen, folgende neue

Benennungen einzuführen. Ein Integral der Form:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x, y)$$

nenne ich *Fouriersches Doppelintegral,* wenn es einen von $a > 0$ unabhängigen, von Null verschiedenen endlichen Werth hat und ausserdem die Reihenfolge, in welcher die bestimmten Grenzen in's unbestimmte Integral eingeführt werden, eine gewisse in §. 1 angegebene ist; und ich nenne *Dirichletsches Integral* ein Integral der Form:

$$\int_0^a \Phi(x, h)\, dx,$$

wenn es, mit in's Unbegrenzte wachsendem h, gegen eine gleichfalls von $a > 0$ unabhängige, von Null verschiedene, endliche Grenze convergirt.

Endlich soll mit $\lim_{x=\alpha} \lim_{y=\beta} f(x,y)$ der Werth bezeichnet werden, den man erhält, wenn in $f(x,y)$ erst $y = \beta$ dann $x = \alpha$ gesetzt wird, und mit „lim" schlechtweg bezeichne ich den besonders häufig vorkommenden Grenzübergang $h = \infty$.

I.

§. 1. Die *Fourier*schen Doppelintegrale. Ihre Definition vom unbestimmten Integral aus.

Wenn man unter einem bestimmten einfachen Integral $\int_{X_0}^{X_1} \varphi(x)\, dx$, wo X_0 und X_1 numerische Werthe bedeuten, das Ergebniss versteht, welches aus dem unbestimmten Integral $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, dx = F(x_1) - F(x_0)$ folgt, sobald darin für die *Variabeln* x_0 und x_1 die *Zahlen* X_0 und X_1 gesetzt werden: so muss man, um in der Analogie zu bleiben, unter dem bestimmten Doppelintegral:

$$\int_{X_0}^{X_1}\int_{Y_0}^{Y_1} dx\, dy\, \varphi(x, y)$$

das Resultat verstehen, welches man aus dem unbestimmten Doppelintegral:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dx\, dy\, \varphi(x,y) = F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) - F(x_0, y_1) + F(x_0, y_0),$$

wo $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \varphi(x,y)$, erhält, wenn an Stelle der variabeln Grössen x_0, y_0,

x_1, y_1 die numerischen Werthe X_0, Y_0, X_1, Y_1 gesetzt werden. Dann ist aber das bestimmte Doppelintegral häufig ein mehrdeutiger Ausdruck, und zwar repräsentirt er, beiläufig gesagt, im äussersten Falle nicht weniger als 14 verschiedene Werthe.

Diese Mehrdeutigkeit rührt daher, dass es viele Functionen $F(x, y)$ giebt, die für einzelne Werthesysteme der Variabeln x, y verschiedene Werthe annehmen, je nach der Reihenfolge, in welcher man den Variabeln x, y die jenen Systemen entsprechenden Werthe ertheilt. Um ein ganz einfaches Beispiel anzuführen, nimmt

$$\frac{a(x-\alpha)+b(y-\beta)}{a_1(x-\alpha)+b_1(y-\beta)}$$

für $x=\alpha$, $y=\beta$ den Werth $\frac{b}{b_1}$ oder den Werth $\frac{a}{a_1}$ an, jenachdem man erst $x=\alpha$, dann $y=\beta$, oder erst $y=\beta$, dann $x=\alpha$ setzt. Bezeichnet man nun mit $F(x, y)$ die Summe von vier ähnlichen Ausdrücken, in denen successive statt α, β steht: 0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1, setzt man also:

$$F(x, y) = \frac{ax+by}{a_1x+b_1y}+\frac{a'x+b'(y-1)}{a'_1x+b'_1(y-1)}+\frac{a''(x-1)+b''y}{a''_1(x-1)+b''_1y}+\frac{a'''(x-1)+b'''(y-1)}{a'''_1(x-1)+b'''_1(y-1)}$$

und bildet das Aggregat $F(x_1, y_1)-F(x_1, y_0)-F(x_0, y_1)+F(x_0, y_0)$, so hat dies, wie man sich unschwer überzeugt, die Beschaffenheit, dass es je nach der Reihenfolge, in der $x_0=X_0=0$, $y_0=Y_0=0$, $x_1=X_1=1$, $y_1=Y_1=1$ gesetzt werden, *vierzehn* verschiedene Werthe annimmt.

Das bestimmte Doppelintegral büsst viel an seiner Mehrdeutigkeit ein, wenn es nicht ganz bestimmt ist, sondern wenn z. B. *eine* Grenze variabel gelassen wird. Diese variable Grenze sei x_1, dann ist das (zum Theil) bestimmte Doppelintegral

$$\int_{X_0}^{x_1}\int_{Y_0}^{Y_1} dx\, dy\, \varphi(x, y)$$

im obigen Sinne nur noch *vierdeutig*, und zwar ist es folgender vier Werthe fähig:

$$(4.)\quad \begin{cases} \lim_{y_1=Y_1}\lim_{y_0=Y_0}\lim_{x_0=X_0} A \\ \lim_{y_0=Y_0}\lim_{x_0=X_0}\lim_{y_1=Y_1} A \\ \lim_{x_0=X_0}\lim_{y_0=Y_0}\lim_{y_1=Y_1} A \\ \lim_{y_1=Y_1}\lim_{x_0=X_0}\lim_{y_0=Y_0} A, \end{cases}$$

wo A das Aggregat $F(x_1, y_1)-F(x_1, y_0)-F(x_0, y_1)+F(x_0, y_0)$ vorstellt.

Im *Fourier*schen Doppelintegral $\int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^a dx\, \varphi(x, y)$ ist a variabel, mithin repräsentirt es zunächst vier Werthe, und es ist unsere Aufgabe festzustellen, welcher von den vier Werthen darunter zu verstehen sei. Die unendlich zu setzende obere Grenze der Integration nach y werde ich nicht mit y_1, sondern im Anschluss an andere Untersuchungen mit h bezeichnen.

Die Definition des *Fourier*schen Integrals verlangt zuvörderst, dass das Aggregat:

$$F(a, h) - F(a, y_0) - F(x_0, h) + F(x_0, y_0) = \int\limits_{y_0}^{h} dy \int\limits_{x_0}^{a} dx\, \varphi(x, y),$$

wenn darin $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = \infty$ gesetzt wird, ***einen von a unabhängigen, von Null und Unendlich verschiedenen Werth*** erhalte. Es muss also

$$F(a, \infty) - F(a, 0)$$

von a unabhängig sein. Würde man nun in $-F(x_0, h) + F(x_0, y_0)$ erst $h = \infty$, $y_0 = 0$ setzen und dann der veränderlichen Grösse x_0 ihren festen Werth 0 ertheilen, so müsste man offenbar den negativen Werth von $F(a, \infty) - F(a, 0)$ erhalten, da diese letztere Differenz von a unabhängig ist und $-F(x_0, \infty) + F(x_0, 0)$ daher auch von x_0 unabhängig sein muss. Das ganze Aggregat

$$F(a, h) - F(a, y_0) - F(x_0, h) + F(x_0, y_0)$$

würde also verschwinden, wenn man erst $h = \infty$, $y_0 = 0$, dann $x_0 = 0$ setzte. Die Grösse $F(a, \infty) - F(a, 0)$ als von a unabhängig angenommen, wird das Aggregat für $h = \infty$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ nicht verschwinden, wenn entweder 1) zuerst $x_0 = 0$ und dann in beliebiger Reihenfolge $y_0 = 0$, $h = \infty$ gesetzt wird, und wenn zugleich die Function $F(x, y)$ derart ist, dass

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x_0=0} F(x_0, h) \text{ \textit{nicht} gleich } \lim_{x_0=0} \lim_{h=\infty} F(x_0, h),$$

oder

$$\lim_{y_0=0} \lim_{x_0=0} F(x_0, y_0) \text{ \textit{nicht} gleich } \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} F(x_0, y_0),$$

oder dass beide Verschiedenheiten gleichzeitig stattfinden. Oder das Aggregat wird 2) nicht verschwinden, wenn zuerst $h = \infty$, dann $x_0 = 0$, dann $y_0 = 0$ gesetzt wird, während

$$\lim_{y_0=0} \lim_{x_0=0} F(x_0, y_0) \text{ \textit{nicht} gleich } \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} F(x_0, y_0)$$

ist. Oder es wird 3) nicht verschwinden, wenn erst $y_0 = 0$, dann $x_0 = 0$, dann $h = \infty$ gesetzt wird *), und

*) Geometrisch schliessen wir hieraus Folgendes. Das Integral $\int\limits_{y_0}^{h} dy \int\limits_{x_0}^{a} dx\, \varphi(x, y)$ ist gleichwerthig mit dem Volum zwischen der Oberfläche $z = \varphi(x, y)$ und den Ebenen: $z = 0$,

$$\lim_{h=\infty}\lim_{x_0=0}F(x_0, h) \text{ nicht gleich } \lim_{x_0=0}\lim_{h=\infty}F(x_0, h)$$

ist.

Es wird also durch die Bedingung, dass es einen endlichen von a unabhängigen Werth haben solle, die ursprüngliche Vierdeutigkeit des Integrals $\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^a dx\,\varphi(x, y)$ auf eine Dreideutigkeit reducirt. Von diesen drei verschiedenen Bedeutungen jenes Integrals endlich wählen wir diejenige, vermöge deren das *Fourier*sche Integral mit einem *Dirichlet*schen Integral identisch ist, *nämlich die dritte*. Unter einem *Dirichlet*schen war ein Integral $\int\limits_0^a \Phi(x, h)\,dx$ verstanden, welches mit ins Unbegrenzte zunehmenden h sich einer von a unabhängigen, von 0 und ∞ verschiedenen Grenze nähert. Setzen wir

$$\int\limits_0^h \varphi(x, y)\,dy = \Phi(x, h), \text{ und } \int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^a dx\,\varphi(x, y) = \lim_{h=\infty}\int\limits_0^a \Phi(x, h)\,dx\ ^{*)},$$

so involvirt in der That diese Formel folgende Reihenfolge der Uebergänge der Variablen x_0, y_0, h in die festen Werthe 0, 0, ∞ bei der Verwandlung des unbestimmten Integrals $\int\limits_{y_0}^h dy\int\limits_{x_0}^a dx\,\varphi(x, y)$ in das partiell bestimmte $\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^a dx\,\varphi(x, y)$: Indem zuerst die Function $\Phi(x, h) = \int\limits_0^h \varphi(x, y)\,dy$ gebildet wird, setzt man zuerst

---

$x = x_0$, $x = a$, $y = y_0$, $y = h$. Nennen wir *Dirichlet*schen Definitionen gemäss *unbedingt convergent* dies Volum, wenn es für $h=\infty$, $x_0=0$, $y_0=0$ auch seine negativen Bestandtheile als positiv in Rechnung gezogen, convergirt, *bedingungsweise convergent*, wenn es im letzteren Fall divergirt, so muss bei unbedingter Convergenz die Reihenfolge der Grenzübergänge gleichgültig sein, und umgekehrt, wenn sie nicht gleichgültig ist, so ist die Convergenz nothwendig eine bedingungsweise. Es wird also das Integral $\iint dx\,dy\,\varphi(x, y)$, wenn es ein *Fourier*sches ist, sich immer in positive und negative für sich divergente Bestandtheile zerlegen lassen, die entweder beim Anblick des Integrals sofort gesondert hervortreten, oder in alternirenden Functionen durch ein Functionalzeichen verbunden sind.

*) Nach der im Texte aufgestellten Definition des *Fourier*schen Integrals folgen umgekehrt aus jedem *Dirichlet*schen Integral unzählige *Fourier*sche auf Grund der Identität:

$$\int\limits_0^a \Phi(x, h)\,dx = \int\limits_0^h dy\int\limits_0^a dx\left\{\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} + \lambda(x, y)\,\Phi(x, 0)\right\},$$

wo $\lambda(x, y)$ eine solche Function bedeutet, dass $\int\limits_0^\infty \lambda(x, y)\,dy = 1$ sei, wie z. B. $\lambda(x, y) = e^{-y}$, $\lambda(x, y) = xe^{-xy}$, etc.

$y_0 = 0$. Stellt man dann das Integral $\int_0^a \Phi(x, h)\,dx$ auf, oder bildet den Flächenraum zwischen der Curve $y = \Phi(x, h)$, der x-Axe und den Ordinaten $x = 0$, $x = a$, so vollzieht man den Grenzübergang $x_0 = 0$. Bildet man endlich den Grenzwerth dieses Flächenraums für ein fort und fort wachsendes h, so setzt man $h = \infty$. Daraus folgt, dass wir unter dem *Fourier*schen Integral $\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x, y)$ die Grösse:

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} \{F(a, h) - F(a, y_0) - F(x_0, h) + F(x_0, y_0)\}$$

zu verstehen haben, wodurch es mit aller Präcision definirt ist. Die vollständige Definition des *Fourier*schen Doppelintegrals vom unbestimmten Integral aus fassen wir nun zusammen wie folgt:

Es sei eine Function $F(x, y)$ so beschaffen, dass

$$F(a, \infty) - F(a, 0)$$

a nicht enthält, ferner sei $\lim_{x=0} \lim_{y=\infty} F(x, y)$ *nicht gleich* $\lim_{y=\infty} \lim_{x=0} F(x, y)$, *dann ist*

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} \int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx\, \varphi(x, y) = \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x, y),$$

wo $\varphi(x, y) = \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}$, *ein Fouriersches Integral.*

Setzen wir, um diese Unterscheidungen durch Beispiele zu beleuchten:

$$F(x, y) = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha_1 x + \beta_1 y},$$

so ist:

$$F(a, \infty) - F(a, 0) = \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{\alpha}{\alpha_1}.$$

Ferner ist:

$$\lim_{h=\infty} \lim_{y_0=0} \lim_{x_0=0} \{F(x_0, h) - F(x_0, y_0)\} = 0$$

und

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} \{F(x_0, h) - F(x_0, y_0)\} = \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{\alpha}{\alpha_1}.$$

Ausserdem hat man $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\dfrac{\alpha_1 x - \beta_1 y}{(\alpha_1 x + \beta_1 y)^3}$. Wir haben also:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx \frac{\alpha_1 x - \beta_1 y}{(\alpha_1 x + \beta_1 y)^3} = \lim_{h=\infty} \lim_{y_0=0} \lim_{x_0=0} \int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx \frac{\alpha_1 x - \beta_1 y}{(\alpha_1 x + \beta_1 y)^3} = \frac{1}{\alpha_1 \beta_1}.$$

Das Integral links ist indessen kein *Fourier*sches, weil die Reihenfolge, in der

die Grenzen ihre festen Werthe erhalten, nicht die vorgeschriebene ist. Versucht man es mit der vorgeschriebenen Reihenfolge, so findet man:

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} \int_{y_0}^{h} dx \int_{x_0}^{a} dy \frac{\alpha_1 x - \beta_1 y}{(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2} = 0,$$

so dass $F(x, y) = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha_1 x + \beta_1 y}$ überhaupt kein *Fourier*sches Integral liefert.

Setzt man dagegen:

$$F(x, y) = \frac{xy}{xy + \alpha x + \beta},$$

so hat man:

$$F(a, \infty) - F(a, 0) = 1,$$
$$\lim_{x_0=0} \{F(x_0, h) - F(x_0, 0)\} = 0,$$

und durch Differentiation findet man das *Fourier*sche Integral:

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x_0=0} \lim_{y_0=0} \int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx \frac{\beta + \alpha x - xy}{(\beta + \alpha x + xy)^2} = \int_{0}^{\infty} dy \int_{0}^{a} dx \frac{\beta + \alpha x - xy}{(\beta + \alpha x + xy)^2} = \frac{1}{\beta}.$$

Diese Beispiele lassen sich leicht vermehren. Ich werde mich aber darauf beschränken, im folgenden Paragraphen diejenige Klasse *Fourier*scher Integrale, zu welcher das von *Fourier* entdeckte Integral speciell gehört, genauer zu kennzeichen.

§. 2. Ueber die *Fourier*schen Doppelintegrale, bei denen unter dem Integralzeichen nur das Product xy vorkommt.

Wir nehmen an, dass die Function F nur vom Product xy abhängt. Dann ist das unbestimmte Integral:

$$F(ah) - F(ay_0) - F(x_0 h) + F(x_0 y_0),$$

und erhält, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, dann $h = \infty$ gesetzt, den Werth:

$$F(\infty) - F(0).$$

Nun sei $\varphi(xy) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(xy)$, so kann wegen der Willkürlichkeit von F, $\varphi(xy)$ jede beliebige Function von xy bedeuten. Somit folgt:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx \varphi(xy) = F(\infty) - F(0),$$

oder das Integral links ist, wenn es convergirt, stets ein *Fourier*sches Integral. (Aus der Anm. zu §. 1 folgt dann auch, dass ein Integral dieser Form nie absolut convergent ist.) Die Unabhängigkeit des vorstehenden Integrals von a lässt sich übrigens sehr einfach direct nachweisen. Wir substituiren in:

$$\int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx\, \varphi(xy)$$

$\alpha\xi$ statt x, $\frac{\eta}{\alpha}$ statt y, nehmen an $\alpha = \frac{a}{b}$, wo b eine ganz willkürliche Grösse, und schreiben schliesslich unter dem Integral x und y für ξ und η zurück. Wir erhalten so:

$$\int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx\, \varphi(xy) = \int_{\alpha y_0}^{\alpha h} dy \int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{b} dx\, \varphi(xy),$$

und wenn nun nach einander $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, $h_0 = \infty$ gesetzt wird, so geht diese Gleichheit über in:

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^{a} dx\, \varphi(xy) = \int_0^{\infty} dy \int_0^{b} dx\, \varphi(xy),$$

wodurch, da das Integral rechter Hand a nicht enthält, die Unabhängigkeit des Integrals links von a dargethan ist.

Dass ein Integral der Form $\int_0^{\infty} dy \int_0^{a} dx\, \varphi(xy)$ stets ein *Fourier*sches sei, folgt endlich auch ganz leicht, wenn man sich die Integration nach y zuerst ausgeführt denkt. Denn setzen wir $\int_0^{x} \varphi(u)\, du = \Phi(x)$, so ist:

$$(6.)\qquad \int_0^{h} dy \int_0^{a} dx\, \varphi(xy) = \int_0^{a} \frac{\Phi(xh)}{x}\, dx = \int_0^{ah} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx.$$

Lässt man in dem Integral rechts h unendlich werden, so geht es offenbar über in $\int_0^{\infty} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$, so dass man hierbei zugleich den numerischen Werth des *Fourier*schen Integrals erhält. Diese Umformung rückwärts gemacht, kann auch dienen, um aus jedem zwischen den Grenzen 0 und ∞ convergenten einfachen Integral ein *Fourier*sches Integral darzustellen. Denn es ist:

$$(7.)\quad \int_0^{ah}\Psi(x)\,dx = \int_0^a \Psi(xh)\,h\,dx = \int_0^h dy \int_0^a dx\,\{\Psi(xh) + xh\,\Psi'(xh)\}$$

vorausgesetzt, dass $h\,\Psi(xh)$ mit h verschwindet. So erhält man aus:

$$\int_0^\infty x^\nu e^{-x}\,dx = \Gamma(\nu+1)$$

das *Fourier*sche Integral:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\,x^\nu y^\nu e^{-xy}\{\nu+1-xy\} = \Gamma(\nu+1),$$

von dem zu bemerken ist, dass es sich nicht in seine beiden durch das Minuszeichen getrennten Theile zerlegen lässt, weil jeder Theil für sich divergent ist. Sonst müsste das Integral absolut convergent sein, was unmöglich ist. Ferner findet man aus:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}, \qquad 2 > \mu > 0$$

dieses *Fourier*sche Integral:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\,x^{-\mu}y^{-\mu}\{(1-\mu)\sin(xy) + xy\cos(xy)\} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}, \qquad 2 > \mu > 0,$$

welches für $\mu = 1$ in das *Fourier*sche Integral im engeren Sinne:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx \cos(xy) = \tfrac{1}{2}\pi$$

übergeht.

Diese Methode, *Fourier*sche Integrale zu bilden, lässt sich bedeutend verallgemeinern. Es sind indessen mit dieser Verallgemeinerung neue, schwierige Fragen der Integralrechnung verknüpft, durch deren Erledigung der Gang der Darstellung der Haupteigenschaften der *Fourier*schen Integrale so sehr gehemmt werden würde, dass ich es vorziehe, jene Verallgemeinerung bei einer anderen Gelegenheit demnächst zu veröffentlichen.

II.

§. 3. Der Beweis des Hauptsatzes: $\int\limits_0^x dy \int\limits_0^a dx\, f(x)\varphi(x,y) = f(0)\int\limits_0^x dy \int\limits_0^a dx\,\varphi(x,y)$.

Herleitung eines Hülfsatzes.

Den Beweis für den allgemeinen Satz:

$$\int\limits_0^\alpha dy \int\limits_0^a dx\, f(x)\varphi(x,y) = f(0)\int\limits_0^x dy \int\limits_0^a dx\,\varphi(x,y)$$

wenn das Integral rechts ein Fouriersches Integral ist, werde ich vom *Dirichlet*schen Integral aus führen, wo der Satz dann lautet: *Es ist:*

$$\lim \int\limits_0^a f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = f(0)\lim\int\limits_0^a \Phi(x,h)\,dx$$

wenn $\lim\int\limits_0^a \Phi(x,h)\,dx$ *ein Dirichletsches Integral ist.* Die letztere Formel wird mit der ersteren identisch, wenn man

$$\int\limits_0^h \varphi(x,y)\,dy = \Phi(x,h)$$

setzt. (§. 1.)

Dem Beweise liegt eine identische Transformation zu Grunde, der man jedes Integral:

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

unterwerfen kann. Unter gewissen besonderen Voraussetzungen über die Function $f(x)$ fliesst dann aus jener Transformation ein neuer Mittelwerthsatz, der als das *Lemma* des Beweises anzusehen ist.

Wir theilen das Intervall von a bis b in die Theile $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, so dass $b-a = \sum\limits_1^n \delta_p$, und setzen zunächst:

$$(1^*.)\quad \begin{cases} \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx + R_1, \\ \text{wo} \\ R_1 = \int\limits_a^b (f(x)-f(a))\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

Dann schreiben wir R_1 wie folgt:

$$R_1 = \int_a^{a+\delta_1}\big(f(x)-f(a)\big)\varphi(x)\,dx + \int_{a+\delta_1}^b \big(f(x)-f(a)\big)\varphi(x)\,dx.$$

Die Transformation (1*.) auf das zweite Integral rechts angewandt, wird es:

$$\{f(a+\delta_1)-f(a)\}\int_{a+\delta_1}^b \varphi(x)\,dx + \int_{a+\delta_1}^b \big(f(x)-f(a+\delta_1)\big)\varphi(x)\,dx.$$

Den so umgeformten Werth von R_1 in (1*.) eingeführt, findet man:

$$(2^*.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \\ \displaystyle = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \{f(a+\delta_1)-f(a)\}\int_{a+\delta_1}^b \varphi(x)\,dx + \int_a^{a+\delta_1}\big(f(x)-f(a)\big)\varphi(x)\,dx + R_2, \\ \text{wo} \\ \displaystyle R_2 = \int_{a+\delta_1}^b \big(f(x)-f(a+\delta_1)\big)\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

R_2 formen wir in der nämlichen Weise um wie R_1; wir setzen also:

$$R_2 = \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_1+\delta_2}\big(f(x)-f(a+\delta_1)\big)\varphi(x)\,dx + \int_{a+\delta_1+\delta_2}^b \big(f(x)-f(a+\delta_1)\big)\varphi(x)\,dx$$

und schreiben statt des letzten Integrals rechter Hand:

$$\{f(a+\delta_1+\delta_2)-f(a+\delta_1)\}\int_{a+\delta_1+\delta_2}^b \varphi(x)\,dx + \int_{a+\delta_1+\delta_2}^b \big(f(x)-f(a+\delta_1+\delta_2)\big)\varphi(x)\,dx.$$

Somit geht (2*.) über in

$$(3^*.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \\ \displaystyle f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx \begin{matrix} \displaystyle +\{f(a+\delta_1)-f(a)\}\int_{a+\delta_1}^b \varphi(x)\,dx + \int_a^{a+\delta_1}\big(f(x)-f(a)\big)\varphi(x)\,dx \\ \displaystyle +\{f(a+\delta_1+\delta_2)-f(a+\delta_1)\}\int_{a+\delta_1+\delta_2}^b \varphi(x)\,dx + \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_1+\delta_2}\big(f(x)-f(a+\delta_1)\big)\varphi(x)\,dx, \end{matrix} + R_3, \\ \text{wo} \\ \displaystyle R_3 = \int_{a+\delta_1+\delta_2}^b \big(f(x)-f(a+\delta_1+\delta_2)\big)\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

Auf R_3 ist nun wieder die nämliche Transformation anzuwenden, wie auf R_1

und R_2, und dies Verfahren ist fortzusetzen, bis wir schliesslich als letztes Glied in dem Ausdrucke für $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ erhalten:

$$R_n = \int_{a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1}}^{b} (f(x)-f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1}))\,\varphi(x)\,dx,$$

welches nicht weiter umgeformt zu werden braucht. Alsdann ist:

$$(n^*.)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \sum_{p=1}^{p=n-1}\{f(a+\sum_1^p\delta)-f(a+\sum_1^{p-1}\delta)\}\int_{a+\sum_1^p\delta}^{b}\varphi(x)\,dx \\ +\sum_{p=1}^{p=n}\int_{a+\sum_1^{p-1}\delta}^{a+\sum_1^{p}\delta}(f(x)-f(a+\sum_1^{p-1}\delta))\,\varphi(x)\,dx, \end{aligned}\right.$$

wo für $p=1$, $\sum_1^{p-1}\delta=0$, $\sum_1^p\delta=\delta_1$; für $p=2$, $\sum_1^{p-1}\delta=\delta_1$, $\sum_1^p\delta=\delta_1+\delta_2$, etc. ist.

Dies ist die angekündigte identische Transformation. In Betreff der Function $f(x)$ ist jetzt die Annahme zu machen, dass sie von $x=a$ bis $x=b$ entweder nicht wächst oder nicht abnimmt.

Wir können dann in der ersten Summe rechter Hand von $(n^*.)$ statt einer jeden der sämmtlich positiven oder sämmtlich negativen Differenzen $f(a+\sum_1^p\delta)-f(a+\sum_1^{p-1}\delta)$ ein anderes Integral als Factor zu geben, der Summe dieser Differenzen einen Factor M geben, der zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth jener Integrale liegt. Wenn das Integral $\int_u^b\varphi(x)\,dx$ von dem einen zum andern dieser beiden extremsten Werthe von $\int_{a+\sum_1^p\delta}^b\varphi(x)\,dx$ nach der Stetigkeit sich ändert, so giebt es nothwendiger Weise mindestens einen Werth von x, wir nennen ihn ξ, für welchen $\int_\xi^b\varphi(x)\,dx$ genau gleich jenem mittleren Coefficienten M wird. Wir dürfen nun die erste Summe rechter Hand in $(n^*.)$ schreiben:

$$M\{f(b-\delta_n)-f(a)\}$$

wo, wenn das Integral $\int_u^b\varphi(x)\,dx$ im Intervall $u=a\,\ldots\,u=b$ eine stetige

Function seiner unteren Grenze u ist, man hat:

$$M = \int_{\xi}^{b} \varphi(x)\,dx, \qquad b > \xi > a.$$

Was die zweite Summe rechter Hand in (n^*.) betrifft, so wollen wir jetzt die δ sämmtlich so gewählt voraussetzen, dass $\varphi(x)$ in keinem der Intervalle $a+\sum_1^{p-1}\delta$ bis $a+\sum_1^{p}\delta$ sein Zeichen wechselt. Dann können wir die zweite Summe schreiben:

$$\sum_1^n \{f(\xi_p) - f(a+\sum_1^{p-1}\delta)\} \int_{a+\sum_1^{p-1}\delta}^{a+\sum_1^{p}\delta} \varphi(x)\,dx, \qquad a+\sum_1^{p}\delta > \xi_p > a+\sum_1^{p-1}\delta.$$

Die Differenzen in der Klammer { } sind sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ. Bezeichnet man also mit N eine Grösse, deren Werth zwischen dem des grössten und dem des kleinsten der Integrale $\int_{a+\sum_1^{p-1}\delta}^{a+\sum_1^{p}\delta} \varphi(x)\,dx$ liegt, so können wir die zweite Summe rechter Hand in (n^*.) schreiben:

$$N\sum\{f(\xi_p) - f(a+\sum_1^{p-1}\delta)\},$$

und ihr numerischer Werth ist kleiner als der numerische Werth dieser Grösse:

$$N(f(b)-f(a)).$$

Ich lasse jetzt die δ verschwinden, indem gleichwohl ihre Summe $\sum_1^n \delta = b-a$ constant bleibt. Es wird zugleich jedes Integral der Form:

$$\int_{a+\sum_1^{p-1}\delta}^{a+\sum_1^{p}\delta} \varphi(x)\,dx$$

verschwinden müssen, und damit auch N. Wir finden so endlich:

$$(8.) \qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + M\{f(b)-f(a)\},$$

da ja auch $f(b-\delta_n)$ in $f(b)$ übergeht, und wo also M zwischen dem grössten und kleinsten Werth liegt, den $\int_u^b \varphi(x)\,dx$ im Intervall $u=a$ bis $u=b$ erhält. Dies

ist das angekündigte *Lemma*. Bevor ich es zum Beweis des Hauptsatzes benutze, seien mir indessen einige Bemerkungen über jenen Hülfsatz gestattet.

Unter der Voraussetzung der Stetigkeit von $\int_u^b \varphi(x)\,dx$ ist demnach:

$$(9.)\quad \begin{cases} \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \{f(b)-f(a)\}\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \\ \qquad = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx, \qquad b > \xi > a. \end{cases}$$

Diese Formeln *) ergeben sich auch sehr einfach aus der Identität:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b dx f'(x)\int_x^b \varphi(u)\,du,$$

indem man, unter der Bedingung dass $f'(x)$ sein Zeichen im Intervall von a bis b nicht wechselt, einen mittleren Werth des Integrals $\int_x^b \varphi(x)\,dx$ aus dem zweiten Integral herauszieht. Wenn ich gleichwohl zur Ableitung jener Formeln mich eines umständlicheren Verfahrens bediente, so hatte dies den Zweck, die Benutzung eines dem Gegenstande fremden Elementes, nämlich des Differentialquotienten $f'(x)$, zu vermeiden. Es konnte der Weg über diese Grösse in solchen Fällen nicht unanstössig erscheinen, wo $f(x)$ als die Grenze gewisser unendlicher Operationen definirt ist, und der Werth des Differentialquotienten von der Anordnung bestimmter Grenzübergänge abhängt.

Besondere Formen dieses Mittelwerthsatzes erhält man, wenn entweder $f(a)$ oder $f(b)$ Null ist. Er lautet dann:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

und erweist sich gerade in solchen Fällen von Nutzen, wo der gewöhnliche Mittelwerthsatz $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\,dx$ ($f(x)$ wechselt sein Zeichen nicht im Intervall von $f(a)$ bis $f(b)$, und $\varphi(x)$ ist beliebig aber stetig) nicht anwendbar ist. Denn während bei dem gewöhnlichen Mittelwerthsatz die be-

*) Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn *Weierstrass* hat er den in (9.) enthaltenen Satz bei einer ganz ähnlichen Gelegenheit gefunden, in Vorlesungen benutzt, aber nicht veröffentlicht.

liebige Function vor dem Integralzeichen steht und die der Beschränkung unterworfene darunter, verhält es sich umgekehrt bei dem oben bewiesenen Mittelwerthsatz.

So beweist man mit Hülfe des neuen Mittelwerthsatzes z. B. den Satz, dass, wenn $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ convergent ist, und $f(x)$ von einem beliebig grossen Werthe von x an nicht mehr zu- oder nicht mehr abnimmt und endlich bleibt, auch $\int\limits_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ ein an der oberen Grenze convergentes Integral ist. Ist das Integral $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ absolut convergent, so ist der Satz bekannt und anderweitig leicht nachzuweisen. Ist jedoch $\int\limits_a^x \varphi(x)\,dx$ alternirend convergent, so müssen wir den neuen Mittelwerthsatz benutzen. Danach ist:

$$\int\limits_A^B f(x)\varphi(x)\,dx = f(A)\int\limits_A^\xi \varphi(x)\,dx + f(B)\int\limits_\xi^B \varphi(x)\,dx, \quad B > \xi > A.$$

Lassen wir A und B unendlich werden, so verschwinden wegen der Convergenz von $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ und wegen $B > \xi > A$ die beiden Integrale rechts und folglich das Integral links, weshalb $\int\limits_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ convergent sein muss.

§. 4. Beweis des Hauptsatzes.

Ich werde den Satz zuerst beweisen für den Fall, wo die Function unter dem *Fourier*schen Doppelintegral nur vom Product xy abhängt. Setzt man $\int\limits_0^u \varphi(x)\,dx = \Phi(u)$, so ist $\int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^a dx\,\varphi(xy) = \lim \int\limits_0^a \frac{\Phi(xh)}{x}\,dx$, und es ist zu beweisen

$$\lim \int\limits_0^a f(x)\frac{\Phi(xh)}{x}\,dx = f(0)\lim \int\limits_0^a \frac{\Phi(xh)}{x}\,dx = f(0)\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

Nach dem Mittelwerthsatz:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int\limits_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + (f(\beta) - f(\alpha))\int\limits_\xi^\beta \varphi(x)\,dx$$

$$= f(\alpha)\int\limits_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx + f(\beta)\int\limits_\xi^\beta \varphi(x)\,dx$$

ist:

$$\int_0^a f(x)\frac{\Phi(xh)}{x}dx = f(0)\int_0^a \frac{\Phi(xh)}{x}dx + (f(a)-f(0))\int_\xi^a \frac{\Phi(xh)}{x}dx, \quad 0<\xi<a$$

$$\int_a^b f(x)\frac{\Phi(xh)}{x}dx = f(a)\int_a^{\xi_1} \frac{\Phi(xh)}{x}dx + f(b)\int_{\xi_1}^b \frac{\Phi(xh)}{x}dx, \quad a<\xi_1<b$$

vorausgesetzt, dass $f(x)$ von $f(0)$ bis $f(b)$ nur zu- oder nur abnimmt. Diese Gleichungen addire ich, verändere die Variabeln unter den Integralen rechter Hand und erhalte:

$$\int_0^b f(x)\frac{\Phi(xh)}{x}dx$$

$$= f(0)\int_0^{ah}\frac{\Phi(x)}{x}dx + (f(a)-f(0))\int_{\xi h}^{ah}\frac{\Phi(x)}{x}dx + f(a)\int_{ah}^{\xi_1 h}\frac{\Phi(x)}{x}dx + f(b)\int_{\xi_1 h}^{bh}\frac{\Phi(x)}{x}dx.$$

$\frac{\Phi(x)}{x}$ muss so beschaffen gedacht werden, dass das Integral $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}dx$ an der oberen Grenze convergent ist, d. h. dass $\int_\alpha^\beta \frac{\Phi(x)}{x}dx$ stets verschwindet, wenn α und β unendlich werden. Nun lassen wir in der vorstehenden Formel gleichzeitig a verschwinden und h unendlich werden, jedoch so, dass ah unendlich wird. Wir setzen beispielsweise $a = h^{-\frac{1}{2}}$. Alsdann reducirt sich die rechte Seite auf das eine Glied $f(0)\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}dx$, da das zweite Glied wegen des Factors $f(a)-f(0)$, das dritte und vierte wegen der Convergenz des Integrals $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}dx$, und weil $a<\xi_1<b$ ist, verschwindet.

Es folgt also

$$(10.)\qquad \lim\int_0^b f(x)\frac{\Phi(xh)}{x}dx = f(0)\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}dx$$

oder, wenn a statt b geschrieben wird, die zu beweisende Formel. Die Beschränkung der Function $f(x)$ werde ich beim allgemeinen Beweise aufheben. Angenommen dies sei geschehen, so ist hierdurch nicht allein der *Fourier*sche Satz im engeren Sinne (für $\Phi(x) = \sin x$) bewiesen, sondern u. a. der *Dirichlet*sche Satz. Denn setzen wir $f(x) = \frac{xF(x)}{\sin x}$, $\Phi(x) = \sin x$, so hat man wegen $\lim_{x=0}\frac{x}{\sin x} = 1$:

$$\lim\int_0^a F(x)\,\frac{\sin hx}{\sin x}\,dx = \lim\int_0^a \frac{xF(x)}{\sin x}\,\frac{\sin hx}{x}\,dx = F(0)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}F(0),$$

wo $a < \pi$ angenommen ist, da $\sin x$ für $x=\pi$ verschwindet. Am Schlusse des Abschnittes werde ich übrigens $\lim\int_0^a f(x)\frac{\sin hx}{\sin x}dx$ für jeden Werth von a bestimmen.

Um nun den Hauptsatz ganz allgemein zu beweisen, erinnere ich daran, dass, wenn, der Definition des *Dirichlet*schen Integrals gemäss, $\lim\int_0^a \Phi(x,h)\,dx$ eine von a unabhängige, endliche Grösse A ist, dies für jeden noch so kleinen Werth von a gelten muss, mit andern Worten, dass in:

$$\lim\int_0^a \Phi(x,h)\,dx = A$$

a kleiner gedacht werden darf, als jede noch so kleine gegebene Grösse, eben weil die Grenze $\lim\int_0^a \Phi(x,h)\,dx$ vom Werthe von a unabhängig ist. Da nun auch

$$\lim\int_0^b \Phi(x,h)\,dx = \lim\int_0^a \Phi(x,h)\,dx + \lim\int_a^b \Phi(x,h)\,dx$$

von b unabhängig und $=A$ ist, so ist:

$$\lim\int_a^b \Phi(x,h)\,dx = 0,$$

wenn a eine beliebig kleine von Null verschiedene Grösse vorstellt.

Endlich kann

$$\int_\alpha^\beta \Phi(x,h)\,dx,$$

wenn α und β innerhalb der Grenzen bleiben, innerhalb deren das Integral $\int_0^a \Phi(x,h)\,dx$ ein *Dirichlet*sches Integral ist, niemals unendlich werden*). Da

---

*) Wenn die Function $\Phi(x,h)$ mit $h=\infty$ unbestimmt wird, so ist die krummlinige Begrenzung des Flächenraums $\int_\alpha^\beta \Phi(x,h)\,dx$ eine kammartige Curve oder *Ctenoide (E. du Bois-Reymond)* deren Zähne mit unendlich werdendem h unendlich schmal werden. Man könnte vielleicht die Vorstellung haben, es wäre möglich, dass stellenweise der Flächenin-

wir Unstetigkeiten des Integrals $\int \Phi(x,h)\,dx$ als Function seiner Grenzen nicht ausschliessen wollen, so werden wir den Mittelwerthsatz in der allgemeineren Form des *Lemma* des vorigen §. anwenden. Wir haben dann zuerst:

$$\int_a^b f(x)\Phi(x,h)\,dx = f(a)\int_a^b \Phi(x,h)\,dx + M_1\{f(b)-f(a)\},$$

wo M_1 nicht numerisch grösser werden kann als der numerisch grösste Werth von:

$$\int_{u_1}^b \Phi(x,h)\,dx, \quad a < u_1 < b.$$

Lassen wir nun in obiger Gleichung h unendlich werden, so verschwinden $\lim \int_a^b \Phi(x,h)\,dx$ und $\lim M_1$. Folglich erhalten wir

$$(11.)\qquad \lim \int_a^b f(x)\Phi(x,h)\,dx = 0$$

für beliebige positive Werthe von a und b. Dies ist ein Theil des Hauptsatzes.

Ferner setzen wir:

$$\int_0^a f(x)\Phi(x,h)\,dx = f(0)\int_0^a \Phi(x,h)\,dx + M\{f(a)-f(0)\},$$

$$\int_a^b f(x)\Phi(x,h)\,dx = f(a)\int_a^b \Phi(x,h)\,dx + M_1\{f(b)-f(a)\}.$$

Durch Addition folgt:

$$\int_0^b \Phi(x,h)f(x)\,dx$$

$$= f(0)\int_0^a \Phi(x,h)\,dx + f(a)\int_a^b \Phi(x,h)\,dx + M(f(a)-f(0)) + M_1(f(b)-f(0)).$$

In dieser Formel können M und M_1 nicht numerisch grösser werden als der numerisch grösste Werth von *respective*:

$$\int_u^a \Phi(x,h)\,dx, \quad 0 < u < a; \qquad \int_{u_1}^b \Phi(x,h)\,dx, \quad a < u_1 < b.$$

---

halt jedes solchen Zahnes unendlich werde, und dass das Integral zwischen endlich entfernten Grenzen keinen unendlichen Werth erhalte, wenn die zahnartigen Flächenräume abwechselnd positiv und negativ wären, allein einige Ueberlegung zeigt, dass das Integral dann *unbestimmt* sein müsste.

Wir lassen jetzt h unendlich werden. Das erste Glied rechter Hand reducirt sich auf:

$$f(0).\lim\int_0^a \Phi(x, h)\,dx,$$

wird also von a unabhängig. Das zweite Glied wird Null, wegen

$$\lim\int_a^b \Phi(x, h)\,dx = 0.$$

Aus demselben Grunde wird das vierte Glied Null, da $a < u_1 < b$ ist. Was endlich das dritte Glied $\lim M(f(a)-f(0))$ betrifft, so ist es der Unterschied zwischen den Grössen:

$$\lim\int_0^b f(x)\Phi(x, h)\,dx, \qquad f(0)\lim\int_0^a \Phi(x, h)\,dx,$$

ist also, da diese beiden Grössen von a unabhängig sind, gleichfalls von a unabhängig. Dann kann es aber nur Null sein. Denn da a kleiner gedacht werden kann, als jede noch so kleine gegebene Grösse, M aber nie unendlich ist, so *ist* auch $M(f(a)-f(0))$ kleiner als jede noch so kleine gegebene Grösse, also Null.

Es ist daher unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b nicht zunimmt oder nicht abnimmt:

$$(12.) \qquad \lim\int_0^b \Phi(x, h) f(x)\,dx = f(0)\lim\int_0^b \Phi(x, h)\,dx.$$

Nimmt nun $f(x)$ von $x=0$ an bald zu, bald ab, und wird ausserhalb des Punktes $x=0$ beliebig oft unstetig, so wendet man die durch den *Dirichlet*schen Beweis hinlänglich bekannten Zerlegungen an, um zu beweisen, dass die obige Gleichung auch dann noch stattfindet. Ebenso kann man zeigen, ganz ähnlich, wie von *Dirichlet* geschehen ist*), dass der Satz auch gilt, wenn $f(x)$ für einzelne Punkte $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$, ... derart unendlich wird, dass die Grössen $(x-\alpha_1)f(x)$, $(x-\alpha_2)f(x)$ ... für diese Punkte endlich bleiben, mit andern Worten, dass das Integral $\int f(x)\,dx$, über diese Punkte erstreckt, nicht unendlich werde.

Geht man vom *Dirichlet*schen Integral zum *Fourier*schen über, indem man $\Phi(x,h) = \int_0^h \varphi(x,y)\,dy$ setzt, so ist also für eine beliebige Function $f(x)$

*) Bd. XVII, pag. 54 dieses Journals.

die Gleichheit:

$$(13.)\quad \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, f(x)\varphi(x,y) = f(0)\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x,y)$$

vollständig bewiesen.

§. 5. Verallgemeinerung des Hauptsatzes.

Dieser Satz ist noch einer bemerkenswerthen Verallgemeinerung in Beziehung auf die Function $f(x)$ fähig. Am ganzen Beweis ist nämlich nichts Wesentliches zu ändern, wenn wir annehmen, dass $f(x)$ nicht allein von x abhängt, sondern eine solche Function $f(x, h)$ auch von h ist, die für jeden Werth von h, incl. $h = \infty$ der nämlichen Einschränkung in Bezug auf ihr Unendlichwerden wie oben die Function $f(x)$ unterworfen ist, und die für $\frac{1}{h} = 0$, $x = 0$, welcher Beziehung gemäss man diese Veränderlichen auch verschwinden lasse, den nämlichen Werth erhalte. Eine solche Function ist: $\frac{xh + \alpha x + \beta h + \gamma}{xh + \alpha_1 x + \beta_1 h + \gamma_1}$, aber nicht $\frac{xh + \alpha x + \gamma}{xh + \alpha_1 x + \gamma_1}$. Denn setzen wir in letzterem Ausdrucke $h = \frac{\mu}{x}$ und dann $x = 0$, so wird er $\frac{\mu + \gamma}{\mu + \gamma_1}$, also von μ abhängig.

Der so verallgemeinerte Satz lautet in *Dirichlet*schen Integralen:

$$(14.)\quad \lim \int_0^a f(x,h)\Phi(x,h)\,dx = \lim f(0,h) . \lim \int_0^a \Phi(x,h)\,dx.$$

Dass diese Verallgemeinerung gestattet ist, leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass die Gleichungen $\lim \int_0^b \Phi(x,h)\,dx = 0$, $\lim \int_0^a \Phi(x,h) = A$ nicht bloss gelten, wenn a und b feste Werthe sind, sondern auch, wenn sie sich mit h verändern und mit $h = \infty$ in feste Werthe $\lim a$, $\lim b$ übergehen. In der That ist:

$$\int_a^b \Phi(x,h)\,dx = \int_{\lim a}^{\lim b} \Phi(x,h)\,dx + \int_a^{\lim a} \Phi(x,h)\,dx + \int_{\lim b}^b \Phi(x,h)\,dx.$$

Das zweite und dritte Glied rechts verschwindet mit $h = \infty$, wenn a von Null verschieden ist, und das erste Glied rechts verschwindet nach dem früheren ebenfalls an der Grenze $h = \infty$.

Nun wird es offenbar stets einen so grossen Werth von h geben, von welchem an bei fernerem Wachsthum dieses Parameters die Anzahl und Reihen-

folge der Werthe von $f(x, h)$, in denen $\frac{\partial f(x,h)}{\partial x}$ sein Zeichen wechselt, sich nicht mehr verändert. Die entsprechenden Werthe von x im Intervall $0 \dots b$ seien der Reihe nach $a_1, a_2, \dots a_r$, so kann man also ohne Weiteres nach dem oben angegebenen Verfahren den verallgemeinerten Hauptsatz für die Intervalle $0 \dots a_1$, $a_1 \dots a_2$, $a_2 \dots a_3$, $\dots$, $a_r \dots b$ beweisen. Nur in dem Falle, wo $\lim a_1 = 0$ ist, bedarf es eines kleinen Kunstgriffs. Es sei z. B. $f(a_1, h)$ ein Maximum. Wir addiren zu $f(x, h)$ die Function αx. Alsdann entspricht dem Werth a_1 von x kein Maximum von $f(x, h) + \alpha x$ mehr, und es fällt für $h = \infty$ kein Maximum in den Punkt $x = 0$. Es ist aber:

$$\lim \int_0^a (f(x,h) + \alpha x)\,\Phi(x,h)\,dx = \lim \int_0^a f(x,h)\,\Phi(x,h)\,dx + \lim \int_0^a \alpha x\,\Phi(x,h)\,dx.$$

Der zweite Term rechts verschwindet wegen des *Hauptsatzes*, und es folgt:

$$\lim \int_0^a f(x,h)\,\Phi(x,h)\,dx = \lim\,(f(x,h) + \alpha x)_{x=0} . \lim \int_0^a \Phi(x,h)\,dx$$
$$= \lim f(0,h) . \lim \int_0^a \Phi(x,h)\,dx.$$

In *Fourier*schen Integralen hat der so verallgemeinerte Hauptsatz eine weniger einfache Form und lautet:

$$(15.)\quad \int_0^\infty dy \int_0^a dx \left\{ f(x,y)\,\varphi(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \int_0^y dy\,\varphi(x,y) \right\} = \lim f(0,h) \int_0^\infty dy \int_0^a dx\,\varphi(x,y).$$

Folgendes Beispiel soll zeigen, wie dieser verallgemeinerte Hauptsatz dazu dienen kann neue *Dirichlet*sche Integrale darzustellen.

Wir setzen:

$$J = \int_0^a \frac{\Phi(\psi(x,h))}{\psi(x,h)}\,\frac{\partial \psi(x,h)}{\partial x}\,dx = \int_{\psi(0,h)}^{\psi(a,h)} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

Wenn $\psi(a, h)$ mit unendlich werdendem h gegen eine von a unabhängige, von $\lim \psi(0, h)$ verschiedene Grenze convergirt, so ist J ein *Dirichlet*sches Integral. Es sei:

$$\psi(x,h) = xh \cdot \frac{\alpha xh + \beta x + \gamma h + \varepsilon}{\alpha_1 xh + \beta_1 x + \gamma_1 h + \varepsilon_1},$$

$$\frac{\partial \psi(x,h)}{\partial x} = h \cdot \frac{x^2(\alpha h + \beta)(\alpha_1 h + \beta_1) + 2x(\alpha h + \beta)(\gamma_1 h + \varepsilon_1) + (\gamma h + \varepsilon)(\gamma_1 h + \varepsilon_1)}{(\alpha_1 xh + \beta_1 x + \gamma_1 h + \varepsilon_1)^2}.$$

Zunächst ist $\psi(0, h) = 0$, $\psi(a, \infty) = \infty$ und $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ wechselt von $x = 0$ bis $x = a$

sein Zeichen nicht. Mithin ist:

$$\lim\int_0^a \frac{\Phi(\psi(x,h))}{\psi(x,h)}\,\frac{\partial\psi(x,h)}{\partial x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

Nun schreiben wir $xh\psi_1(x,h)$ statt $\psi(x,h)$ und $h\psi_1'(x,h)$ statt $\frac{\partial\psi(x,h)}{\partial x}$, so dass:

$$J = \int_0^a \frac{\Phi(\psi(x,h))}{x}\cdot\frac{\psi_1'(x,h)}{\psi_1(x,h)}\,dx$$

wird. Ein Blick auf die Functionen $\psi_1(x,h)$ und $\psi_1'(x,h)$ lehrt, dass

$$f(x,h) = \frac{\psi_1(x,h)}{\psi_1'(x,h)}$$

eine stetige Function von x und h ist und für $x=0$ völlig bestimmt und eindeutig ist; wie man auch gleichzeitig x verschwinden und h unendlich werden lasse, findet man immer $\lim_{x=0,\,h=\infty} f(x,h) = 1$. Wendet man den verallgemeinerten Hauptsatz auf das Integral J an, so ergiebt sich:

$$\lim\int_0^a \frac{\psi_1(x,h)}{\psi_1'(x,h)}\cdot\frac{\Phi(\psi(x,h))}{x}\,\frac{\psi_1'(x,h)}{\psi_1(x,h)}\,dx = \lim\frac{\psi_1(x,h)}{\psi_1'(x,h)}\lim\int_0^a \frac{\Phi(\psi(x,h))}{x}\,\frac{\psi_1'(x,h)}{\psi_1(x,h)}\,dx,$$

oder endlich:

$$\lim\int_0^a \frac{dx}{x}\,\Phi\left(xh\cdot\frac{\alpha xh+\beta x+\gamma h+\varepsilon}{\alpha_1 xh+\beta_1 x+\gamma_1 h+\varepsilon_1}\right) = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

Diese Formel zeigt, dass der Factor von xh im Argument der Function Φ auf den Grenzwerth des Integrals ohne Einfluss ist, da man hat:

$$\lim\int_0^a \frac{dx}{x}\,\Phi(xh) = \lim\int_0^{ah} \frac{dx}{x}\,\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

Setzt man in jenem Integral ξ statt xh, so wird es:

$$\int_0^{ah} \frac{d\xi}{\xi}\,\Phi\left\{\xi\cdot\frac{\frac{1}{h}\left(\alpha\xi+\beta\frac{\xi}{h}+\varepsilon\right)+\gamma}{\frac{1}{h}\left(\alpha_1\xi+\beta_1\frac{\xi}{h}+\varepsilon_1\right)+\gamma_1}\right\},$$

und wenn man in der oberen Grenze und unter dem Integralzeichen $h=\infty$ setzt, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi}\,\Phi\left(\xi\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx,$$

also das nämliche Resultat. Ohne nähere Prüfung ist es indessen nicht erlaubt in der Grenze und unter dem Integralzeichen ein und dieselbe Grösse unend-

lich zu setzen, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, so dass die letztere Umformung keine Beweiskraft besitzt.

§. 6. Untersuchung eines Falles, wo die Function $f(x)$ die Bedingung des Hauptsatzes in Bezug auf ihr Unendlichwerden nicht erfüllt.

Wenn die Function $f(x)$ anders wie in der angegebenen Weise unendlich wird, so kann gleichwohl das *Dirichlet*sche Integral einen bestimmten Werth erhalten, nur sind dann besondere Untersuchungen nöthig, um diesen Werth festzustellen. Dies ist der Fall beim eigentlichen *Dirichlet*schen Integral $\int_0^a f(x)\frac{\sin hx}{\sin x}dx = \int_0^a \frac{xf(x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin hx}{x}dx$, wo die Function $F(x) = \frac{xf(x)}{\sin x}$ unendlich wird wie $\frac{1}{x-m\pi}$, so oft x ein Vielfaches von π erreicht. Ich werde nun das Integral $\int_0^a f(x)\frac{\sin hx}{\sin x}dx$ für einen beliebigen Werth von a ableiten.

Ich nehme an, eine Function $F(x)$ habe die Form $\frac{F_1(x)}{x-m\pi}$, wo $F_1(x)$ von $x=(m-1)\pi$ bis $x=(m+1)\pi$ endlich bleibt. Dann sei:

$$J = \int_0^a \frac{\sin hx}{x}\,\frac{F_1(x)}{x-m\pi}dx, \qquad a > m\pi.$$

Von diesem Integral betrachte ich den Theil, in dem $\frac{F_1(x)}{x-m\pi}$ unendlich wird, also ein Integral genommen von $m\pi-\alpha$ bis $m\pi+\alpha$. Wir haben alsdann:

$$\int_{m\pi-\alpha}^{m\pi+\alpha} \frac{\sin hx}{x}\,\frac{F_1(x)}{x-m\pi}dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin h(x+m\pi)}{x}\,\frac{F_1(x+m\pi)}{x+m\pi}dx.$$

Unter der Voraussetzung, dass h eine ganze Zahl ist, wird das letztere Integral:

$$(-1)^{mh}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin hx}{x}\cdot\frac{F_1(x+m\pi)}{x+m\pi}dx,$$

und wenn man h unendlich werden lässt, folgt:

$$J = (-1)^{mh}\pi\frac{F_1(m\pi)}{m\pi}.$$

Beim *Dirichlet*schen Integral ist $F(x) = \frac{xf(x)}{\sin x}$. Setzt man

$$\sin x = (x-m\pi)\{(-1)^m + (x-m\pi)^2\lambda(x)\},$$

wo $\lambda(x)$ für reelle x endlich bleibt, setzt man also:

$$F_1(x) = \frac{x f(x)}{(-1)^m + (x - m\pi)^2 \lambda(x)},$$

so wird:

$$(-1)^{mh} \pi \frac{F_1(m\pi)}{m\pi} = (-1)^{m(h+1)} \pi f(m\pi).$$

Hieraus folgt auf der Stelle durch die üblichen Zerlegungen:

$$(16.)\quad \begin{cases} \lim_{h=\infty \text{ gerade}} \int_0^a \frac{\sin hx}{\sin x} f(x)\,dx = \pi\{\tfrac{1}{2}f(0) - f(\pi) + f(2\pi) - \cdots + (-1)^l f(l\pi)\}, \\ \lim_{h=\infty \text{ ungerade}} \int_0^a \frac{\sin hx}{\sin x} f(x)\,dx = \pi\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \cdots + f(l\pi)\}, \end{cases}$$

wo $l\pi$ das grösste in a enthaltene Vielfache von π bedeutet.

III.

§. 7. Anwendung des *Hauptsatzes* auf Integrale der Form $\int_a^b f(x)\,\Phi(\lambda(x), h)\,dx$.

Der in §. 4 bewiesene *Hauptsatz* dient u. a. um eine noch allgemeinere Klasse von Integralen auszuwerthen. Ich nehme vom Integral

$$\int_{-a}^{+b} \Phi(x, h)\,dx = \int_0^a \Phi(-x, h)\,dx + \int_0^b \Phi(+x, h)\,dx$$

an, dass es mit ins Unbegrenzte wachsendem h einen von a und b unabhängigen, von 0 und ∞ verschiedenen Werth erreiche: Es soll also die Function Φ so beschaffen sein, dass sowohl $\int_0^a \Phi(-x, h)\,dx$ als $\int_0^a \Phi(+x, h)\,dx$ ein *Dirichlet*-sches Integral ist. Bei $\int_0^a \frac{\sin xh}{x}\,dx$, $\int_0^a dx\,h e^{-x^2 h^2}$, etc. findet dies Statt, dagegen nicht bei $\int_0^a dx\,h e^{-xh}$, etc. Folgender Bezeichnungen werde ich mich bedienen:

$$\lim \int_0^a \Phi(x, h)\,dx = A_+, \qquad \lim \int_0^a \Phi(-x, h)\,dx = A_-.$$

Alsdann ist:

$$\lim\int_{-a}^{+b}\Phi(x,h)\,dx = A_+ + A_-,\quad \lim\int_{-a}^{-b}\Phi(x,h)\,dx = \lim\int_{+a}^{+b}\Phi(x,h)\,dx = 0.$$

Die im Folgenden abzuleitende Erweiterung des *Hauptsatzes* besteht darin, dass ich zeigen werde, wie, wenn in $\int_a^b \Phi(x,h)f(x)\,dx$ das x in $\Phi(x,h)$ durch eine ganz beliebige Function $\lambda(x)$ ersetzt wird, man den Werth des Integrals

$$\lim\int\Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx$$

zwischen beliebigen Grenzen angeben kann.

Ich erinnere vorher an folgende demnächst besonders häufig anzuwendende Regel bei Substitutionen. Wenn $y = \lambda(x)$ in $\int_a^b F(\lambda(x))\,dx$ von $x = a$ bis $x = x_m$ wächst, von $x = x_m$ bis $x = b$ aber abnimmt, so ist

$$\int_a^b F(\lambda(x))\,dx = \int_{x=a,\,y=\lambda(a)}^{x=x_m,\,y=\lambda(x_m)} F(y)\frac{dy}{\lambda'(x)} - \int_{x=b,\,y=\lambda(b)}^{x=x_m,\,y=\lambda(x_m)} F(y)\frac{dy}{\lambda'(x)}.$$

Im zweiten Integral rechts ist $\lambda'(x)$ negativ und in beiden Integralen wächst y, das Argument der Integration von der unteren zur oberen Grenze.

Bei der Untersuchung des Integrals

$$\lim\int\Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx$$

wollen wir es nacheinander zwischen solchen Grenzen betrachten: 1) zwischen denen $\lambda(x)$ stetig und von 0 und ∞ verschieden bleibt, 2) zwischen denen $\lambda(x)$ unstetig wird, 3) zwischen denen $\lambda(x)$ unendlich wird, 4) zwischen denen $\lambda(x)$ verschwindet.

§. 8. Bestimmung von $\lim\int\Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx$, wenn $\lambda(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals nicht verschwindet.

Wir betrachten 1) ein solches Intervall von α bis β, wo $\lambda(x)$ weder unstetig noch unendlich wird und nicht verschwindet. Dieses Intervall theilen wir in solche Strecken $\alpha\ldots\alpha_1$, $\alpha_1\ldots\alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_{n-1}\ldots\beta$, in denen $\lambda(x)$ nur

wächst oder nur abnimmt. Wenn $\lambda(x)$ von α_p bis α_{p+1} wächst, so wird sein:

$$\int_{\alpha_p}^{\alpha_{p+1}} \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = \int_{\xi=\lambda(\alpha_p)}^{\xi=\lambda(\alpha_{p+1})} \Phi(\xi, h) \cdot \frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi.$$

In dem Integral rechts durchläuft $\frac{f(x)}{\lambda'(x)}$ die Werthe von $\frac{f(\alpha_p)}{\lambda'(\alpha_p)}$ bis $\frac{f(\alpha_{p+1})}{\lambda'(\alpha_{p+1})}$, während ξ von $\lambda(\alpha_p)$ bis $\lambda(\alpha_{p+1})$ geht.

Wenn nun $\frac{f(x)}{\lambda'(x)}$ im Intervall von $x = \alpha_p$ bis $x = \alpha_{p+1}$ nicht stärker unendlich wird, als zulässig ist, damit $\int_{\lambda(\alpha_p)}^{\lambda(\alpha_{p+1})} \frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi = \int_{\alpha_p}^{\alpha_{p+1}} f(x)\,dx$ endlich bleibe, so ist nach dem *Hauptsatz*

$$\lim \int_{\xi=\lambda(\alpha_p)}^{\xi=\lambda(\alpha_{p+1})} \Phi(\xi, h) \frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi = 0.$$

Ganz ebenso beweist man, dass $\lim \int_{\alpha_q}^{\alpha_{q+1}} \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx$ verschwindet, wenn $\lambda(x)$ von α_q bis α_{q+1} abnimmt. Daraus folgt dann:

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = 0,$$

wenn $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ endlich ist.

2) Der Fall, wo im Intervall von α bis β für x_1 eine Unstetigkeit von $\lambda(x)$ vorkommt, ist leicht zu erledigen. Man hat, wie üblich, das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx$ dann aufzufassen, als die Summe der Integrale $\int_{\alpha}^{x_1} + \int_{x_1}^{\beta}$, in deren Integrationsintervall keine Unstetigkeit mehr stattfindet.

3) Die Function $\lambda(x)$ werde für einen Werth $x = \alpha$ unendlich. Es gilt dieser Satz: Wenn eine Function $\lambda(x)$ von x für einen Werth $x = \alpha$ derart unendlich wird, dass sie von einem beliebig nahen Werth $\alpha \pm \varepsilon$ bis α nur wächst, so wird ihr Differentialquotient $\lambda'(x)$ für $x = \alpha$ ebenfalls unendlich und zwar stärker unendlich wie $\lambda(x)$. Dass $\lambda'(\alpha)$ unendlich wird, kann man leicht analytisch nachweisen, es leuchtet auch durch die geometrische Anschauung unmittelbar ein. Dass $\lambda'(x)$ stärker unendlich wird, wie $\lambda(x)$, folgt daraus, dass $\lambda'(x)$ überhaupt unendlich wird. Denn da mit λ auch $\log \lambda$, mit $\log \lambda$

auch $\frac{\lambda'}{\lambda}$ unendlich wird, so wird λ' stärker unendlich wie λ. Diese letztere Bemerkung brauchen wir indessen hier nicht. Wegen $\lambda(\alpha)=\infty$ haben wir:

$$\int_a^\alpha \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = \int_{\xi=\lambda(a)}^{\xi=\infty} \Phi(\xi,h)\frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi,$$

während ξ von $\lambda(a)$ bis ∞ geht, geht $\frac{f(x)}{\lambda'(x)}$ von $\frac{f(a)}{\lambda'(a)}$ bis Null. Wofern also $f(x)$ in der Strecke von a bis α die Bedingungen des *Hauptsatzes* erfüllt, ist stets:

$$\lim\int_a^\alpha \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = 0,$$

woraus dann durch Zerlegung folgt, dass das Integral $\lim\int_a^b$ wenn man über den Werth α, für welchen $\lambda(x)$ unendlich wird, hinwegintegrirt, gleichfalls verschwindet.

Die Resultate dieses § fassen wir in dem Satz zusammen:

Wenn $\lambda(x)$ in dem Intervall von $x=a$ bis $x=b$ nicht verschwindet, und $\int_a^b f(x)\,dx$ endlich ist, so ist:

$$17.)\quad \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = 0.$$

§. 9. Bestimmung von $\lim\int\Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx$, wenn $\lambda(x)$ zwischen den Grenzen der Integration verschwindet.

Wir untersuchen jetzt den Fall, wo $\lambda(x)$ für einen zwischen a und b gelegenen Werth α verschwindet, und setzen voraus, dass a und b so nahe an α liegen, dass $\lambda(x)$ in jeder der Strecken $a\ldots\alpha$, $\alpha\ldots b$ nur abnimmt oder nur zunimmt.

Wir betrachten zuerst das Integral

$$\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx.$$

Der numerische Werth von $\lambda(x)$ nimmt von α bis b zu, übrigens kann $\lambda(x)$ in diesem Intervall positiv oder negativ sein. Ist $\lambda(x)$ negativ, so wollen wir dafür schreiben $-\lambda_1(x)$, so dass $\lambda(x)$ und $\lambda_1(x)$ positive von $x=\alpha$ bis $x=b$

zunehmende Grössen vorstellen. Jenachdem $\lambda(x)$ positiv oder negativ ist, gilt also die obere oder die untere der Gleichungen:

$$\int_a^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = \int_{\xi=0}^{\xi=\lambda(b)} \Phi(\xi, h) \frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi,$$

$$\int_a^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = \int_{\xi=0}^{\xi=\lambda_1(b)} \Phi(-\xi, h) \frac{f(x)}{\lambda_1'(x)}\,d\xi,$$

wegen $\lambda(a) = 0$. Während ξ von 0 bis $\lambda(b)$ *respective* $\lambda_1(b)$ geht, durchlaufen $\frac{f(x)}{\lambda'(x)}$ und $\frac{f(x)}{\lambda_1'(x)}$ die Werthe von $\frac{f(a)}{\lambda'(a)}$ und $\frac{f(a)}{\lambda_1'(a)}$ bis $\frac{f(b)}{\lambda'(b)}$ und $\frac{f(b)}{\lambda_1'(b)}$. Wenn $\frac{f(a)}{\lambda'(a)}$ und $\frac{f(a)}{\lambda_1'(a)}$ endlich sind, hat man mithin nach dem *Hauptsatz:*

1) für $\lambda(a+da)$ positiv:

$$(18.)\qquad \lim \int_a^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = +\frac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)} A_+,$$

2) für $\lambda(a+da)$ negativ:

$$(19.)\qquad \lim \int_a^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = +\frac{f(a+0)}{\lambda_1'(a+0)} A_- = -\frac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)} A_-.$$

Was das Integral

$$\int_\alpha^a \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = \int_{\lambda(\alpha)}^0 \Phi(\xi, h) \frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi$$

betrifft, so nimmt der numerische Werth von $\lambda(x)$ von a bis α ab, oder ξ nimmt ab von $\lambda(\alpha)$ bis Null. Schreiben wir also wieder $-\xi$ und $-\lambda_1'(x)$, wenn $\lambda(a-da)$ negativ ist, so gilt, jenachdem $\lambda(a-da)$ positiv oder negativ ist, die obere oder untere der beiden Formeln:

$$(20.)\qquad \lim \int_\alpha^a \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = -\lim \int_0^{\lambda(\alpha)} \Phi(\xi, h) \frac{f(x)}{\lambda'(x)}\,d\xi = -\frac{f(a-0)}{\lambda'(a-0)} A_+,$$

$$(21.)\qquad \lim \int_\alpha^a \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx = -\lim \int_0^{\lambda_1(\alpha)} \Phi(-\xi, h) \frac{f(x)}{\lambda_1'(x)}\,d\xi = +\frac{f(a-0)}{\lambda'(a-0)} A_-,$$

Nun können vier Fälle eintreten: I. $\lambda(a-da) < 0 < \lambda(a+da)$, II. $\lambda(a-da) > 0 > \lambda(a+da)$, III. $\lambda(a+da) > 0$, $\lambda(a+da) > 0$, IV. $\lambda(a-da) < 0$, $\lambda(a+da) < 0$. Man erhält in diesen vier Fällen für das Integral

$$\int_\alpha^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\,dx$$

folgende Werthe:

$$(22.)\quad \begin{cases} \text{I.} & +\dfrac{f(a-0)}{\lambda'(a-0)}A_- + \dfrac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)}A_+, \\ \text{II.} & -\dfrac{f(a-0)}{\lambda'(a-0)}A_- - \dfrac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)}A_+, \\ \text{III.} & -\dfrac{f(a-0)}{\lambda'(a-0)}A_+ + \dfrac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)}A_+, \\ \text{IV.} & +\dfrac{f(a-0)}{\lambda'(a-0)}A_- - \dfrac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)}A_-. \end{cases}$$

Nun kann $\lambda(x)$ noch für $x=a$ und für $x=b$ verschwinden. Man erhält dann nach dem Früheren die Werthe:

$$(23.)\quad \begin{cases} 1.) & \lambda(a)=0,\ \lambda(a+da)>0,\ \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = +\dfrac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)}A_+, \\ & \lambda(a)=0,\ \lambda(a+da)<0,\ \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = -\dfrac{f(a+0)}{\lambda'(a+0)}A_-, \\ 2.) & \lambda(b)=0,\ \lambda(b-db)>0,\ \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = -\dfrac{f(b-0)}{\lambda'(b-0)}A_+, \\ & \lambda(b)=0,\ \lambda(b-db)<0,\ \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx = +\dfrac{f(b-0)}{\lambda'(b-0)}A_-. \end{cases}$$

§. 10. Werthbestimmung des Integrals $\lim\int \Phi(\lambda(x),h)f(x)dx$, wenn $\lambda(x)$ zwischen den Grenzen der Integration einen ganz beliebigen Verlauf hat.

Die Ergebnisse der beiden vorigen Paragraphen reichen aus um den Werth des Integrals

$$\int_a^b \Phi(\lambda(x),h)f(x)\,dx$$

zwischen beliebigen Grenzen a und b, und wenn $\lambda(x)$ im Integrationsintervall einen beliebigen Verlauf hat, anzugeben. Nur imaginäre Werthe gestatten die der Werthbestimmung zu Grunde liegenden Convergenzbedingungen im Allgemeinen nicht.

Nehmen wir insbesondere an, dass $\lambda(x)$ eine beliebige gesetzmässige oder gesetzlose Function von x ist, die zwischen den Grenzen a und b beliebig stark unendlich werden darf, und welche für die Werthe

$$a,\ b,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n,\ \ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_m,$$

von x verschwindet, und zwar so, dass $\lambda(x)$ beim Durchgang durch eine Wurzel α wächst, beim Durchgang durch eine Wurzel β abnimmt, nehmen wir ferner an, dass $\frac{f(x)}{\lambda'(x)}$ in den Wurzeln α und β stetig ist, und $\lambda'(x)$ dort nicht verschwindet, so ist:

$$(24.)\quad \begin{cases} \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\, dx \\ = \pm\frac{f(a)}{\lambda'(a)} A_{\pm} \mp \frac{f(b)}{\lambda'(b)} A_{\pm} + (A_+ + A_-) \sum_{p=1}^{p=n} \frac{f(\alpha_p)}{\lambda'(\alpha_p)} - (A_+ + A_-) \sum_{p=1}^{p=m} \frac{f(\beta_p)}{\lambda'(\beta_p)}, \end{cases}$$

wo in $\pm\frac{f(a)}{\lambda'(a)} A_{\pm}$ und $\mp\frac{f(b)}{\lambda'(b)} A_{\pm}$ das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\lambda(a+da)$ und $\lambda(b-db)$ positiv oder negativ ist. Verschwindet $\lambda(a)$ oder $\lambda(b)$ nicht, so fallen die bezüglichen Terme fort.

Der in §. 4 bewiesene *Hauptsatz* folgt aus diesem Satz zurück, wenn man $\lambda(x) = x$ setzt, da dann $\lambda(x)$ für $x = 0$ verschwindet, $\lambda'(x) = 1$ ist, und $\lambda(x)$ beim Durchgang durch $x = 0$ wächst.

Wenn $f(x)$ in den Wurzeln von $\lambda(x) = 0$ von 0 und ∞ verschieden ist, sind die Terme der Summe nur dann von 0 und ∞ verschieden, wenn $\lambda(x)$ für $x = \alpha_p$, $x = \beta_p$ wie $x - \alpha_p$ oder $x - \beta_p$ verschwindet.

Nimmt man an, $\lambda(x)$ sei stetig, werde nicht unendlich und habe nur die Wurzeln α_p und β_p, in denen es sein Zeichen wechselt, so folgen sich die Wurzeln α_p und β_p auf diese Weise $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$, wenn α_1 die kleinste Wurzel im Intervall $a \ldots b$ ist. Schreibt man statt dieser letzteren Reihenfolge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ und nimmt an, dass $\lambda(a)$ und $\lambda(b)$ nicht verschwinden, so hat man:

$$(25.)\quad \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x), h) f(x)\, dx = (A_+ + A_-)\left\{\frac{f(\varrho_1)}{\lambda'(\varrho_1)} - \frac{f(\varrho_2)}{\lambda'(\varrho_2)} + \cdots\right\}.$$

Setzt man nun $f(x) = \lambda'(x) F(x)$, so folgt hieraus:

$$(26.)\quad \lim\int_a^b \Phi(\lambda(x), h) F(x)\, d\lambda(x) = (A_+ + A_-)\{F(\varrho_1) - F(\varrho_2) + \cdots\},$$

eine sehr allgemeine Summationsformel für einfach alternirende Reihen.

Diese Resultate sind noch einer Verallgemeinerung fähig, wenn nämlich λ und f als Functionen von x und h angesehen werden, die mit ins Unbegrenzte wachsendem h gegen bestimmte Functionen von x convergiren. Indessen gehe ich auf diese Allgemeinheiten, die erforderlichen Falls mit Hülfe der dargelegten Principien leicht ihre Erledigung finden, nicht weiter ein. Ich werde nur noch zeigen, dass die *Fourier*sche Formel in ihrer gewöhnlichen

Gestalt als ein sehr specieller Fall der obigen allgemeinen Formel anzusehen ist. Denn $\int_0^h \varphi(x,y)\,dy = \Phi(x,h)$ gesetzt, hat man:

$$\int_0^\infty dy \int_a^b dx\, \varphi(\lambda(x),y) f(x) = \lim \int_a^b \Phi(\lambda(x),h) f(x)\,dx.$$

Wir setzen $\lambda(x) = x-\alpha$. Von α nehmen wir an, dass es zwischen a und b liegt. Dann verschwindet $\lambda(x)$ zwischen den Grenzen a und b nur einmal und zwar für $x=\alpha$, durch welchen Werth es wachsend hindurchgeht. Wegen $\lambda'(\alpha)=1$ wird also:

$$+(A_+ + A_-)\sum_{p=1}^{p=n} \frac{f(\alpha_p)}{\lambda'(\alpha_p)} = (A_+ + A_-) f(\alpha).$$

Setzt man dann $\varphi(x,y) = \cos(xy)$, so wird $A_+ + A_- = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$, und $\int_0^\infty dy \int_a^b dx \cos(y(x-\alpha)) f(x) = \pi f(\alpha)$, welche Formel für $a=-\infty$, $b=+\infty$ in die *Fourier*sche Formel übergeht. Ich bemerke noch, dass wenn $\lambda_1(x)$ für keinen reellen Werth von x verschwindet, der *Fourier*schen Formel die in den Anwendungen manchmal nützliche Form

$$\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(y\lambda_1(x)(x-\alpha)) f(x) = \pi \frac{f(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)}$$

gegeben werden kann.

IV.

Untersuchung der Convergenz des von der Ebene $z=0$ und der Oberfläche $z=\varphi(xy)$ eingeschlossenen Volums.

§. 11. Allgemeine Vorbemerkungen.

Wir würden uns nicht eines vollen Verständnisses der analytischen Eigenschaften der *Fourier*schen Doppelintegrale erfreuen, wenn wir es uns versagten, die Convergenz der von ihnen dargestellten Volumina, wenigstens im einfachsten Fall, wo im Integral $\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi$ die Function φ nur das Product xy enthält, eingehender zu untersuchen. Voraus schicke ich einige hauptsächlich

*Dirichlet*schen Erörterungen entnommene Begriffsbestimmungen über Convergenz der Volumina.

Das zu betrachtende Volumen sei begrenzt von einer Oberfläche $z=\varphi(x,y)$, von der Ebene $z=0$, den Ebenen $x=0$, $y=0$ und einer Cylinderfläche $\mu(x,y)=0$, welche die xy-Ebene in der Curve $\mu(x,y)=0$ schneidet, von der ich annehme, dass sie von allen vom Punkt $x=0$, $y=0$ im positiven Quadranten ausgehenden Radienvectoren einmal aber nur einmal geschnitten wird. Die Gestalt der Begrenzungscurve $\mu(x,y)=0$ denken wir uns variabel. Das Volumen ist alsdann *absolut* convergent, wenn es sich stets einem endlichen Grenzwerth nähert, man mag die Radienvectoren alle oder zum Theil und zwar mit beliebig verschiedener Stärke unendlich werden lassen. Diese Definition ist im Princip identisch mit der, dass das Volum absolut convergent ist, wenn es auch convergirt, seine negativen Bestandtheile als positiv in Rechnung gezogen. Wenn das Volum sich verschiedenen Grenzen oder keiner festen Grenze nähert, je nach dem Unendlichwerden der Radienvectoren der Curve $\mu(x,y)$, ist das Volum *bedingungsweise convergent*, endlich wenn es keine Art des Unendlichwerdens der Radienvectoren giebt, für die das Volum sich einer festen Grenze nähert, ist es *divergent*. In unserem Falle liegt eine sehr merkwürdige bedingungsweise Convergenz vor.

Was zunächst den Bau der Oberfläche $z=\varphi(xy)$ anbelangt, so sind ihre Niveaulinien Hyperbeln, deren Gleichung $xy=$ constans ist. Somit hat z. B. die Oberfläche $z=\cos(xy)$ im Allgemeinen folgende Gestalt: In den beiden Coordinatenaxen x und y ist $z=1$, von da ab setzt sich die Oberfläche wellig in die vier Quadranten fort. Im positiven Quadranten geht die Oberfläche durch die xy-Ebene in der Hyperbel $xy=\frac{\pi}{2}$, fällt bis zum Minimum $z=-1$ in der Hyperbel $xy=\pi$, geht dann wieder durch die xy-Ebene in der Hyperbel $xy=\frac{3\pi}{2}$, u. s. f. In den übrigen Quadranten ist die Gestalt der Oberfläche ganz ähnlich. Die Schnittcurve der Oberfläche mit einer Ebene, in der x oder y constant ist, ist allemal eine Cosinuswellenlinie mit congruenten Wellen. Betrachten wir zweitens die Oberfläche $z=e^{-xy}(1-xy)$. Sie beginnt mit $z=1$ über den Axen x und y, verläuft dann über der xy-Ebene bis zur Hyperbel $xy=1$, geht dort unter die xy-Ebene, und verbleibt darunter, um sich ihr im Unendlichen asymptotisch zu nähern. Ihr negatives Maximum fällt in die Hyperbel $xy=2$, wo z den Werth $\frac{1}{e^2}=0{,}13535\ldots$ erhält.

§. 12. Einfachste Fälle der Convergenz des Volums unter der Oberfläche $z = \varphi(xy)$.

Unsere Untersuchung des Volums $\int\int dx\, dy\, \varphi(xy)$ wird darin bestehen, dass wir eine Anzahl solcher Volumina mit verschiedenartigen Begrenzungen bestimmen.

1. Die Basis des Volums sei begrenzt durch die Linien

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = h, \quad x = a.$$

Dann ist das Volum:

$$\int_0^h dy \int_0^a dx\, \varphi(xy) = \int_0^{ah} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx,$$

(wenn wir wieder $\int_0^x \varphi(x)\, dx = \Phi(x)$ setzen). Dieses Volum convergirt, ob man a endlich lässt und h unendlich werden lässt, oder umgekehrt verfährt, oder a und h gleichzeitig unendlich werden lässt, gegen die nämliche Grenze $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$. Dieses Resultat hat geometrisch etwas Befremdendes, da wir wissen, dass der an $x = 0$ anliegende unendlich schmale Streifen für sich allein gegen $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$ convergirt, wenn er ins Unendliche verlängert wird. Nun muss der völlig symmetrische, an $y = 0$ anliegende Streifen gegen die nämliche Grenze convergiren, so dass das Volum über dem Rechteck $x = 0$, $y = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$, welches beide Streifen enthält, gegen den doppelten Werth dieser Grenze convergiren müsste. Folgende Zerlegung klärt hierüber auf.

2. Die Basis soll zu Begrenzungen haben die Linien:

$$x = a, \quad y = 0, \quad y = \alpha x.$$

Dann ist das Volum:

$$\int_0^a dx \int_0^{\alpha x} dy\, \varphi(xy) = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha a^2} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$$

und convergirt für jeden von Null verschiedenen Werth von α mit wachsendem a gegen

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\, dx.$$

Es wird die nämliche Grenze erreichen, auch wenn der Winkel, dessen Tangente α ist, während a ins Unendliche wächst, verschwindet, wenn nur αa^2

unendlich wird. Convergirt dieser Winkel aber gegen 90°, so wird α unendlich, und das Volum wird dann für jeden Werth von a durch $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$ gemessen. Für das Volum über dem Dreieck:

$$x = 0, \quad y = h, \quad y = \alpha x$$

hat man:

$$\int_0^h dy \int_0^{\frac{y}{\alpha}} dx\,\varphi(xy) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{h^2}{\alpha}} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx,$$

und hier gelten ganz ähnliche Schlüsse wie bei dem vorigen Volum. Es convergirt für $h = \infty$ und für $\alpha = 0$ gegen $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$.

Wenn man also irgend ein Rechteck

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = h$$

hat und zerlegt es vermittelst seiner den Punkt $x = 0$, $y = 0$ enthaltenden Diagonale in zwei Dreiecke, so sind, da die Integrale:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\alpha a^2} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx, \qquad \frac{1}{2}\int_0^{\frac{h^2}{\alpha}} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$$

für $\alpha = \frac{h}{a}$ einander gleich werden, die Volumina über diesen Dreiecksflächen einander gleich, der Endpunkt $x = a$, $y = h$ der Diagonale mag im Endlichen oder im Unendlichen liegen. Rückt er auf irgend einem Wege im positiven Quadranten ins Unendliche, so convergiren die Volumina über den Dreiecken jedes gegen $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$, mithin das Volum über dem Rechteck gegen $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$.

§. 13. Volumina mit krummlinig begrenzter Basis. Einführung von Polarcoordinaten.

Um die ferneren Volumina bestimmen zu können, führen wir Polarcoordinaten ein, und setzen $x = r\cos v$, $y = r\sin v$.

3. Auf einer Basis, deren Begrenzungen sind ein Kreisbogen mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $x = 0$, $y = 0$ und die Geraden:

$$y = 0, \quad y = x\,\mathrm{tg}\,V$$

steht dies Volum:

$$\int_0^V dv \int_0^R r\,dr\,\varphi(r^2 \sin v \cos v) = \tfrac{1}{2}\int_0^V dv \int_0^{R^2} d\varrho\,\varphi(\varrho \sin v \cos v) = \tfrac{1}{2}\int_0^V dv \frac{\Phi(R^2 \sin v \cos v)}{\sin v \cos v}.$$

Um das Integral rechts für $R = \infty$ und spätere ihm ähnliche auszuwerthen, erinnere ich an die §. 10 gefundene Formel, welche dem vorliegenden Zwecke gemäss eingerichtet, also lautet:

$$\lim \int_a^b \frac{\Phi(\lambda(x)h)}{\lambda(x)} f(x)\,dx = \pm \frac{f(a)}{\lambda'(a)} A_\pm \mp \frac{f(b)}{\lambda'(b)} A_\pm,$$

wo in $\pm \frac{f(a)}{\lambda'(a)} A_\pm$ und $\mp \frac{f(b)}{\lambda'(a)} A_\pm$ das obere oder das untere Zeichen zu setzen ist, jenachdem $\lambda(a+da)$ und $\lambda(b-db)$ positiv oder negativ ist. Es ist:

$$A_+ = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx, \qquad A_- = \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

In dem Integrale, welches wir bestimmen wollen,

$$\tfrac{1}{2}\int_0^V dv \frac{\Phi(R^2 \sin v \cos v)}{\sin v \cos v},$$

steht $\sin v \cos v$ statt $\lambda(x)$ und $f(x)$ ist Eins. Ferner verschwindet $\sin v \cos v$ in dem Intervall von $v = 0$ bis $v = V$ $(V < \frac{1}{2}\pi)$ nur für $v = 0$. Der Term $\frac{f(b)}{\lambda'(b)} A_\pm$ fällt demnach fort, und es ist:

$$\tfrac{1}{2}\lim_{R^2=\infty} \int_0^V dv \frac{\Phi(R^2 \sin v \cos v)}{\sin v \cos v} = \tfrac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial v}(\sin v \cos v)_{v=0}} \cdot A_+ = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx,$$

da $\sin(0+dv)\cos(0+dv)$ positiv ist. Ganz auf dieselbe Weise findet man:

$$\lim_{R^2=\infty} \int_V^{\frac{1}{2}\pi} dv \int_0^R r\,dr\,\varphi(r^2 \sin v \cos v) = \tfrac{1}{2}\lim_{R^2=\infty} \int_V^{\frac{1}{2}\pi} dv \frac{\Phi(R^2 \sin v \cos v)}{\sin v \cos v}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial v}(\sin v \cos v)_{v=\frac{1}{2}\pi}} A_+ = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

4. Die Basis des Volums soll begrenzt sein durch die Linien:

$$y = 0, \qquad y = x \operatorname{tg} V, \qquad y = \frac{h}{a}(a-x),$$

welche letztere die x-Axe im Punkte $x = a$, die y-Axe im Punkte $y = h$

schneidet. Dies Volum ergiebt sich in Polarcoordinaten:

$$\int_0^V dv \int_0^{\frac{ah}{a\sin v + h\cos v}} r\,dr\,\varphi(r^2 \sin v \cos v) = \tfrac{1}{2}\int_0^V \frac{\Phi\left(\frac{(ah)^2}{(a\sin v + h\cos v)^2}\sin v\cos v\right)}{\sin v\cos v}\,dv.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\frac{a}{h} = b$ eine endliche Grösse bleibt, wenn a und h unendlich werden, lässt sich das Integral rechts mit der nämlichen Formel behandeln wie die vorigen. Wir schreiben es:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^V \frac{\Phi\left(h^2\,\frac{b\sin v\cos v}{b\sin v + \cos v}\right)}{\frac{b\sin v\cos v}{b\sin v + \cos v}} \cdot \frac{b}{b\sin v + \cos v}\,dv.$$

Hierin steht $\frac{b\sin v\cos v}{b\sin v + \cos v}$ für $\lambda(x)$, verschwindet in dem Intervall $0 \ldots V$ nur für $v = 0$, und ist für $v = 0 + dv$ positiv. Ferner steht $\frac{b}{b\sin v + \cos v}$ für $f(x)$, also ist die Grenze dieses Integrals für $h^2 = \infty$

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{\frac{b}{b\sin v + \cos v}}{\frac{\partial}{\partial v}\frac{b\sin v\cos v}{b\sin v + \cos v}}\right]_{v=0} \cdot A_+ = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx.$$

Ganz auf dieselbe Weise würde man entwickeln:

$$\int_V^{\frac{1}{2}\pi} dv \int_0^{\frac{ah}{a\sin v + h\cos v}} r\,dr\,\varphi(r^2\sin v\cos v) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx,$$

ein Volum, welches begrenzt ist von den Linien:

$$x = 0, \quad y = x \operatorname{tg} V, \quad y = \frac{h}{a}(a - x).$$

5. Die bisher bestimmten Volumina convergirten stets gegen dieselben Grenzwerthe. Bei folgenden Basalbegrenzungen findet dies nicht mehr statt.

Die Begrenzungen der Basis seien die Geraden $x = a$, $x = b$ und die Hyperbeln $xy = \alpha$ und $xy = \beta$. Das Volum ist:

$$\int_a^b dx \int_{\frac{\alpha}{x}}^{\frac{\beta}{x}} dy\,\varphi(xy) = \{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\}\log\left(\frac{b}{a}\right),$$

und ist also stets divergent, wenn wir $a = 0$ oder $b = \infty$ setzen, oder beides

zugleich thun, und wird für $\beta = \infty$ unbestimmt, wenn $\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x} dx$ alternirend convergirt.

Wählen wir zu Begrenzungen der Volumbasis die Linien $y = x \operatorname{tg} V_0$, $y = x \operatorname{tg} V_1$, $xy = \alpha$, so finden wir für das Volum:

$$\int\limits_{V_0}^{V_1} dv \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\sin v \cos v}}} r\,dr\,\varphi(r^2 \sin v \cos v) = \Phi(\alpha) \int\limits_{2V_0}^{2V_1} \frac{dv}{\sin v}.$$

Dies Volum wird also bei alternirender Convergenz von $\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x} dx$ ebenfalls unbestimmt und wird unendlich für $V_0 = 0$ oder $V_1 = \frac{1}{2}\pi$.

§. 14. Verallgemeinerung der bisherigen Resultate. Definition der Convergenz im allgemeinen Falle.

Alle diese einzelnen Volumbestimmungen sind enthalten in der einen folgenden, die der Schlüssel zu der betrachteten Convergenz ist.

6. Die Basis des Volums habe die Begrenzungen:

$$y = 0, \qquad y = x \operatorname{tg} V, \qquad R = \sqrt{h\psi(v)},$$

wo $R = \frac{x}{\cos v} = \frac{y}{\sin v}$ den Radiusvector einer die beiden Schenkel $y = 0$, $y = x \operatorname{tg} V$ verbindenden Curve bedeutet. Mit Hülfe der schon mehrfach benutzten Formel hat man dann:

$$\int\limits_0^V dv \int\limits_0^{\sqrt{h\psi(v)}} r\,dr\,\varphi(r^2 \sin v \cos v) = \frac{1}{2} \int\limits_0^V \frac{\Phi(h\psi(v) \sin v \cos v)}{\psi(v) \sin v \cos v} \psi(v)\,dv,$$

und das Integral rechter Hand convergirt für $h = \infty$ gegen:

$$(27.) \qquad \frac{1}{2} \left[\frac{\psi(v)}{\frac{\partial}{\partial v}(\psi(v) \sin v \cos v)} \right]_{v=0} A_+ = \frac{\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x} dx}{2 + \left[\sin 2v \frac{\psi'(v)}{\psi(v)} \right]_{v=0}}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks ist die Convergenz des Volums leicht zu discutiren.

Wenn $\psi(v)$ zunächst für $v = 0$ verschwindet, so kann der Ausdruck rechter Hand verschiedene Werthe annehmen. Für $\psi(v) = v$ z. B. wird er $\frac{1}{4} \int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x} dx$, für $\psi(v) = e^{-\frac{1}{v}}$ wird er Null. Wenn $\psi(v)$ und $\psi'(v)$ von Null

verschieden bleiben für $v=0$, ist sein Werth stets $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}dx$. Wird ferner $\psi(v)$ für $v=0$ unendlich, so ist der Werth des Ausdrucks ein anderer je nach der Stärke des Unendlichwerdens von $\psi(v)$. Setzen wir zunächst $\psi(v)=\frac{\Theta(v)}{v^\mu}$ und

$$\frac{\psi'(v)}{\psi(v)}=\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}-\frac{\mu}{v}$$

und nehmen $\Theta(v)$ so an, dass $\Theta(0)$ und $\Theta'(0)$ endlich seien. Dann wird der Werth des Ausdrucks (27.):

$$\frac{1}{2(1-\mu)}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}dx,$$

der also gegen Unendlich convergirt, wenn μ sich der Eins nähert. Gleich Eins oder grösser als Eins darf man μ nicht setzen, weil dann $\psi(v)\sin v\cos v$ für $v=0$ keine Wurzel mehr hat und die allgemeine Formel also nicht gilt. Statt $\psi(v)=\frac{\Theta(v)}{v}$ zu setzen, kann man dafür $\frac{\vartheta(v)}{\sin v\cos v}$ schreiben, wo $\vartheta(v)$ für $v=0$ nicht verschwindet, und dann hat man:

$$\int_0^V dv\int_0^{\sqrt{\frac{h\vartheta(v)}{\sin v\cos v}}} r\,dr\,\varphi(r^2\sin v\cos v)=\int_0^{2V}\frac{\Phi(h\vartheta(\frac{1}{2}v))}{\sin v}dv.$$

Das Integral rechts ist unendlich, wie man sofort sieht, wenn man einen mittleren Werth von $\Phi(h\vartheta(\frac{1}{2}v))$ vor das Integral nimmt.

Verschwindet $\vartheta(v)$ mit v, so erhält der vorstehende Ausdruck keinen allgemein angebbaren Werth mehr. Sein Werth hängt dann von der Beschaffenheit der Function Φ ab. Es sei z. B. $\Phi(x)=xe^{-x}$, $\vartheta(\frac{1}{2}v)=\frac{1}{v}$, so wird das Integral:

$$\int_0^{2V}\frac{\Phi(h\vartheta(\frac{1}{2}v))}{\sin v}dv=\int_0^{2V}\frac{he^{-\frac{h}{v}}}{v\sin v}dv$$

und verschwindet für $h=\infty$.

Im Intervall 0 excl. ... v darf $\psi(v)$ beliebig stark unendlich werden. Denn da in diesem Fall $\psi(v)\sin v\cos v$ für $\lambda(x)$, und $\psi(v)$ für $f(x)$ steht, $\lambda'(x)$ aber stärker unendlich wird als $\lambda(x)$, so wird $\frac{\psi(v)}{\frac{\partial}{\partial v}(\psi(v)\sin v\cos v)}$ im angegebenen Intervall den Bedingungen des Hauptsatzes genügen (§. 4).

Somit kennen wir jetzt die Beschaffenheit der Convergenz des Volums, dessen Basis zu Begrenzungen hat die Linien $y=0$, $y=x\operatorname{tg}V\,(V<\frac{1}{2}\pi)$ und

eine diese beiden Linien verbindende, derart ins Unendliche rückende Curve, dass das Verhältniss ihrer Radienvectoren vom Punkt $x=0$, $y=0$ aus constant bleibt.

Wenn diese Curve eine Hyperbel ist, so divergirt das Volum. Wenn das Verhältniss des Radiusvector $y=0$ zu den übrigen unendlich ist, so ist das Volum divergent, oder sein Werth hängt vom Grad der Unendlichkeit dieses Verhältnisses ab. Wenn endlich das Verhältniss des Radiusvector $y=0$ zu den übrigen endlich ist, so ist das Volum convergent, und convergirt, welches auch die Gestalt der ins Unendliche rückenden Curve und der Werth von $V < \frac{1}{2}\pi$ sei, gegen dieselbe Grenze $\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$. Wenn man also den positiven Quadranten der xy-Ebene durch zwei den Punkt $x=0$, $y=0$ enthaltende Gerade g_1 und g_2 in drei Theile theilt, und zwar so, dass die Gerade g_1 mit der x-Axe, die Gerade g_2 mit der y-Axe einen unendlich kleinen Winkel einschliesst: so ist die Grenze des Volums über der Basis zwischen g_1 und der x-Axe und einer beide Linien unter endlichem Winkel schneidenden ins Unendliche rückenden Linie $\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$. Derselben Grenze nähert sich auch das Volum auf der Basis zwischen g_2, der y-Axe und einer diese beiden Linien verbindenden, ins Unendliche rückenden Linie. Das Volum über der dritten Basis zwischen g_1 und g_2 und einer beliebigen g_1 und g_2 verbindenden ins Unendliche rückenden Linie ist Null.

Ich muss schliesslich noch hervorheben, dass, wie dies aus der Werthbestimmung ad 1. hervorgeht, $\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$ auch die Grenze ist des Volums über einer Basis zwischen den Geraden $x=0$, $y=h$, $y=x\frac{h}{a}$, wenn man h constant und beliebig klein sein lässt, und a unendlich wird. Dies ist aber nur ein besonderer Fall (auf dem übrigens die Anwendung des Integrals zur Darstellung willkürlicher Functionen beruht) und die Begrenzung $y=h$ der Basis kann nicht durch eine andere ersetzt werden, ohne dass die Grenze des Volums sich ändert. Denn wenn für h eine Function $\psi(x)$ von x gesetzt wird, so ist das Volum über der durch die Linien

$$y=0,\quad y=\psi(x),\quad x=0,\quad x=a$$

begrenzten Basis:

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\psi(x)} dy\,\varphi(xy) = \int\limits_0^a dx\,\frac{\Phi(x\varphi(x))}{x}\,dx = \int\limits_0^{a\psi(a)} d\xi\,\frac{\Phi(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\psi(x)}{\frac{\partial}{\partial x}\,x\psi(x)}$$

und convergirt für $a=\infty$ (wenn nicht besondere Annahmen über die Function Φ gemacht werden) nur dann gegen $\int_0^\infty \frac{\Theta(\xi)}{\xi}\,d\xi$, wenn $\lim_{a=\infty} a\psi(a)=\infty$ und $\frac{\psi(x)}{\frac{\partial}{\partial x}x\psi(x)}=1$ ist. Die letztere Bedingung wird aber nur durch $\psi(x)=\text{const.}$ erfüllt.

Diese Discussion der Convergenz des Volums unter der Oberfläche $s=\varphi(xy)$ ist allerdings noch nicht ganz allgemein. Es wäre im allgemeinsten Falle ein Doppelintegral zu behandeln, wo, statt wie ad 6. $\sqrt{h\psi(s)}$ die obere Grenze der Integration nach r war, als obere Grenze eine beliebige, mit h unendlich werdende Function $\psi(h,\nu)$ angenommen würde. Da aber diese allgemeinere Annahme, die mit Hülfe der am Schluss des §. 10 angedeuteten Erweiterung des dort gegebenen Theorems der Analyse zugänglich ist, bei viel umständlicheren Räsonnements nichts wesentlich Neues ergiebt, und ihre Erledigung nicht ohne bedeutende Ausdehnung dieser Abhandlung möglich zu sein scheint, so ziehe ich es vor, darauf nicht weiter einzugehen.

Heidelberg, im Februar 1868.

Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Verschiedene physikalische Untersuchungen führen auf analytische Aufgaben, die in der folgenden Forderung enthalten sind. Wenn ein Ort im Raume durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, und wenn für das Innere eines gewissen endlichen Raumes T die eindeutigen, endlichen und stetigen Functionen des Ortes u, v, w, g gegeben sind, so sollen vier Functionen $P, P_{23}, P_{31}, P_{12}$ gefunden werden, die den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P_{12}}{\partial y}-\frac{\partial P_{31}}{\partial z}, \\ v &= -\frac{\partial P_{12}}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P_{23}}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial P_{31}}{\partial x}-\frac{\partial P_{23}}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}, \\ g &= \frac{\partial P_{23}}{\partial x}+\frac{\partial P_{31}}{\partial y}+\frac{\partial P_{12}}{\partial z} \end{aligned}$$

genügen. Herr *Helmholtz* hat in dem Aufsatze „über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen" (Bd. 55 dieses Journals, p. 25) diese Aufgabe gestellt und aufgelöst, indem er voraussetzt, dass für jeden Punkt von T die Function g gleich der Null sei, und die Functionen u, v, w die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

befriedigen, dass ferner für jeden Punkt der den Raum T begrenzenden Oberfläche S, wenn die von dem Raume T nach aussen gezogene Flächennormale n mit den positiven Axen der x, y, z beziehungsweise die Winkel α, β, γ bildet, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\gamma = 0$$

erfüllt sei. Mit der alleinigen Einschränkung, dass die Function g überall gleich der Null sei, ist das obige Problem von *Roch* in seiner Dissertation „Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molecularphysikalischen

Fernwirkungen etc." (Bd. 61 dieses Journals, p. 283) behandelt worden. Daselbst wird bemerkt, dass jede der Functionen P, P_{23}, P_{31}, P_{12} als das Aggregat von zwei Integralen ausgedrückt werden könne, von denen das eine über den Raum T, das andere über die Oberfläche S auszudehnen ist. Zugleich erfolgt eine analytische Bestimmung der betreffenden Raumintegrale und eine Deutung derselben, die sich nach dem Vorgange von Herrn *Helmholtz* auf die Analogie zu dem Wirkungsgesetze der ruhenden und der bewegten electrischen Massen stützt.

Die allgemeinere Fassung, die dem Problem oben gegeben ist, wird durch die Symmetrie der gegenwärtig zu entwickelnden Auflösung, wie ich glaube, gerechtfertigt erscheinen. *Die gefundenen Werthe der Functionen P, P_{23}, P_{31}, P_{12} treten in ihrer ersten Gestalt als Integrale auf, die sich über den Raum T erstrecken. Dadurch, dass jedes dieser Integrale in das Aggregat eines Raumintegrals und eines Oberflächenintegrals aufgelöst wird, entsteht eine zweite Gestalt der Auflösung. Die erste Gestalt bietet einen Gesichtspunkt zu einer physikalischen Deutung der vollständigen gefundenen Werthe der Functionen P, P_{23}, P_{31}, P_{12}. Die zweite Gestalt liefert die Form der Raumintegrale, welche in dem angeführten Rochschen Aufsatze unter der dort geltenden Voraussetzung angegeben und gedeutet ist, und die Form der Oberflächenintegrale, welche daselbst nicht bestimmt ist, aber in entsprechender Weise gedeutet werden kann.*

1.

Vor Erörterung des Problems wird es angemessen sein zu erwägen, welchen Charakter die allgemeinste Auflösung desselben habe. Gesetzt es seien $P = P$, $P_{23} = P_{23}$, $P_{31} = P_{31}$, $P_{12} = P_{12}$ und $P = Q$, $P_{23} = Q_{23}$, $P_{31} = Q_{31}$, $P_{12} = Q_{12}$ zwei Systeme von Auflösungen, so befriedigen die Differenzen $Q-P = \sigma$, $Q_{23}-P_{23} = \sigma_{23}$, $Q_{31}-P_{31} = \sigma_{31}$, $Q_{12}-P_{12} = \sigma_{12}$ das von den Werthen der gegebenen Functionen u, v, w, g unabhängige System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z}, \\
0 &= -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z}, \\
0 &= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \\
0 &= \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z},
\end{aligned}$$

welches bei Anwendung der Charakteristik $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ die vier Gleichungen $0 = \Delta\sigma$, $0 = \Delta\sigma_{23}$, $0 = \Delta\sigma_{31}$, $0 = \Delta\sigma_{12}$ nach sich zieht. Demnach sieht man, dass, wenn ein System von Auflösungen P, P_{23}, P_{31}, P_{12} mit allen Systemen von Auflösungen des vorstehenden Systems von Gleichungen σ, σ_{23}, σ_{31}, σ_{12}, verbunden wird, die Functionen $P+\sigma$, $P_{23}+\sigma_{23}$, $P_{31}+\sigma_{31}$, $P_{12}+\sigma_{12}$ die sämmtlichen Systeme von Auflösungen unserer Aufgabe und zwar jedes ein Mal darstellen. Wir werden daher nur ein einziges System von Functionen P, P_{23}, P_{31}, P_{12} aufsuchen, das unsere Aufgabe erfüllt.

Diese Absicht lässt sich erreichen, indem man annimmt, dass die Functionen P, P_{23}, P_{31}, P_{12} von vier neuen Functionen U, V, W, G in der folgenden Weise abhängen

$$(1^a.)\quad \begin{cases} P_{23} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \\ P_{31} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ P_{12} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}, \\ P = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \end{cases}$$

und verlangt, dass die Functionen U, V, W, G der aufgestellten Forderung gemäss bestimmt werden. Die Substitution dieser Ausdrücke in die gegebenen Gleichungen

$$(1^b.)\quad \begin{cases} u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y} - \frac{\partial P_{31}}{\partial z}, \\ v = -\frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P_{23}}{\partial z}, \\ w = \frac{\partial P_{31}}{\partial x} - \frac{\partial P_{23}}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}, \\ g = \frac{\partial P_{23}}{\partial x} + \frac{\partial P_{31}}{\partial y} + \frac{\partial P_{12}}{\partial z} \end{cases}$$

liefert dann die Gleichungen

$$(2.)\quad u = \Delta U, \quad v = \Delta V, \quad w = \Delta W, \quad g = \Delta G,$$

von denen jede zu der Bestimmung von einer der Functionen U, V, W, G geeignet ist. Wenn man festsetzt, dass eine Function f von x, y, z durch die Substitution $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ in die Function f' übergehe, dass der positive Werth $\sqrt{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)} = r$ sei, und dass das Volumen-

element $dx'dy'dz'$ mit dt' bezeichnet werde, so erfüllen bekanntlich die über den Raum T auszudehnenden Integrale

$$(3.)\quad \begin{cases} U = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{u'dt'}{r}, \quad V = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{v'dt'}{r}, \quad W = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{w'dt'}{r}, \\ G = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{g'dt'}{r} \end{cases}$$

die Gleichungen (2.).

Da die Functionen u, v, w, g nach der getroffenen Voraussetzung in dem Raume T eindeutig, endlich und stetig sind, so stellen die für U, V, W, G gefundenen Integrale Functionen dar, die mit Einschluss der nach x, y, z genommenen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung überall im Raume T eindeutig und endlich sind. Auch kann man bemerken, dass diese Integrale, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes bedeuten, der ausserhalb des Raumes T liegt, die partiellen Differentialgleichungen $0 = \Delta u$, $0 = \Delta v$, $0 = \Delta w$, $0 = \Delta g$ befriedigen. Indem man nun die Werthe von u, v, w, g in die Gleichungen (1^a.) substituirt, die Differentiationen nach x, y, z unter die Integralzeichen bringt, und daselbst durch Differentiationen nach x', y', z' ersetzt, so entsteht das folgende System von Functionen P, P_{23}, P_{31}, P_{12}, welches die gestellte Aufgabe löst,

$$(4.)\quad \begin{cases} P = \frac{1}{4\pi}\int\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)dt', \\ P_{23} = \frac{1}{4\pi}\int\left(g'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} - w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)dt', \\ P_{31} = \frac{1}{4\pi}\int\left(w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + g'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} - u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)dt', \\ P_{12} = \frac{1}{4\pi}\int\left(-v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + g'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)dt'. \end{cases}$$

Diese Functionen haben überdies die Eigenschaft, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes bezeichnen, der ausserhalb des Raumes T liegt, in die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (1^b.) eingesetzt, die Werthe Null zu produciren. Die angegebene Gestalt der Auflösung kann durch Anwendung einer theilweisen Integration, wie folgt, in eine andere verwandelt werden. Wenn das Element der Oberfläche S in dem Punkte (x', y', z') mit ds' be-

zeichnet wird, wenn die nach ds' auszuführende Integration sich auf die ganze Oberfläche S bezieht, wenn die in dem Punkte (x', y', z') von dem Raume T nach aussen gezogene Flächennormale n' mit den Axen der positiven x, y, z die Winkel α', β', γ' bildet, so hat man zunächst für einen Punkt (x, y, z), der ausserhalb T liegt, dann aber auch, wie leicht zu beweisen, für einen Punkt (x, y, z), der innerhalb T liegt, die Gleichung

$$\int u' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dt' = \int u' \cos\alpha' \frac{ds'}{r} - \int \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{dt'}{r}.$$

Wir setzen hier voraus, dass die nach x, y, z genommenen Differentialquotienten der Functionen u, v, w, g überall in T endliche Werthe haben. Werden die sämmtlichen Bestandtheile der für P, P_{23}, P_{31}, P_{12} gefundenen Ausdrücke durch die entsprechenden Gleichungen umgeformt, und führt man die folgenden Bezeichnungen ein

$$(5.)\quad \begin{cases} F = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{dt'}{r}, \\ F_{23} = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}-\frac{\partial w'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\frac{dt'}{r}, \\ F_{31} = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}+\frac{\partial g'}{\partial y'}-\frac{\partial u'}{\partial z'}\right)\frac{dt'}{r}, \\ F_{12} = -\frac{1}{4\pi}\int\left(-\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{\partial u'}{\partial y'}+\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)\frac{dt'}{r}, \end{cases}$$

und ferner

$$(6.)\quad \begin{cases} f = \frac{1}{4\pi}\int(u'\cos\alpha'+v'\cos\beta'+w'\cos\gamma')\frac{ds'}{r}, \\ f_{23} = \frac{1}{4\pi}\int(g'\cos\alpha'-w'\cos\beta'+v'\cos\gamma')\frac{ds'}{r}, \\ f_{31} = \frac{1}{4\pi}\int(w'\cos\alpha'+g'\cos\beta'-u'\cos\gamma')\frac{ds'}{r}, \\ f_{12} = \frac{1}{4\pi}\int(-v'\cos\alpha'+u'\cos\beta'+g'\cos\gamma')\frac{ds'}{r}, \end{cases}$$

so ergiebt sich diese zweite Gestalt der Auflösung

$$(7.)\quad P = F+f,\quad P_{23} = F_{23}+f_{23},\quad P_{31} = F_{31}+f_{31},\quad P_{12} = F_{12}+f_{12}.$$

Durch die Voraussetzung $g=0$ gehen F, F_{23}, F_{31}, F_{12} in die von *Roch* angegebenen Raumintegrale über, und demnach sind f, f_{23}, f_{31}, f_{12} die denselben als Ergänzung entsprechenden Oberflächenintegrale.

2.

Um die abgeleiteten Resultate mit der von Herrn *Helmholtz* gegebenen Auflösung des specielleren Problems zu vergleichen, kann man den folgenden Weg einschlagen. Es mögen die Grössen F, F_{23}, F_{31}, F_{12} aus (5.) in die Ausdrücke, die in (1^b.) rechts von den Gleichheitszeichen stehen, beziehungsweise statt P, P_{23}, P_{31}, P_{12} substituirt werden, so sind vier in T überall endliche Functionen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{g}$ durch die folgenden Gleichungen vollständig bestimmt

$$(8.)\quad \begin{cases} u-\mathfrak{u} = \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial y}-\dfrac{\partial F_{31}}{\partial z}, \\ v-\mathfrak{v} = -\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F_{23}}{\partial z}, \\ w-\mathfrak{w} = \dfrac{\partial F_{31}}{\partial x}-\dfrac{\partial F_{23}}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}, \\ g-\mathfrak{g} = \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x}+\dfrac{\partial F_{31}}{\partial y}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial z}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen fliessen die folgenden

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(u-\mathfrak{u})}{\partial x}+\dfrac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial y}+\dfrac{\partial(w-\mathfrak{w})}{\partial z} = \Delta F, \\ \dfrac{\partial(g-\mathfrak{g})}{\partial x}-\dfrac{\partial(w-\mathfrak{w})}{\partial y}+\dfrac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial z} = \Delta F_{23}, \\ \dfrac{\partial(w-\mathfrak{w})}{\partial x}+\dfrac{\partial(g-\mathfrak{g})}{\partial y}-\dfrac{\partial(u-\mathfrak{u})}{\partial z} = \Delta F_{31}, \\ -\dfrac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial x}+\dfrac{\partial(u-\mathfrak{u})}{\partial y}+\dfrac{\partial(g-\mathfrak{g})}{\partial z} = \Delta F_{12}. \end{cases}$$

Dagegen ergeben sich aus (5.) die Relationen

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z} = \Delta F, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z} = \Delta F_{23}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial z} = \Delta F_{31}, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z} = \Delta F_{12}, \end{cases}$$

und diese mit (9.) verbunden ziehen die folgenden Gleichungen zwischen den Functionen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{g}$ nach sich:

$$
(11.)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0,\\[2mm]
\dfrac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x}-\dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} = 0,\\[2mm]
\dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathfrak{g}}{\partial y}-\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} = 0,\\[2mm]
-\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathfrak{g}}{\partial z} = 0.
\end{cases}
$$

Dieselben bieten in dem Falle, dass $\mathfrak{g}$ im Innern von T überall gleich der Null ist, eine Handhabe, um eine Auflösung des Systems (1^b.) abzuleiten. Denn die drei letzten von den Gleichungen (11.) gehen alsdann in die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen über, damit der Ausdruck $\mathfrak{u}\,dx+\mathfrak{v}\,dy+\mathfrak{w}\,dz$ ein vollständiges Differential sei. Beschreibt man also im Raume T von einem beliebigen festen Punkte (x_0, y_0, z_0) bis zu dem Punkte (x, y, z) eine willkürliche Curve, so liefert eine längs derselben ausgeführte Integration die Function

$$
(12.)\quad \mathfrak{P} = \int(\mathfrak{u}\,dx+\mathfrak{v}\,dy+\mathfrak{w}\,dz).
$$

Die auf zwei verschiedenen von (x_0, y_0, z_0) nach (x, y, z) gezogenen Integrationswegen erhaltenen Werthe $\mathfrak{P}$ sind dieselben, wenn man eine Fläche construiren kann, welche nur diese beiden Integrationswege zur Begrenzung hat und ganz im Raume T liegt; diese Werthe können aber verschiedene werden, wenn sich diese Bedingung nicht erfüllen lässt. Nunmehr bestehen die Gleichungen

$$
(13.)\quad \mathfrak{u} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x},\quad \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y},\quad \mathfrak{w} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z},
$$

und wegen der ersten Gleichung (11.) gilt die Relation

$$
(14.)\quad \Delta \mathfrak{P} = 0.
$$

Wenn jetzt die Werthe (13.) in (8.) substituirt werden, so ergiebt sich das System von Gleichungen

$$
(15.)\quad \begin{cases}
u = \dfrac{\partial (F+\mathfrak{P})}{\partial x}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial y}-\dfrac{\partial F_{31}}{\partial z},\\[2mm]
v = -\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x}+\dfrac{\partial (F+\mathfrak{P})}{\partial y}+\dfrac{\partial F_{23}}{\partial z},\\[2mm]
w = \dfrac{\partial F_{31}}{\partial x}-\dfrac{\partial F_{23}}{\partial y}+\dfrac{\partial (F+\mathfrak{P})}{\partial z},\\[2mm]
g = \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x}+\dfrac{\partial F_{31}}{\partial y}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial z},
\end{cases}
$$

welches lehrt, dass unter der Voraussetzung $\mathfrak{g} = 0$ die Ausdrücke

$$(16.)\qquad P = F + \mathfrak{P},\quad P_{23} = F_{23},\quad P_{31} = F_{31},\quad P_{12} = F_{12}$$

eine Auflösung des Systems (1^b.) darstellen. Ich werde nun die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{g}$ durch Oberflächenintegrale ausdrücken, um die Bedeutung der Gleichung $\mathfrak{g} = 0$ und das Wesen der Function $\mathfrak{P}$ in ein helleres Licht zu setzen. Aus (8.) ergiebt sich der folgende Werth von $\mathfrak{g}$

$$(17.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{g} = g - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial g'}{\partial x'} - \dfrac{\partial w'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v'}{\partial z'}\right)\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,dt' \\ \qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial w'}{\partial x'} + \dfrac{\partial g'}{\partial y'} - \dfrac{\partial u'}{\partial z'}\right)\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\,dt' \\ \qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(-\dfrac{\partial v'}{\partial x'} + \dfrac{\partial u'}{\partial y'} + \dfrac{\partial g'}{\partial z'}\right)\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\,dt'; \end{cases}$$

aus diesen bildet sich unter der Voraussetzung, dass die zweiten nach x, y, z genommenen Differentialquotienten der Functionen u, v, w, g in T überall endlich sind, mit Hülfe der oben angewendeten theilweisen Integration der Ausdruck

$$(18.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{g} = g + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial^2 g'}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2 g'}{\partial y'^2} + \dfrac{\partial^2 g'}{\partial z'^2}\right)\dfrac{dt'}{r} \\ \qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial g'}{\partial x'} - \dfrac{\partial w'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v'}{\partial z'}\right)\cos\alpha'\,\dfrac{ds'}{r} \\ \qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial w'}{\partial x'} + \dfrac{\partial g'}{\partial y'} - \dfrac{\partial u'}{\partial z'}\right)\cos\beta'\,\dfrac{ds'}{r} \\ \qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(-\dfrac{\partial v'}{\partial x'} + \dfrac{\partial u'}{\partial y'} + \dfrac{\partial g'}{\partial z'}\right)\cos\gamma'\,\dfrac{ds'}{r}. \end{cases}$$

Da aber nach dem *Green*schen Satze

$$(19.)\qquad \begin{cases} g + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial^2 g'}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2 g'}{\partial y'^2} + \dfrac{\partial^2 g'}{\partial z'^2}\right)\dfrac{dt'}{r} \\ = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{\partial g'}{\partial x'}\cos\alpha' + \dfrac{\partial g'}{\partial y'}\cos\beta' + \dfrac{\partial g'}{\partial z'}\cos\gamma'\right)\dfrac{ds'}{r} \\ \quad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int g'\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\cos\alpha' + \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\cos\beta' + \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\cos\gamma'\right)ds' \end{cases}$$

ist, so entsteht der gesuchte Ausdruck, wenn man der Kürze halber eine partielle Differentiation nach dem Element der Normale $\partial n'$ einführt

$$(20^a.)\qquad \mathfrak{g} = -\frac{1}{4\pi}\int g'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,ds'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\Big(\Big(-\frac{\partial w'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial z'}\Big)\cos\alpha'+\Big(-\frac{\partial u'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial x'}\Big)\cos\beta'+\Big(-\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{\partial u'}{\partial y'}\Big)\cos\gamma'\Big)\frac{ds'}{r}.$$

Auch erhält man durch entsprechende Schritte die Ausdrücke

$$(20^b.)\quad\begin{cases}\mathfrak{u} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int u'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,ds'-\frac{1}{4\pi}\int\Big(\Big(\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\Big)\cos\alpha'\\ \qquad\qquad +\Big(\dfrac{\partial g'}{\partial z'}-\dfrac{\partial v'}{\partial x'}\Big)\cos\beta'+\Big(-\dfrac{\partial w'}{\partial x'}-\dfrac{\partial g'}{\partial y'}\Big)\cos\gamma'\Big)\dfrac{ds'}{r},\\ \mathfrak{v} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int v'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,ds'-\frac{1}{4\pi}\int\Big(\Big(-\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{\partial g'}{\partial x'}\Big)\cos\alpha'\\ \qquad\qquad +\Big(\dfrac{\partial w'}{\partial z'}+\dfrac{\partial u'}{\partial x'}\Big)\cos\beta'+\Big(\dfrac{\partial g'}{\partial x'}-\dfrac{\partial w'}{\partial y'}\Big)\cos\gamma'\Big)\dfrac{ds'}{r},\\ \mathfrak{w} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int w'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,ds'-\frac{1}{4\pi}\int\Big(\Big(\frac{\partial g'}{\partial y'}-\frac{\partial u'}{\partial z'}\Big)\cos\alpha'\\ \qquad\qquad +\Big(-\dfrac{\partial v'}{\partial z'}-\dfrac{\partial g'}{\partial x'}\Big)\cos\beta'+\Big(\dfrac{\partial u'}{\partial x'}+\dfrac{\partial v'}{\partial y'}\Big)\cos\gamma'\Big)\dfrac{ds'}{r}.\end{cases}$$

Hier erscheint jede der Functionen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{g}$ als ein Aggregat von zwei Integralen, von denen das erste als das Potential einer magnetischen Doppelschicht auf der Oberfläche S, das zweite als das Potential einer magnetischen einfachen Schicht auf der Oberfläche S in Bezug auf den Punkt (x, y, z) betrachtet werden kann. Denkt man sich jetzt den Werth g für die Oberfläche S willkürlich gegeben, so ist in dem Ausdruck von $\mathfrak{g}$ das Potential der Doppelschicht vollständig bestimmt, und die Forderung, dass $\mathfrak{g} = 0$ sei, führt nach einem *Gauss*ischen Satze zu einer vollständigen Bestimmung der Dichtigkeit für die entsprechende einfache magnetische Schicht. Wird überdies angenommen, dass die Function g an der ganzen Oberfläche S den Werth Null habe, so muss die Dichtigkeit der einfachen Schicht überall ebenfalls gleich der Null sein, d. h. es muss für die ganze Oberfläche S die Gleichung gelten

$$0 = \Big(-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\Big(-\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\cos\beta+\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\cos\gamma.$$

Bei der von Herrn *Helmholtz* behandelten Aufgabe ist die Function g in dem ganzen Raume F gleich der Null, also drückt hier die vorstehende Gleichung

die zu dem Verschwinden der Grösse $\mathfrak{g}$ nothwendige und hinreichende Bedingung aus. Unter der Voraussetzung $\mathfrak{g} = 0$ bilden die Ausdrücke (16.) eine Auflösung des Systems (1^b.), und dieselbe stimmt unter der ferneren Annahme, dass überall in T die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ sei, mit der am angeführten Orte gegebenen Auflösung überein.

3.

Die Deutung der Functionen, die in den entwickelten Auflösungen unserer Aufgabe auftreten, erfordert, dass die Wirkung eines magnetischen Massenpunktes und eines electrischen Stromelements auf einen anderen magnetischen Massenpunkt vergleichbar dargestellt werden. In dem Punkte (x, y, z), der die Wirkung erfährt, sei die Einheit des negativen (südlichen) magnetischen Fluidums concentrirt. Dann sind die Componenten der Wirkung, welche die im Punkte (x', y', z') befindliche magnetische Masse μ' ausübt, nach der x, y, z Axe genommen, beziehungsweise

$$\frac{\partial \frac{\mu'}{r}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \frac{\mu'}{r}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \frac{\mu'}{r}}{\partial z}.$$

Ferner sind die Componenten der Wirkung, welche das im Punkte (x', y', z') befindliche mit der Intensität J' durchströmte Linearelement dl' ausübt, nach der x, y, z Axe genommen, wenn die positiven Axen der x, y, z resp. nach oben, links, rechts gerichtet sind, beziehungsweise *)

$$\frac{\partial \frac{J'}{r}\frac{\partial y'}{\partial l'}dl'}{\partial z} - \frac{\partial \frac{J'}{r}\frac{\partial z'}{\partial l'}dl'}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \frac{J'}{r}\frac{\partial z'}{\partial l'}dl'}{\partial x} - \frac{\partial \frac{J'}{r}\frac{\partial x'}{\partial l'}dl'}{\partial z},$$
$$\frac{\partial \frac{J'}{r}\frac{\partial x'}{\partial l'}dl'}{\partial y} - \frac{\partial \frac{J'}{r}\frac{\partial y'}{\partial l'}dl'}{\partial x}.$$

Wie bei einer Vertheilung magnetischer Massen die über sämmtliche Massen ausgedehnte Summe $\Sigma\frac{\mu'}{r}$ das Potential der Massenvertheilung heisst, so möge

*) Diese Formeln gelten nach der *Ampère*schen Theorie nur für constante geschlossene Ströme, und die allgemeine Anwendung derselben gründet sich auf eine mathematische Fiction.

der Complex der drei über sämmtliche Elemente einer Stromvertheilung genommenen Summen

$$\Sigma \frac{J' \frac{\partial x'}{\partial l'} dl'}{r}, \qquad \Sigma \frac{J' \frac{\partial y'}{\partial l'} dl'}{r}, \qquad \Sigma \frac{J' \frac{\partial z'}{\partial l'} dl'}{r}$$

das Potentialsystem der Stromvertheilung genannt werden. Wenn demnach bei einer Auflösung des Systems (1^b.) die Function P als das Potential einer Vertheilung magnetischer Massen, der Complex $-P_{23}$, $-P_{31}$, $-P_{12}$ als das Potentialsystem einer Vertheilung von electrischen Strömen aufgefasst werden kann, so stellen die Functionen u, v, w die Componenten der Wirkung dar, die von den magnetischen Massen und den electrischen Strömen gemeinsam auf den Punkt (x, y, z) ausgeübt wird. Eine solche Auffassung der für P, P_{23}, P_{31}, P_{12} gefundenen Ausdrücke kann nun folgendermassen vermittelt werden.

Es werde durch den Punkt (x', y', z') oder E ein System von drei auf einander senkrechten Linien gelegt, und es mögen auf jeder derselben in je zwei gleichen Abständen von E zwei Punkte bestimmt werden, auf der ersten E_α und $E_{-\alpha}$, auf der zweiten E_β und $E_{-\beta}$, auf der dritten E_γ und $E_{-\gamma}$; die Linien seien von E aus so gezogen, dass die Punkte E_α, E_β, E_γ beziehungsweise oben, links, rechts liegen. Die Punkte E_α, E_β, E_γ sollen in Bezug auf den Punkt E die relativen Coordinaten $x = \alpha$, $y = \alpha_1$, $z = \alpha_2$; $x = \beta$, $y = \beta_1$, $z = \beta_2$; $x = \gamma$, $y = \gamma_1$, $z = \gamma_2$ haben. Jetzt betrachte ich zuerst das folgende Gebilde. In dem Punkte E_α sei die magnetische Masse μ', in dem Punkte $E_{-\alpha}$ die Masse $-\mu'$ concentrirt. In den Punkten E_β und $E_{-\beta}$ werden parallele Linien zu der Linie $E_{-\gamma}\, E_\gamma$, in den Punkten E_γ und $E_{-\gamma}$ parallele Linien zu der Linie $E_{-\beta}\, E_\beta$ gezogen, und das aus diesen vier sich schneidenden Linien gebildete Rechteck möge durch einen electrischen Strom von der Intensität J' in der Reihenfolge E_β, E_γ, $E_{-\beta}$, $E_{-\gamma}$ durchströmt werden. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass die Länge der Linien $E_{-\alpha}\, E_\alpha$, $E_{-\beta}\, E_\beta$, $E_{-\gamma}\, E_\gamma$ gegen den Abstand des Punktes E von dem Punkte (x, y, z), der die anziehende Wirkung erfährt, kleine Grössen sind. Alsdann liefert das System der magnetischen Massen μ' und $-\mu'$, welches man einen Elementarmagneten nennen kann, das Potential

$$(21.) \qquad 2\mu' \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \alpha_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \alpha_2 \right).$$

Was das Potentialsystem des construirten geschlossenen Elementarstromes an-

langt, so liefern zu dem Ausdruck $\Sigma\frac{J\frac{\partial x'}{\partial l'}dl'}{r}$ die Theile des Stromes, welche durch die Punkte E_β und $E_{-\beta}$ hindurchgehen, den Beitrag

$$4J'\gamma\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\beta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\beta_1+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\beta_2\right),$$

die Theile des Stromes, welche durch die Punkte E_γ und $E_{-\gamma}$ hindurchgehen, den Beitrag

$$-4J'\beta\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\gamma+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\gamma_1+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\gamma_2\right).$$

Wenn man nun die positiven Quadratwurzeln $\sqrt{(\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2)}=\mathfrak{a}$, $\sqrt{(\beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2)}=\mathfrak{b}$, $\sqrt{(\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2)}=\mathfrak{c}$ setzt, und sich der bekannten Formeln

$$\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1 = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}\alpha,$$
$$\beta_2\gamma-\beta\gamma_2 = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}\alpha_1,$$
$$\beta\gamma_1-\beta_1\gamma = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}\alpha_2$$

bedient, so nimmt das Potentialsystem des in Rede stehenden Stromrechtecks die Form an

$$(22.)\quad\begin{cases}-\frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}J'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\alpha_2-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\alpha_1\right),\\ -\frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}J'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\alpha-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\alpha_2\right),\\ -\frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}J'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\alpha_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\alpha\right).\end{cases}$$

Ich gehe nun zur Betrachtung eines zweiten Gebildes über. Es sei E_α die Mitte eines Stromelements von der Länge $2\mathfrak{a}$, bei welchem die Richtung des Stromes von dem Punkte E nach dem Punkte E_α geht, ebenso $E_{-\alpha}$ die Mitte eines Stromelements von der Länge $2\mathfrak{a}$, bei welchem die Richtung des Stromes die entgegengesetzte ist. In gleicher Weise seien E_β und $E_{-\beta}$ die Mitten von Stromelementen mit der Länge $2\mathfrak{a}$ und den Richtungen EE_β, $EE_{-\beta}$, und E_γ und $E_{-\gamma}$ die Mitten von Stromelementen mit der Länge $2\mathfrak{a}$ und den

Richtungen EE_γ, $EE_{-\gamma}$. Die Stromstärke in allen Theilen dieses Stromkreuzes habe den Werth J''. Dann wird das Potentialsystem des Stromkreuzes, wie leicht zu übersehen, das folgende

$$(23.)\qquad 4\mathfrak{a}^2 J'' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'},\qquad 4\mathfrak{a}^2 J'' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'},\qquad 4\mathfrak{a}^2 J'' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}.$$

Wir machen jetzt die mathematische Fiction, dass die Wirkung sowohl der Elementarmagneten, als der Stromvierecke, als der Stromkreuze auch dann noch durch die angegebenen Ausdrücke dargestellt werde, wenn der in Angriff genommene Punkt (x, y, z) in die Nähe jener Gebilde gerückt wird. Alsdann können wir eine Vertheilung von magnetischen Massen construiren, deren Potential gleich dem Werthe P aus (4.) ist, und eine Vertheilung von electrischen Strömen angeben, deren Potentialsystem gleich dem Complex der Werthe P_{23}, P_{31}, P_{12} aus (4.) ist. Man erhält nämlich das Element des für P gefundenen Integrals, indem man in (21.) die Substitution macht

$$(24.)\qquad 2\mu'\alpha = \frac{1}{4\pi} u'\,dt',\qquad 2\mu'\alpha_1 = \frac{1}{4\pi} v'\,dt',\qquad 2\mu'\alpha_2 = w'\,dt',$$

und man erhält die Elemente der für P_{23}, P_{31}, P_{12} gefundenen Integrale, indem man in (22.) die Substitution

$$(25.)\qquad \frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}} J'\alpha = \frac{1}{4\pi} u'\,dt',\qquad \frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}} J'\alpha_1 = \frac{v'}{4\pi} dt',\qquad \frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}} J'\alpha_2 = \frac{w'}{4\pi} dt',$$

und in (23.) die Substitution

$$(26.)\qquad 4\mathfrak{a}^2 J'' = \frac{1}{4\pi} g'\,dt'$$

ausführt, dann aber die entsprechenden Ausdrücke addirt. Durch die Gleichungen (24.) wird die Richtung der Axe $E_{-\alpha}E_\alpha$ des Elementarmagneten und der Werth seines Moments $2\mu'\mathfrak{a}$ vollständig bestimmt. Die Gleichungen (25.) determiniren die Ebene des Stromvierecks senkrecht gegen die Axe des eben bestimmten Elementarmagneten, und liefern für das Product der Stromstärke in den Flächenraum des umströmten Rechtecks die Gleichung

$$4\mathfrak{bc}J' = 2\mu'\mathfrak{a},$$

nach welcher dieses Product gleich dem Moment des in Rede stehenden Elementarmagneten ist. Also besteht zwischen dem Elementarmagneten und dem Stromviereck die Beziehung, dass ihre Wirkung auf einen entfernten Punkt dieselbe ist. Die Gleichung (26.) zeigt, dass die bei den Stromkreuzen zu wählende Lage der Linien EE_α, EE_β, EE_γ eine willkürliche ist, und dass die denselben beizulegende Stromstärke J'' der Function g proportional wird,

folglich mit der Function g zugleich verschwindet. Wenn man daher in jedem Punkte (x', y', z') des Innern von T einen Elementarmagneten fingirt, der durch die Gleichungen (24.) bestimmt ist, dagegen ein Stromviereck und ein Stromkreuz annimmt, für welche beziehungsweise die Gleichungen gelten

$$(25^a.)\qquad \frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}J'\alpha = -\frac{1}{4\pi}u'dt',\quad \frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}J'\alpha_1 = -\frac{v'}{4\pi}dt',\quad \frac{4\mathfrak{bc}}{\mathfrak{a}}J'\alpha_2 = -\frac{w'}{4\pi}dt',$$

$$(26^a.)\qquad 4\mathfrak{a}^2J'' = -\frac{1}{4\pi}g'dt',$$

so hat man ein System von Magneten, welches das Potential P producirt, und ein System von electrischen Strömen, welches das Potentialsystem $-P_{23}$, $-P_{31}$, $-P_{12}$ erzeugt. Dieses System von Kraftquellen bringt nach dem oben Bemerkten auf einen im Innern von T gelegenen Punkt (x, y, z) eine Wirkung hervor, deren nach den x, y, z Axen genommene Componenten respective gleich den gegebenen Werthen u, v, w sind, übt dagegen auf einen ausserhalb T befindlichen Punkt (x, y, z) gar keine Wirkung aus.

Die in den Gleichungen (7.) enthaltene Auflösung unserer Aufgabe gestattet, die Functionen F und f als Potentiale von Vertheilungen magnetischer Massen im Raume T und in der Oberfläche S, die Complexe F_{23}, F_{31}, F_{12} und f_{23}, f_{31}, f_{12} als Potentialsysteme von Vertheilungen electrischer Ströme im Raume T und in der Oberfläche S aufzufassen. Es werde in dem Punkte (x', y', z') eine magnetische Masse μ', ein Stromelement dl' mit der Intensität J' und ein Stromelement dl'' mit der Intensität J'' fingirt, so hat man für diesen Zweck die folgenden Gleichungen anzuwenden: erstens im Raume T

$$(27.)\qquad \begin{cases} \mu' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dt', \\ J'\frac{\partial x'}{\partial l'}dl' = -\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial w'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial z'}\right)dt', \\ J'\frac{\partial y'}{\partial l'}dl' = -\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial u'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)dt', \\ J'\frac{\partial z'}{\partial l'}dl' = -\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)dt', \\ J''\frac{\partial x'}{\partial l''}dl'' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial g'}{\partial x'}dt', \\ J''\frac{\partial y'}{\partial l''}dl'' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial g'}{\partial y'}dt', \\ J''\frac{\partial z'}{\partial l''}dl'' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial g'}{\partial z'}dt', \end{cases}$$

und zweitens in der Oberfläche S

$$(28.)\quad \begin{cases} \mu' = \frac{1}{4\pi}(u'\cos\alpha'+v'\cos\beta'+w'\cos\gamma')\,ds', \\ J'\frac{\partial x'}{\partial l'}dl' = \frac{1}{4\pi}(-w'\cos\beta'+v'\cos\gamma')\,ds', \\ J'\frac{\partial y'}{\partial l'}dl' = \frac{1}{4\pi}(-u'\cos\gamma'+w'\cos\alpha')\,ds', \\ J'\frac{\partial z'}{\partial l'}dl' = \frac{1}{4\pi}(-v'\cos\alpha'+u'\cos\beta')\,ds', \\ J''\frac{\partial x'}{\partial l''}dl'' = \frac{1}{4\pi}g'\cos\alpha'\,ds', \\ J''\frac{\partial y'}{\partial l''}dl'' = \frac{1}{4\pi}g'\cos\beta'\,ds', \\ J''\frac{\partial z'}{\partial l''}dl'' = \frac{1}{4\pi}g'\cos\gamma'\,ds'. \end{cases}$$

In Bezug auf die letzten Formeln kann man die Bemerkung machen, dass die mit dl'' bezeichneten Stromelemente senkrecht gegen die Oberfläche S, die mit dl' bezeichneten Stromelemente aber tangential zu der Oberfläche S gerichtet sind.

4.

Die Betrachtungen, die in den angeführten Abhandlungen unter der Voraussetzung, dass die Function g gleich Null ist, und dass u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit einer den Raum T continuirlich erfüllenden Materie im Punkte (x, y, z) bedeuten, an die Interpretation der Integrale F, F_{23}, F_{31}, F_{12} angeknüpft sind, und die sich auf die mechanische Bedeutung der Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$ beziehen, veranlassen eine Frage nach den Bedingungen, unter denen die Elemente der Integrale f, f_{23}, f_{31}, f_{12}, das ist, die in der Oberfläche S supponirten magnetischen Massen und electrischen Ströme, verschwinden. Die betreffende Antwort ist aus der Gleichung

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+(-w\cos\beta+v\cos\gamma)^2+(-u\cos\gamma+x\cos\alpha)^2$$
$$+(-v\cos\alpha+u\cos\beta)^2 = u^2+v^2+w^2$$

abzuleiten, und lautet dahin, dass zu diesem Ende die Werthe u, v, w in jedem Punkte von S gleich Null werden müssen.

Wir wollen nun auch den entgegenstehenden Fall erwägen, wo unter der Voraussetzung, dass die Function g gleich Null ist, die Elemente der Integrale F, F_{23}, F_{31}, F_{12} verschwinden, das ist, wo in dem ganzen Raume T die Gleichungen gelten

$$(29.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Dann sind u, v, w die nach x, y, z genommenen partiellen Differentialquotienten einer Function Q, die mittelst der Integration eines vollständigen Differentials durch die Gleichung

$$(30.)\qquad Q=\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$$

bestimmt ist, und die der partiellen Differentialgleichung

$$(31.)\qquad \Delta Q=0$$

genügt. Das System (1^b.) wird gleichzeitig in Folge der Gleichungen (7.) durch die Ausdrücke $P=f$, $P_{23}=f_{23}$, $P_{31}=f_{31}$, $P_{12}=f_{12}$ befriedigt. Es kann nun das besondere Sachverhältniss obwalten, dass in gewissen Theilen der Oberfläche S die in (28.) angegebenen supponirten magnetischen Massen μ' verschwinden und nur die supponirten electrischen Ströme bleiben, während in den übrigen Theilen der Oberfläche S die angegebenen Intensitäten der electrischen Ströme J' verschwinden, und nur die magnetischen Massen μ' bleiben. Die electrischen Ströme von den Intensitäten J'' fallen wegen der Gleichung $g=0$ von selbst fort. Die Componenten der Wirkung der in Rede stehenden Combination von magnetischen Massen und electrischen Strömen sind dann in Folge der oben ausgeführten Bemerkungen für einen im Innern von T gelegenen Punkt (x, y, z) beziehungsweise gleich den Grössen u, v, w, dagegen für einen ausserhalb T gelegenen Punkt (x, y, z) gleich Null. Damit in einem Theile S_1 von S die magnetischen Massen μ' verschwinden, muss für jeden Punkt von S_1 die Gleichung

$$(32.)\qquad u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=0$$

erfüllt sein. Das heisst, diejenige Richtung, welche mit den Axen x, y, z die Winkel bildet, deren cosinus $\frac{u}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}}$, $\frac{v}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}}$, $\frac{w}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}}$ sind, muss tangential zu der Fläche S_1 sein. Wenn dagegen in einem Theile S_2 von S die Intensitäten J' verschwinden sollen, so muss für jeden Punkt

von S_2 die Proportion

$$(33.) \quad u:v:w = \cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma$$

befriedigt sein. Weil nun $u = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $v = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $w = \frac{\partial Q}{\partial z}$ ist, so zieht die Differentialgleichung der Fläche $\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0$ die Gleichung $dQ = 0$ nach sich. Daher muss in den zusammenhängenden Theilen S_2 von S die Function Q, welche wegen (31.) eine Potentialfunction ist, einen constanten Werth haben, oder diese Theile müssen mit Niveauflächen der Potentialfunction Q übereinstimmen.

Denkt man sich eine Potentialfunction Q gegeben, so kann ein Raum T, dessen Oberfläche aus Theilen von der für S_1 und S_2 charakteristischen Beschaffenheit besteht, wie folgt gefunden werden. Zunächst sind die Linien aufzusuchen, welche auf den Niveauflächen von Q überall senkrecht stehen. Wenn (x, y, z) ein Punkt einer solchen Linie ist, so haben seine Coordinaten das System von Differentialgleichungen zu erfüllen

$$(34.) \quad dx:dy:dz = \frac{\partial Q}{\partial x}:\frac{\partial Q}{\partial y}:\frac{\partial Q}{\partial z},$$

und eine Linie, die durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen muss, ist vollständig bestimmt. Jedes Integral $R = \text{const.}$ dieses Systems von Differentialgleichungen genügt der unter dem Namen Charakteristik bekannten partiellen Differentialgleichung

$$(35.) \quad \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

und die Theorie des *Jacobi*schen Multiplicators lehrt, dass aus einem gegebenen Integral derselben das zur vollständigen Integration des Systems (34.) erforderliche zweite Integral durch die Integration eines vollständigen Differentials abgeleitet werden kann. Es wird angenommen, dass zwei independente Integrale von (35.) vorliegen. Wir denken uns nun in einer Niveaufläche $Q = A$ eine geschlossene Curve gezogen, in jedem Punkt dieser Curve die so eben bestimmte Linie construirt, und diese sämmtlichen Linien auf einer Seite der Fläche $Q = A$ von dieser bis zu einer zweiten Niveaufläche $Q = B$ genommen. Die Totalität der construirten Linien bildet dann eine Fläche, deren Gleichung auf die Form $\Phi = \text{const.}$ gebracht werden kann, wo die Function Φ, für R gesetzt, der partiellen Differentialgleichung (35.) genügt, mithin eine Function der beiden independenten Integrale ist. Wenn jetzt der von den Flächen $Q = A$,

$Q = B$, $\Phi =$ const. eingeschlossene Raum so gewählt ist, dass innerhalb desselben die Functionen Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ überall endlich bleiben, so leuchtet ein, dass, weil die Fläche $\Phi =$ const. den der Fläche S_1 vorgeschriebenen Charakter hat, und die Flächen $Q = A$ und $Q = B$ die den Flächenstücken S_2 vorgeschriebenen Eigenschaften besitzen, der in Rede stehende Raum die an den Raum T gestellten Anforderungen erfüllt.

Aus den Gleichungen (28.) geht hervor, dass die Dichtigkeit der in jedem Punkte der Flächen $Q = A$ und $Q = B$ zu supponirenden magnetischen Belegung erhalten wird, indem man den nach der äusseren Normale genommenen Differentialquotienten der Potentialfunction Q durch 4π dividirt. Um die Vertheilung der electrischen Ströme in der Fläche $\Phi = C$ darzustellen, fügen wir zu dieser Function Φ ein zweites von derselben unabhängiges Integral Φ_1 der Differentialgleichung (35.) hinzu und drücken die Coordinaten eines Punktes der Fläche $\Phi = C$ durch die Functionen Q und Φ_1 aus. Dann giebt die Gleichung $Q =$ const. lauter in sich zurücklaufende Linien, und die Gleichung $\Phi_1 =$ const. solche Linien, die auf den ersteren überall senkrecht stehen, und für die das System (34.) befriedigt ist. Bezeichnet man die Functionaldeterminante der Functionen Q, Φ, Φ_1 nach den Variabeln x, y, z genommen, welche unter den bestehenden Verhältnissen nicht verschwinden kann, mit D, so hat das Element der Oberfläche $\Phi = C$ den Ausdruck $\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right)}}{D} dQ\, d\Phi_1$, und die betreffenden Formeln (28.) gehen, wenn man die Accente fortlässt, durch eine bekannte Transformation in die folgende Gestalt über

$$(36.)\quad \begin{cases} J\frac{\partial x}{\partial l}dl = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial x}{\partial \Phi_1}dQ\,d\Phi_1, \\ J\frac{\partial y}{\partial l}dl = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial y}{\partial \Phi_1}dQ\,d\Phi_1, \\ J\frac{\partial z}{\partial l}dl = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial z}{\partial \Phi_1}dQ\,d\Phi_1. \end{cases}$$

Demnach wird durch je zwei Niveauflächen, in denen der constante Werth des Potentials Q um dQ verschieden ist, aus der Fläche $\Phi = C$ ein Elementarstreifen herausgeschnitten, in welchem ein electrischer Strom von der Stärke $J = \frac{dQ}{4\pi}$ zu fingiren ist.

Für die Potentialfunction $Q = x$ werden die Niveauflächen $Q =$ const. mit der Ebene der $y-z$ parallele Ebenen, die Flächen $\Phi =$ const. auf der Ebene der $y-z$ senkrecht stehende Cylinderflächen. Alsdann geht das gefundene Resultat in den von *Neumann* Bd. 37 dieses Journals pag. 47 angeführten Satz über, nach welchem die Wirkung einer von constanten Strömen durchströmten Drahtspirale durch die Wirkung einer magnetischen Belegung ihrer beiden Grundflächen ersetzt werden kann.

Bonn, den 24. Februar 1868.

Die *Fourier-Bessel*sche Function.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle.)

---

§. 1. Diese Function, welche in der Theorie der Wärme und der Anziehung bei dem Cylinder dieselbe Rolle spielt wie die Kugelfunction bei der Kugel, ist in neuerer Zeit mehrfach behandelt worden; namentlich ist die Schrift von *Neumann* hervorzuheben, der für sie ein Theorem entdeckte *), analog dem Additionstheoreme für die Kugelfunction. Die Analogie der Sätze stammt, wie sich zeigen wird (§§. 3, 4), aus dem Umstande, *dass diese Cylinderfunction* **) *eine Grenze der Kugelfunction erster und zweiter Art ist;* aus ihm entspringt die Möglichkeit einer einheitlichen Behandlung beider Arten von Functionen (§§. 3, 5, 6). Von dieser Bemerkung ausgehend *findet man das vollständige Integral der Differentialgleichung für die Cylinderfunction in einer neuen Form* (§§. 3, 9), welche die bisher bei den Aufgaben über das Potential eines Cylinders benutzte mit Vortheil ersetzen wird †) (§. 7), welche ferner (§. 9) für die *Riccati*sche Gleichung eine in allen Fällen brauchbare allgemeine Lösung von besonders einfacher Gestalt verschafft ††). Mit der Cylinderfunction verbinde ich zur Abrundung eine verwandte Function, die

---

*) *Carl Neumann,* Theorie der *Bessel*schen Functionen. Leipzig, 1867; §. 22. S. 65, Formel 31 und 32. Unter dem Additionstheoreme für die Kugelfunction verstehe ich die Entwickelung dieser Function von dem Cosinus einer Seite im sphärischen Dreieck nach Cosinus der Vielfachen des gegenüberliegenden Winkels. Cf. Handbuch der Kugelfunctionen §. 67 und §. 73, Formel (49.) und (52.).

**) Da *Fourier* es war, der die Function einführte und nicht unwesentliche Eigenschaften derselben entdeckte, so verstösst es wohl, trotz der zweifellosen Bedeutung der Arbeiten *Bessels,* gegen den Gebrauch, wenn man sie, wie es im letzten Decennium geschieht, die *Bessel*sche nennt. Die *Euler*schen Integrale, welchen ohne *Legendres* Entdeckungen nicht die Bedeutung zukommen würde, die ihnen jetzt beigelegt wird, nennt Niemand *Legendres* Integrale! Ist eine besondere Bezeichnung erforderlich, so kann man den Namen Cylinderfunction gebrauchen, wenn man nicht eine Benennung vorzieht, welche ihrer Bedeutung bei den Störungsrechnungen entspricht.

†) M. vgl. Bd. 48 dieses Journals: *Kirchhoff,* Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders etc. Die Integrale daselbst §. 5, S. 363 und 364 und §. 7, S. 370 lassen sich nun direct reduciren, wie man aus der vorliegenden Arbeit (§. 7) ersieht.

††) Bekanntlich ist von *Petzval* die *Riccati*sche Gleichung schon allgemein durch Integrale von einfacher Form gelöst worden. Man vergl. *Petzval,* Integration der linearen Differentialgleichungen. Wien, 1853. Erster Band, S. 108.

als Grenze der speciellen *Lamé*schen Function höherer Ordnung zu betrachten ist; es ist dieselbe, welche bei der Bestimmung des veränderlichen, von der Zeit abhängigen Wärmezustandes der Kugel eine Rolle spielt (§. 8).

§. 2. Die Cylinderfunction erster Art entsteht durch *Entwickelung von $e^{\theta\cos\varphi}$ nach Cosinus der Vielfachen des Winkels* φ; setzt man

$$e^{\theta\cos\varphi} = f_0(\theta)+2f_1(\theta)\cos\varphi+2f_2(\theta)\cos 2\varphi+\cdots,$$

so ist bekanntlich

$$(1.)\quad\begin{cases} f_m(\theta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{\theta\cos\varphi}\cos m\varphi\, d\varphi \\ = \dfrac{\theta^m}{2.4\ldots(2m)}\left(1+\dfrac{\theta^2}{2(2m+2)}+\dfrac{\theta^4}{2.4.(2m+2)(2m+4)}+\cdots\right),\end{cases}$$

und $(-i)^m f_m(i\theta)$ ist was man *Bessel*sche Function nennt, und durch $J_m(\theta)$ bezeichnet. Ich verbinde mit dieser Function eine andere, nämlich

$$(2.)\quad\begin{cases} \psi_m(\theta) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi e^{\theta\cos\varphi}P^m(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi \\ = \dfrac{\theta^m}{3.5\ldots(2m+1)}\left(1+\dfrac{\theta^2}{2.(2m+3)}+\dfrac{\theta^4}{2.4.(2m+3)(2m+5)}+\cdots\right);\end{cases}$$

man erkennt aus (2.), dass, bei *Entwickelung von $e^{\theta\cos\varphi}$ nach Kugelfunctionen*, $(2m+1)\psi_m(\theta)$ der Coefficient von $P^m(\cos\varphi)$ wird.

Differentiirt man m Male hintereinander f_0 oder ψ_0 nach θ^2, so entsteht respective

$$(2\theta)^{-m}f_m(\theta);\qquad (2\theta)^{-m}\psi_m(\theta).$$

Den zweiten Gliedern der dreigliedrigen Gleichungen (1.) *und* (2.) *lassen sich übereinstimmende Formen geben*, indem das zweite Glied von (1.) sich bekanntlich durch *Jacobis* formula transformationis integr. def. *)

$$\int_0^\pi \chi^m(\cos\varphi)\sin^{2m}\varphi\, d\varphi = 1.3.5\ldots(2m-1)\int_0^\pi \chi(\cos\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi$$

in

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\theta^m}{1.3\ldots(2m-1)}\int_0^\pi e^{\theta\cos\varphi}\sin^{2m}\varphi\, d\varphi$$

umgestalten lässt; indem ich eine entsprechende Transformationsformel

$$\int_0^\pi \chi^m(\cos\varphi)\sin^{2m+1}\varphi\, d\varphi = 2.4\ldots(2m)\int_0^\pi \chi(\cos\varphi)P^m(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$$

*) Bd. 15 dieses Journals, S. 3.

hinzufüge, verwandle ich das zweite Glied von (2.) in

$$\frac{1}{2}\frac{\theta^m}{2.4\ldots(2m)}\int_0^\pi e^{\theta\cos\varphi}\sin^{2m+1}\varphi\,d\varphi.$$

In Bezug auf die recurrirende Berechnung der ψ und f mag die Bemerkung Platz finden, dass, wie aus den gemeinsamen Eigenschaften aller hypergeometrischen Reihen folgt, ψ_m und f_m die Form $A\psi_0+B\psi_1$ und $A_1f_0+B_1f_1$ besitzen, wo die A und B bekannt, nämlich ihre wesentlichen Theile die Zähler und Nenner des Kettenbruchs sind, in welchen sich $\psi_1:\psi_0$ oder $f_1:f_0$ entwickeln lässt *).

Im Vorhergehenden war die mit m bezeichnete Grösse, der Natur der Sache nach, eine positive ganze Zahl; im Folgenden, mit Ausnahme des letzten Paragraphen, behält m diese Bedeutung.

Es genügt die Function $f_m(\theta)$ der Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \theta^2\frac{d^2y}{d\theta^2}+\theta\frac{dy}{d\theta}-(m^2+\theta^2)y = 0,$$

und $\psi_m(\theta)$ der ähnlichen

$$(4.)\qquad \theta^2\frac{d^2y}{d\theta^2}+2\theta\frac{dy}{d\theta}-(m(m+1)+\theta^2)y = 0.$$

§. 3. Es ist nicht nur, wie Herr *Mehler* neulich bei Gelegenheit einer interessanten Arbeit über die Vertheilung der Electricität **) mit Hülfe einer Reihenentwickelung gefunden hat, $J_0(\theta)$ die Grenze der Kugelfunction $P^n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)$ für $n=\infty$; auch die Grenze der Zugeordneten führt auf Cylinderfunctionen. Man findet nämlich sofort als Grenze von

$$\int_0^\pi\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\cdot\cos\varphi\right)^n\cos m\varphi\,d\varphi$$

für $n=\infty$ das Integral

$$\int_0^\pi e^{i\theta\cos\varphi}\cos m\varphi\,d\varphi;$$

---

*) M. vgl. meine Arbeit über Kettenbrüche in diesem Journal Bd. 57, §. 3 Formel (14.) und §. 7; ferner Bd. 58, S. 90 die Arbeit des Herrn *Christoffel*, welcher dort den Grössen A und B eine besonders elegante Form giebt. Seine Bemerkung, dass *in ausgeführter Form* sich das Verhältniss von ψ_{m+1} zu ψ_m angeben lasse, gilt auch von jedem ψ selbst, wie aus der erwähnten Formel (14.) folgt. Hierher gehört auch die Formel (39.) in der Arbeit des Herrn *Bauer* über die Coefficienten von Reihen von Kugelf. in Bd. 56 dieses Journals.

**) Bd. 68 dieses Journals, S. 140.

ferner ist bekanntlich

$$\frac{\Gamma(a+n)}{n^a \Gamma n}$$

für $n = \infty$ gleich 1. Beachtet man noch die Festsetzungen über die Zeichen im Handb. der Kugelf. §. 23, S. 57, so ergiebt sich aus Formel (38.) im §. 47 desselben: *Der Ausdruck*

$$\frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} P_m^n\left(\cos\frac{i\theta}{n}\right)$$

convergirt mit wachsendem n zu $f_m(\theta)$, wo θ positiv ist. Entsprechend früheren Festsetzungen *nenne ich positiv eine reelle oder complexe Grösse θ, deren reeller Theil positiv ist, eine rein imaginäre Grösse θ, wenn sie positiv imaginär ist.*

Der Werth von f für negative θ ergiebt sich aus dem für positive θ vermöge (1.) von selbst.

Aus der Kugelfunction zweiter Art wird durch den Uebergang zur Grenze, vermittelst der Gleichung (45.) im §. 57 des Handbuchs, eine Function, welche *Cylinderfunction zweiter Art* heisse,

$$(1^*.) \qquad F_m(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta \cos iu} \cos miu\, du,$$

als Grenze von

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, Q_m^n\left(\cos\frac{i\theta}{n}\right)$$

erhalten, wo wiederum θ positiv ist. In diesem Integrale kann zwar im allgemeinen auf reellem Wege integrirt werden; nur wenn θ rein imaginär ist, muss man von 0 ins Imaginäre gehen. *Bezeichnet g das reell positiv Unendliche,* so gehe man von $u = 0$ im Endlichen auf beliebigem Wege (z. B. bis $-\frac{i\pi}{2}$ auf der Axe des Imaginären und von dort parallel der Axe des Reellen) zu $u = g - \frac{\pi}{2} i$. Selbstverständlich lässt sich das Integral in die Summe zweier Integrale zerlegen, in denen auf reellem Wege, nämlich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von 0 bis g, integrirt wird.

Die Grenze der Differentialgleichung für P_m^n und Q_m^n ist (3.). Berücksichtigt man, dass (3.) sich durch Vertauschung von θ mit $-\theta$ nicht ändert, dass man sich also θ darin positiv vorstellen kann, so hat man das Resultat:

Es sind $f_m(\theta)$ und $F_m(\theta)$ zwei particuläre Integrale von der Differentialgleichung (3.) *der Cylinderfunction.*

In ähnlicher Weise findet man, dass $\psi_m(\theta)$ und

$$(2^*.)\qquad \Psi_m(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta\cos iu} P^m(\cos iu)\sin iu\, du,$$

das Integral wie oben bis g oder $g-\frac{\pi i}{2}$ genommen, die Gleichung (4.) integriren.

Man kann direct zeigen, dass die beiden Formeln (1.) oder (2.) den Gleichungen (3.) oder resp. (4.) genügen, indem man nämlich auf den linken Seiten von (3.) oder (4.) für y resp.

$$\int e^{-\theta\cos\varphi}\cos m\varphi\, d\varphi,\qquad \int e^{-\theta\cos\varphi} P^m(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$$

einsetzt, wodurch sie respective gleich

$$(a.)\qquad -e^{-\theta\cos\varphi}(\theta\sin\varphi\cos m\varphi + m\sin m\varphi),$$

$$(b.)\qquad \sin\varphi\, e^{-\theta\cos\varphi}\left(\frac{\partial P^m}{\partial\varphi} - \theta\sin\varphi\, P^m\right)$$

werden, und die Grenzen so bestimmt, dass (a.) und (b.) verschwinden. Dies geschieht für die reellen Werthe $\varphi = 0,\ \pi$, ausserdem für die unendlichen Werthe von φ, für welche $e^{-\theta\cos\varphi}$ verschwindet, d. i., φ gleich iu gesetzt, für die oben angegebenen Werthe $u = g$, resp. $= g-\frac{i\pi}{2}$.

Dies genügt, um die Function F für alle positiven Werthe von θ festzustellen, und daher, um (3.) für alle θ vollständig zu integriren; es ist aber noch eine weitere Einsicht in die Natur des Integrals, welches F darstellt, erforderlich.

Ohne an der Definition zu ändern, kann man den Sprung vermeiden, welcher an der oberen Grenze eintrat, wenn der reelle Theil von θ verschwand, — den Sprung von g zu $g-\frac{\pi i}{2}$. Als obere Grenze in (1*.) kann man nämlich jeden Werth von u nehmen, der (a.) dadurch zu Null macht, dass er $\theta\cos iu$ einen unendlichen positiven reellen Theil giebt. Es sei nun

$$(c.)\qquad \theta = a(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

wo a positiv, und α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ genommen ist. Alsdann wird $u = g - \alpha i$ ein solcher Werth, und der allgemeinste positive ist $u = g-(\alpha+\chi)i$, wo χ eine beliebige reelle, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegende Grösse bezeichnet. Man zeigt leicht, dass die Integrale (1*.) für alle diese oberen Grenzen, d. h. bei festgehaltenem θ für alle erlaubten Werthe der χ, Dasselbe geben wie für

die Grenze g, resp. $g-\frac{\pi}{2}i$. Es ist ferner klar, dass, sobald $\theta\cos iu$ für ein unendliches u einen positiven reellen Theil besitzt, dieses unendliche u die Form $\pm g\mp(\alpha+\chi)i$ haben muss. Aehnliches gilt für die Integrale Ψ.

§. 4. In den Additionstheoremen der Kugelfunctionen gehe man nun zu den Grenzen über. Dazu setze man in der Formel (49.) des Handb.

$$P^n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) = \sum_{m=0}^{m=n}(-1)^m a_m^n P_m^n(x)P_m^n(x_1)\cos m\varphi,$$

und in der entsprechenden (52.)

$$x = 1+\frac{\theta^2}{2n^2}, \quad x_1 = 1+\frac{\theta_1^2}{2n^2},$$

wodurch

$$xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi = 1+\frac{\theta^2-2\theta\theta_1\cos\varphi+\theta_1^2}{2n^2}+\text{etc.}$$

wird. Dann entstehen die Sätze des Herrn *Neumann*: Es ist

$$(5.)\qquad f_0(\theta_2) = f_0(\theta)f_0(\theta_1)+2\sum_1^\infty(-1)^m f_m(\theta)f_m(\theta_1)\cos m\varphi,$$

$$(5^*.)\qquad F_0(\theta_2) = F_0(\theta)f_0(\theta_1)+2\sum_1^\infty F_m(\theta)f_m(\theta_1)\cos m\varphi,$$

wenn θ_2 in einem Dreieck die dritte, dem Winkel φ gegenüberliegende Seite bezeichnet, dessen andere (reelle oder nicht reelle) Seiten θ und θ_1 sind, d. h. wenn

$$\theta_2 = \sqrt{\theta^2-2\theta\theta_1\cos\varphi+\theta_1^2}$$

und θ_2 positiv genommen wird. Der Ausdruck (5*.) setzt voraus, dass $\operatorname{Mod}\theta > \operatorname{Mod}\theta_1$ sei. (Cf. §. 6).

Diesen Ausdrücken lassen sich ähnliche hinzufügen, welche man findet, indem man von den speciellen Laméschen Functionen höherer Ordnungen zu den Grenzen übergeht *). So erhält man für die dritte Ordnung und erste Art

$$(6.)\qquad \psi_0(\theta_2) = \sum_0^\infty(-1)^m(2m+1)\psi_m(\theta)\psi_m(\theta_1)P^m(\cos\varphi),$$

wobei man noch bemerken kann, dass ψ_0 ein sehr einfacher Ausdruck, nämlich

$$\psi_0(\theta) = \frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2\theta}$$

ist. Die entsprechenden Gleichungen für noch höhere Ordnungen durch Uebergang zur Grenze aufzusuchen, ist nicht erforderlich; wie die Formeln für die

---

*) M. vgl. meine Arbeit über diesen Gegenstand, Bd. 62 dieses Journals. Da ich in derselben nur die Formeln für die erste Art aufstellte, so will ich auch hier, der Kürze halber, den Formeln für die ψ nicht die entsprechenden für die Ψ hinzufügen. Die Grösse $\Psi_0(x)$ ist $\frac{ie^{-\theta}}{\theta}$.

zweite und dritte Ordnung in der früheren Arbeit die für die höheren durch Differentiation verschafften, so kann man auch alle *hierher* gehörigen Resultate erhalten, indem man (5.) und (6.) eine ganze Anzahl ν Male hintereinander nach $\cos\varphi$ differentiirt. Die Differentialquotienten vom Cosinus der Vielfachen von φ, resp. von $P^m(\cos\varphi)$ nach $\cos\varphi$ auf den *rechten Seiten* dieser Gleichungen (5.) und (6.) sind, wie man aus Tafel 3 meiner vorher erwähnten Arbeit weiss, selbst wieder specielle *Lamé*sche Functionen. Die *linken Seiten* braucht man nur ν Male nach θ_2 zu differentiiren und mit $(-2\theta\theta_1)^\nu$ zu multipliciren; sie verwandeln sich demnach, gemäss §. 2, resp. in

$$\left(-\frac{\theta\theta_1}{\theta_2}\right)^\nu f_\nu(\theta_2); \quad \left(-\frac{\theta\theta_1}{\theta_2}\right)^\nu \psi_\nu(\theta_2).$$

Nach Division durch $(\theta\theta_1)^\nu$ auf beiden Seiten erhält man die gesuchten Ausdrücke, nämlich die sehr einfachen Entwickelungen von $(\theta_2)^{-\nu} f_\nu(\theta_2)$ und $(\theta_2)^{-\nu}\psi_\nu(\theta_2)$ nach ν^{ten} Differentialquotienten in Bezug auf $\cos\varphi$ von den Cosinus der Vielfachen von φ, resp. von den Kugelfunctionen vom Argumente $\cos\varphi$. M. vgl. auch §. 7, No. 1.

§. 5. Die Ableitung der vorstehenden drei Sätze verursacht Weitläufigkeit, wenn der Uebergang zur Grenze mit aller erforderlichen Genauigkeit erfolgen soll. Es reichen aber zur Ableitung derselben die Mittel aus, welche man bei den entsprechenden Sätzen für die Kugelfunctionen *) anwendet, ja sogar gestaltet sich im vorliegenden Falle Alles viel einfacher als dort, so dass man nicht auf dem Umwege über die Kugelfunctionen zu ihnen gelangen wird. Herr *Neumann* entwickelt die Sätze (5.) durch Integration einer partiellen Differentialgleichung; hier gebe ich dieselben durch Betrachtung bestimmter Integrale:

Es lassen sich die Ausdrücke f und F in die Formen

$$2\pi f_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta\cos\varphi + mi\varphi}\, d\varphi,$$

$$2F_m(\theta) = \int_{-g+ai}^{g-ai} e^{-\theta\cos iu - mu}\, du$$

bringen; beide Integrale gestatten, nach §. 3, nicht nur eine reelle, sondern auch eine imaginäre Substitution, d. h. man kann, ohne die Grenzen zu ver-

*) Handb. d. Kugelf. II. Theil, 2. Kapitel, §§. 74, 75. Ueber die Möglichkeit der imaginären Substitution handeln dort §§. 42, 47, 58.

ändern, in den zu integrirenden Functionen statt φ oder u setzen $\varphi+\omega$ oder $u+\omega$, wo ω eine beliebige reelle oder nicht reelle Constante bezeichnet. Bei der Substitution im zweiten Integrale muss aber der imaginäre Theil von ω absolut $< \frac{\pi}{2}$ sein.

Setzt man nun für φ zuerst $\varphi+\omega$, dann $\varphi-\omega$ und addirt die entstehenden Ausdrücke, nachdem man sie vorher mit $e^{-mi\omega}$ resp. $e^{mi\omega}$ multiplicirt hat, so entsteht

$$(7.)\qquad 2\pi f_m(\theta)\cos m\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta\cos(\varphi+\omega)}\cos m\varphi\, d\varphi.$$

Auf ähnliche Art erhält man

$$(7^*.)\qquad 2\pi F_m(\theta)\cos mi\omega = \int_{-g+ai}^{g-ai} e^{-\theta\cos i(u+\omega)}\cos miu\, du,$$

wenn der reelle Theil von $i\omega$ unter $\frac{\pi}{2}$ liegt. Die Grenzen $\pm(g-ai)$ können, wie man weiss, entweder mit $\pm g$ oder mit $\pm\left(g-\frac{\pi}{2}i\right)$ vertauscht werden.

Diesen Ausdrücken lassen sich noch ähnliche, z. B.

$$(8.)\qquad 4\pi\psi_m(\theta)P^m(\cos\omega) = \int_0^{\pi} P^m(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} e^{\theta\cos\gamma}\, d\varphi_1$$

hinzufügen, wo

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\omega+\sin\varphi\sin\omega\cos\varphi_1$$

gesetzt ist.

§. 6. Es ist nun leicht, die Formeln (5.) und (6.) zu beweisen.

1. Zum Beweise von (5.) bilde man aus (7.) die Gleichung

$$2\pi f_m(\theta)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\theta_1\cos\omega}\cos m\omega\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\cos m\varphi\, d\varphi\int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta\cos(\varphi+\omega)-\theta_1\cos\omega}\, d\omega.$$

Die linke Seite verwandelt sich nach (1.) in

$$(-1)^m 4\pi^2 f_m(\theta).f_m(\theta_1).$$

Den Exponenten auf der rechten Seite transformire man in

$$\cos\omega.(\theta\cos\varphi-\theta_1)-\sin\omega.\theta\sin\varphi = \theta_2\cos(\omega+\omega_1),$$

wo θ_2 die im §. 4 definirte Grösse, und ω_1 einen von ω unabhängigen Winkel vorstellt, so dass das innere Integral auf der rechten Seite

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta_2\cos(\omega+\omega_1)}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta_2\cos\omega}\, d\omega = 2\pi f_0(\theta_2)$$

giebt. Man hat also

$$(-1)^m f_m(\theta) f_m(\theta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta_2) \cos m\varphi \, d\varphi,$$

den durch (5.) ausgedrückten Satz.

2. Um ferner (5*.) zu beweisen, setze man $i\omega$ für ω und θ_1 für θ in (7.) und bilde dann

$$2\pi f_m(\theta_1) \int_{-g+\alpha i}^{g-\alpha i} e^{-\theta \cos i\omega} \cos mi\omega \, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\varphi \, d\varphi \int_{-g+\alpha i}^{g-\alpha i} e^{-\theta \cos i\omega + \theta_1 \cos(\varphi + i\omega)} \, d\omega.$$

Die linke Seite ist nach (1*.)

$$4\pi f_m(\theta_1) F_m(\theta).$$

Der Exponent der rechten Seite

$$-\theta \cos i\omega + \theta_1 \cos(\varphi + i\omega)$$

hat offenbar für $\omega = \pm(g - \alpha i)$ einen reellen Theil, der negativ unendlich ist, sobald wir zu diesem Zwecke annehmen, dass $\operatorname{Mod}\theta > \operatorname{Mod}\theta_1$ ist. Ferner hat derselbe Exponent

$$-\cos i\omega . (\theta - \theta_1 \cos\varphi) - \sin i\omega . \theta_1 \sin\varphi$$

die Form $-\theta_2 \cos(i\omega - \omega_1)$, wo ω_1 von ω unabhängig ist, also, in Folge der Bemerkung am Schlusse des §. 3, auch die Form $-\theta_2 \cos iu$, wenn u die Werthe von $-(g - (\alpha_2 + \chi) i)$ bis $+(g - (\alpha_2 + \chi) i)$ durchläuft, wenn ferner α_2 für θ_2 die Bedeutung hat, welche α für θ, und χ dieselbe Bedeutung wie im §. 3. Da nun das innere Integral gleich

$$\int_{-g+(\alpha_2+\chi)i}^{g-(\alpha_2+\chi)i} e^{-\theta_2 \cos iu} \, du = 2 F_0(\theta_2)$$

wird, so ist auch die Gleichung (5*.) bewiesen.

3. Aus (8.) beweist man die Gleichung (6.), indem man zunächst

$$4\pi \psi_m(\theta) \int_0^{\pi} e^{-\theta_1 \cos\omega} P^m(\cos\omega) \sin\omega \, d\omega = \int_0^{\pi} P^m(\cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} e^{-\theta_1 \cos\omega + \theta \cos\gamma} \sin\omega \, d\omega$$

bildet. Die linke Seite ist $(-1)^m . 8\pi \psi_m(\theta) \psi_m(\theta_1)$. Der Exponent auf der rechten Seite giebt aufgelöst

$$(\theta \cos\varphi - \theta_1) . \cos\omega + \theta \sin\varphi . \sin\omega \cos\varphi_1,$$

so dass das innere Doppelintegral, nach einem bekannten Satze von *Poisson*, sich in

$$2\pi \int_0^{\pi} e^{\theta_2 \cos\omega} \sin\omega \, d\omega = 4\pi \psi_0(\theta_2)$$

verwandelt. Die so entstandene Gleichung

$$(-1)^m.2\psi_m(\theta_1) = \int_0^\pi \psi_0(\theta_2)P^m(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

stimmt mit (6.) überein.

§. 7. Die im Eingang (§. 1) erwähnten, in einer Abhandlung von Herrn *Kirchhoff* Bd. 48 dieses Journals vorkommenden Integrale lassen sich mit Hülfe der neuen Form der Cylinderfunction in elliptische Integrale verwandeln.

Nach *Kirchhoffs* Bezeichnung ist $P_m\left(\frac{\theta^2}{4}\right)$ was hier gleich

$$2.4\dots(2m)\theta^{-m}f_m(\theta)$$

gesetzt wird; vergleicht man die dort Q genannte Grösse für unendliche Werthe von θ mit F, so sieht man, dass dort die Gleichung

$$\theta^m Q_m\left(\frac{\theta^2}{4}\right) = 2^{m+1}F_m(\theta)$$

stattfindet. Den Werth von Q bei unendlichem θ findet man dazu aus der von Herrn *Kirchhoff* S. 354 angegebenen Reihe für Q; den Werth von F für unendliche θ erhält man, indem man $e^\theta F(\theta)$ nach der Methode behandelt, durch welche *Laplace* die Grenze solcher Ausdrücke findet, welche unter dem Integralzeichen wachsende Exponenten haben.

1. Das Integral, welches bei *Kirchhoff* auf S. 370 vorkommt, lässt sich sofort auf

$$X = \int_0^\infty F_0(nr)F_0(ns)\cos nx\,dn$$

zurückführen, wo r, s, x, n reelle Grössen vorstellen. Nun ist nach (1*.)

$$4F_0(r)F_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r\cos iu+s\cos iv)}\,du\,dv.$$

Setzt man $v = u+z$, so steht im Exponenten

$$-(r+s\cos iz)\cos iu+s\sin iz\sin iu,$$

welches auf die Form $-\varrho\cos i(u+\omega)$ gebracht werden kann, wo

$$\varrho^2 = r^2+2rs\cos iz+s^2,$$

und wo ω eine reelle Grösse wird. Man hat daher

$$4F_0(r)F_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varrho\cos iu}\,du$$

oder

$$4X = \int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}du\int_0^\infty e^{-n\varrho\cos iu}\cos nx\,dn.$$

Das innere Integral nach n lässt sich ausführen und giebt

$$\frac{\varrho \cos iu}{x^2+\varrho^2\cos^2 iu} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+\varrho i\cos iu}-\frac{1}{x-\varrho i\cos iu}\right).$$

Bekanntlich ist (M. vgl. Handb. d. K. S. 95, §. 38, No. 3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{x\pm\varrho i\cos iu} = \frac{2}{\sqrt{x^2+\varrho^2}}\left(\log\frac{x+\sqrt{x^2+\varrho^2}}{\varrho}\mp\frac{\pi}{2}i\right),$$

also findet man schliesslich

$$X = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{x^2+r^2+s^2+2rs\cos iz}}.$$

2. Das Integral auf S. 364, auf welches sich das von S. 363 zurückführen lässt, ist

$$Y = 2\int_0^{\infty} f_0(nr)F_0(ns)\cos nx\,dn,$$

in dem $s>r$ vorausgesetzt wird. Zur Reduction braucht man nicht das Product $f_0(r)F_0(s)$ in der Art zu transformiren, wie es eben mit $F_0(r)F_0(s)$ geschah, da man bereits aus (5*.) weiss, dass

$$f_0(r)F_0(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F_0(\varrho)\,d\varphi$$

ist, wenn man jetzt

$$\varrho^2 = r^2-2rs\cos\varphi+s^2$$

macht. Hierdurch wird

$$\pi Y = 2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-n\varrho\cos iu}\cos nx\,dn$$

$$= 2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{\varrho\cos iu}{x^2+\varrho^2\cos^2 iu}\,du,$$

und wenn man, wie in No. 1, die Integration nach u ausführt,

$$Y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{x^2+r^2+s^2-2rs\cos\varphi}},$$

wie Herr *Kirchhoff* gefunden hat.

§. 8. Es führen bekanntlich Fragen der mathematischen Physik auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \varDelta V;\qquad \varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

deren Integration man auf die von

$$\varDelta U+k^2U = 0$$

zurückführt, wenn k eine Constante vorstellt. Integrale derselben sind, wie aus Herrn *Neumanns* Bemerkungen *) folgt, $\psi_0(k\varrho i)$ und $\Psi_0(k\varrho i)$, wenn ϱ die Entfernung des unbestimmten Punktes x, y, z von einem festen Punkte vorstellt; daher sind, wenn man die Werthe jener Functionen (§. 4) berücksichtigt,

$$\frac{\sin k\varrho}{\varrho}, \quad \frac{\cos k\varrho}{\varrho}$$

ebenfalls Integrale.

Bedient man sich für ψ_0 der Reihenentwickelung (6.) im §. 4, (oder für Ψ_0 einer ähnlichen), indem man dort $k\varrho$ für θ_2 setzt, so kürzt man den Weg ab, auf dem man nach *Poisson* **) den von der Zeit abhängigen Wärmezustand der Kugel findet, und kann die Aufgabe für die Bewegung der Wärme analog der des Gleichgewichts behandeln.

§. 9. Die Differentialgleichung (3.) der Cylinderfunction ist im Vorhergehenden für alle ganzen Werthe der Zahl m durch

$$y = \alpha\int_0^\pi e^{-\theta\cos\varphi}\cos m\varphi\, d\varphi + \beta\int_0^\infty e^{-\theta\cos iu}\cos miu\, du$$

vollständig integrirt worden, wenn α und β willkürliche Constante vorstellen. Aus den Ausdrücken (a.) und (b.) des §. 3 sieht man sofort, dass zwar der mit β multiplicirte Theil noch ein Integral von (3.) bleibt, wenn m aufhört ganz zu sein, nicht aber der Factor von α, obgleich er einen endlichen Werth behält. Soll m eine rationale Zahl mit dem Nenner γ vorstellen, so wird dasselbe Integral, von 0 aber bis $\gamma\pi$ genommen, noch (3.) genügen. In allen Fällen kann man die vorstehenden beiden particulären Integrale durch

$$\theta^m\int_0^\pi e^{-\theta\cos\varphi}\sin^{2m}\varphi\, d\varphi, \quad \theta^m\int_0^\infty e^{-\theta\cos iu}\sin^{2m} iu\, du$$

ersetzen, wenn m die positive Wurzel aus der reellen oder imaginären Zahl

*) *Neumann,* Theorie der *Bessel*schen Functionen, §. 22, S. 59 u. 60. Herrn *Neumanns* Untersuchungen beziehen sich zwar nicht auf drei, sondern auf zwei Veränderliche, und daher nicht auf die ψ, sondern auf die f. Wenn man noch mehr Veränderliche als drei hat, so muss man anstatt f_0 und ψ_0 ihre vielfachen Differentialquotienten nach dem Quadrate des Arguments setzen (M. vgl. hier §§. 2 und 4). Aehnlich verhält es sich mit $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V$, der ein Potential $V = \Sigma\frac{\mu}{\varrho}$ genügt, wenn, wie im *Liouville*schen Journal S. II, T. XII, 1867, S. 104, μ eine Function von $t+\varrho$ bezeichnet.

**) *Poisson,* Théorie mathématique de la chaleur. Paris, 1835, §. 169, S. 369 u. 371.

m^2 bezeichnet. Es giebt nämlich

$$\theta^m \int e^{-\theta\cos\varphi} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi,$$

statt y in die linke Seite von (3.) eingesetzt, absolut

$$\theta^m e^{-\theta\cos\varphi} \sin^{2m+1}\varphi,$$

welches für $\varphi = 0$, π und für ein unendliches φ verschwindet. Man hat also das Resultat: *Wird das vollständige Integral der Differentialgleichung* (3.)

$$\theta^2 \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \theta \frac{dy}{d\theta} - (m^2 + \theta^2) y = 0$$

durch $[m;\theta]$ *bezeichnet, so ist*

$$(9.) \quad [m;\theta] = \theta^m \left(\alpha \int_0^\pi e^{-\theta\cos\varphi} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi + \beta \int_0^\infty e^{-\theta\cos iu} \sin^{2m} iu\, du \right),$$

wo rechts unter θ *und* m *die positiven Wurzeln aus* θ^2 *und* m^2 *verstanden werden. Als obere Grenze* ∞ *des zweiten Integrals kann man* (§. 3), *wenn* θ *rein imaginär ist,* $g - \frac{\pi}{2} i$, *in allen andern Fällen* g *nehmen, wo* g *das reell Unendliche vorstellt. Die particuläre Lösung, welche mit* β *multiplicirt ist, kann man immer mit*

$$\int_0^\infty e^{-\theta\cos iu} \cos miu\, du,$$

die mit α *multiplicirte, für rationale Werthe von* m, *mit*

$$\int_0^{\gamma\pi} e^{-\theta\cos\varphi} \cos m\varphi\, d\varphi$$

vertauschen, wenn γm *eine ganze positive Zahl ist.*

Die *Riccati*sche Gleichung lässt sich bekanntlich auf die Form bringen

$$\frac{dU}{dx} + U^2 - a^2 x^\mu = 0,$$

wo a und μ ganz beliebige, reelle oder nicht reelle Grössen vorstellen. Man weiss, dass die Integration dieser Gleichung auf das Auffinden des vollständigen Integrales der Gleichung

$$(10.) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 x^\mu z = 0$$

reducirt wird. (*Euler*, Institutiones calc. integr. Vol. II., Sect. I., Cap. VII., problema 120 u. 121). Diese lässt sich durch Substitution auf die Gleichung (3.) der Cylinderfunction zurückführen, und *man erhält dann als allgemeines*

Integral von (10.)

$$z = \sqrt{x}\left(\pm\frac{1}{\mu+2};\quad \frac{2a}{\mu+2}x^{\frac{\mu+2}{2}}\right),$$

wenn das Vorzeichen $\pm$ so verstanden wird, dass $\pm(\mu+2)$ positiv ist, und a diejenige Wurzel aus a^2 vorstellt, welche $\frac{a}{\mu+2}$ positiv macht.

Indem man durch ganz bekannte Methoden die Grenze aufsucht, der dieser Ausdruck für $\mu+2=0$ zustrebt, erhält man das Integral auch für diesen Fall, in welchem die Gleichung (10.), wie man weiss, zwei Potenzen von x zu particulären Lösungen hat.

Halle, im Juni 1868.

Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen.

(Von Herrn *A. Clebsch* in Giessen.)

---

§. 1. Definition der zu betrachtenden Fläche: Anzahl der auf ihr liegenden Geraden.

Die Oberflächen dritter Ordnung lassen sich so darstellen, dass die Coordinaten eines beweglichen Punktes der Fläche Functionen dritter Ordnung von drei homogen auftretenden Parametern sind, welche für sechs Werthsysteme dieser Parameter gleichzeitig verschwinden. Sie werden daher auf einer Ebene eindeutig so abgebildet, dass die ebenen Schnitte sich als Curven dritter Ordnung darstellen, welche sechs Punkte, die Abbildungen von sechs sich nicht schneidenden Geraden, gemein haben.

Indem man zu denjenigen Oberflächen übergeht, deren Coordinaten sich ebenfalls durch Functionen dritter Ordnung darstellen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\xi_1\xi_2\xi_3), \\ \varrho x_2 = f_2(\xi_1\xi_2\xi_3), \\ \varrho x_3 = f_3(\xi_1\xi_2\xi_3), \\ \varrho x_4 = f_4(\xi_1\xi_2\xi_3), \end{cases}$$

welche aber nur für fünf Werthsysteme der ξ gleichzeitig verschwinden, sieht man zunächst, dass diese Flächen von der vierten Ordnung sein müssen. Jeder ebene Schnitt dieser Flächen vierter Ordnung ist also eine Curve vierter Ordnung, welche sich als Curve dritter Ordnung eindeutig abbilden lässt. Jede derselben muss daher dem Geschlechte $p=1$ angehören, muss also zwei Doppelpunkte besitzen. Daher hat die Fläche nothwendig eine Doppelcurve zweiter Ordnung.

Es ist ausserdem leicht zu sehen, dass die durch die Gleichungen (1.) dargestellte Fläche nur eine endliche Anzahl von geraden Linien besitzt, also keine windschiefe Fläche ist. Es folgt daraus, dass die Doppelcurve ein Kegelschnitt ist, da zwei sich nicht schneidende Gerade als Doppelcurve einer Fläche vierter Ordnung nur bei einer windschiefen Fläche auftreten können.

Um die auf der Fläche liegenden Geraden zu finden, untersuche ich die Ordnung der Raumcurve, welche einer beliebig in der Abbildungsebene gegebenen Curve m^{ter} Ordnung entspricht. Die fünf allen Abbildungen ebener Schnitte gemeinsamen Fundamentalpunkte sind selbst Bilder von fünf sich nicht schneidenden Geraden, die auf der Oberfläche liegen. Geht nun die gegebene ebene Curve beziehungsweise $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_5$ mal durch diese fünf Punkte, so wird sie von der Abbildung eines ebenen Schnittes $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_5)$ mal in diesen Punkten getroffen, was einen Schnitt der entsprechenden Raumcurven nicht anzeigt; eine Ebene oder eine ebene Schnittcurve der Fläche trifft also die der gegebenen ebenen Curve entsprechende Raumcurve nur in

$$N = 3n - \Sigma\alpha$$

Punkten und dies ist die Ordnung der Raumcurve *).

Soll diese Zahl gleich 1 sein, also die Raumcurve in eine Gerade übergehen, so darf offenbar keine der Zahlen α grösser als 1 sein, da sie die Anzahl von Begegnungen zwischen der Raumcurve und einer der fünf Fundamentalgeraden bedeutet. Also ist $\Sigma\alpha \overline{\overline{<}} 5$, und es kann also nur $n = 1$ oder $n = 2$ sein. Im zweiten Fall wird das Bild einer Geraden der durch die fünf Fundamentalpunkte gelegte Kegelschnitt, im ersten Fall erhält man die zehn Verbindungslinien der Fundamentalpunkte.

Die betrachtete Oberfläche enthält daher sechzehn Gerade, indem man voraussetzt, dass von den fünf Fundamentalpunkten der Bildebene nicht drei in einer Geraden liegen.

---

*) Die Formeln für die Singularitäten der Raumcurve sind, wenn die ebene Curve noch ausserdem d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte enthält, wie bei den Flächen dritter Ordnung (vgl. Bd. 65 dieses Journals p. 364):

$$\begin{aligned} N &= 3n - \Sigma\alpha, \\ R &= n(n+3) - 2d - 3r - \Sigma\alpha(\alpha+1), \\ K &= 3n^2 - 6d - 8r - 3\Sigma\alpha^2, \\ B &= r, \\ A &= 6n(n-1) - 12d - 15r - 2\Sigma\alpha(3\alpha-1), \\ p &= \frac{n-1.n-2}{2} - d - r - \Sigma\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \end{aligned}$$

und für den vollständigen Durchschnitt mit einer Fläche m^{ter} Ordnung:

$$\begin{aligned} N &= 4m, \\ R &= 4m(m+1) - 2d - 3r, \\ K &= 12m^2 - 6d - 8r, \\ B &= r, \\ A &= 8m(3m-1) - 12d - 15r, \\ p &= 2m^2 - 2m + 1 - d - r. \end{aligned}$$

Oben ist nachgewiesen, dass die untersuchte Fläche eine Fläche vierter Ordnung mit einem ebenen Kegelschnitt als Doppelcurve ist. Dass sie auch die allgemeinste Fläche dieser Art ist, wird weiter unten gezeigt werden.

§. 2. Gruppirungen der Geraden.

Bezeichnen wir durch 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Fundamentalpunkte, durch 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 die Verbindungsgeraden 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2,3; 2,4; 2,5; 3,4; 3,5; 4,5; durch 16 den durch 1, 2, . . . 5 gelegten Kegelschnitt. Zwischen den 16 durch diese Gebilde dargestellten Geraden finden folgende Beziehungen statt.

Jede der sechzehn Geraden wird von fünf andern geschnitten, welche einander nicht schneiden. Die Geraden, welche auf diese Weise den verschiedenen sechzehn Geraden zugeordnet werden, sind:

(I.)

1)	6,	7,	8,	9,	16	9)	1,	5,	10,	11, 13
2)	6,	10,	11,	12,	16	10)	2,	3,	8,	9, 15
3)	7,	10,	13,	14,	16	11)	2,	4,	7,	9, 14
4)	8,	11,	13,	15,	16	12)	2,	5,	7,	8, 13
5)	9,	12,	14,	15,	16	13)	3,	4,	6,	9, 12
6)	1,	2,	13,	14,	15	14)	3,	5,	6,	8, 11
7)	1,	3,	11,	12,	15	15)	4,	5,	6,	7, 10
8)	1,	4,	10,	12,	14	16)	1,	2,	3,	4, 5.

Da, wie sich unten zeigen wird, diese Geraden einander völlig coordinirt sind, so erkennt man, dass die in Rede stehende Abbildung der Fläche auf sechzehn verschiedene Arten vor sich gehen kann, wobei immer eine der Geraden sich als Kegelschnitt abbildet, und die in obiger Tabelle neben ihr befindlichen die Ausnahmepunkte liefern.

Die Tafel (I.) liefert *vierzig Paare von sich schneidenden Geraden:*

(II.)

1,6	2,6	3,7	4,8	5,9	6,13	7,15	9,11
1,7	2,10	3,10	4,11	5,12	6,14	8,10	9,13
1,8	2,11	3,13	4,13	5,14	6,15	8,12	10,15
1,9	2,12	3,14	4,15	5,15	7,11	8,14	11,14
1,16	2,16	3.16	4,16	5,16	7,12	9,10	12,13;

die Ebenen derselben sind die dreifach berührenden Tangentenebenen der Fläche.

Nehmen wir ein beliebiges dieser Paare heraus und eine dritte Gerade, welche eine Gerade des Paars schneidet, so existirt immer noch *eine* Gerade, welche sowohl die andere Gerade des Paars als die dritte Gerade schneidet. Es setzen sich so 40.4 mal zwei Paare zu einem windschiefen Viereck zusammen; dabei aber tritt jedes windschiefe Viereck viermal auf, und es giebt also im Ganzen *vierzig aus den sechzehn Geraden gebildete windschiefe Vierecke:*

III.)
1, 6,15, 7; 1, 6,14, 8; 1, 6,13, 9; 1,6, 2,16; 1,7,12, 8; 1, 7,11, 9; 1, 7,3,16; 1, 8,10, 9;
1, 8, 4,16; 1, 9, 5,16; 2, 6,15,10; 2,6,14,11; 2,6,13,12; 2,10, 3,16; 2,10,8,12; 2,10, 9,11;
2,11, 4,16; 2,11, 7,12; 2,12, 5,16; 3,7,11,14; 3,7,12,13; 3, 7,15,10; 3,10,9,13; 3,10, 8,14;
3,13, 6,14; 3,13, 4,16; 3,14, 5,16; 4,8,14,11; 4,8,12,13; 4, 8,10,15; 4,11,9,13; 4,11. 7,15;
4,13, 6,15; 4,15, 5,16; 5, 9,13,12; 5,9,11,14; 5,9,10,15; 5,12, 8,14; 5,12,7,15; 5,14, 6,15.

Dagegen gehören zu jedem Paar drei andere, welche dasselbe *nicht* schneiden; diese drei anderen schneiden sich unter einander ebenfalls nicht. *Die vierzig Paare* (I.) *zerfallen daher in zehn Gruppen zu vier, dergestalt, dass vier Paare einer Gruppe einander nicht schneiden; und diese zehn Gruppen zerfallen wieder in fünfmal zwei solche conjugirte Gruppen, welche zusammen alle sechzehn Geraden enthalten.*

Man findet daher folgende Tafel, in welcher die Paare (I.) gruppenweise geordnet, und zwei conjugirte Gruppen horizontal neben einander gestellt sind:

(IV.)

2,6;	3,7;	4,8;	5,9.	1,16;	10,15;	11,14;	12,13.
1,6;	3,10;	4,11;	5,12.	2,16;	7,15;	8,14;	9,13.
1,7;	2,10;	4,13;	5,14.	3,16;	6,15;	8,12;	9,11.
1,8;	2,11;	3,13;	5,15.	4,16;	6,14;	7,12;	9,10.
1,9;	2,12;	3,14;	4,15.	5,16;	6,13;	7,11;	8,10.

Diese Tafel ist vorzugsweise von Wichtigkeit, weil sie lehrt, *dass die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen, mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades gelöst wird.* Diese Gleichung, welche die fünf Paare von Gruppen (IV.) liefert, ist keine andere, als diejenige, mit deren Hülfe Herr *Kummer* die fünf Kegel zweiter Ordnung erhalten hat, deren Seiten die fragliche Fläche doppelt berühren *).

*) Sitzung der Berl. Acad. vom 16. Juli 1863.

§. 3. Kegelschnittschaaren, welche auf der Fläche liegen.

Man wird hierauf geführt, indem man die auf der Fläche liegenden Kegelschnitte betrachtet. Soll eine Curve n^{ter} Ordnung der Bildebene einen Kegelschnitt darstellen, so muss

$$N = 3n - \Sigma\alpha$$

gleich 2 sein, während zugleich keine der Zahlen α den Werth 2 übersteigen darf. Man kann daher versuchen, n gleich 4, 3, 2, 1 zu setzen. Für $n=4$ müssten sämmtliche α gleich zwei sein; daher müsste die Abbildung des Kegelschnitts eine Curve vierter Ordnung mit sechs Doppelpunkten sein, was nicht möglich ist. Für $n=3$ müsste $\Sigma\alpha = 7$ sein, daher mindestens zwei der α grösser als 1, und man erhielte eine Curve dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Es bleibt also nur übrig:

1) $n=2$, ein α gleich 0, die übrigen 1,

2) $n=1$, ein α gleich 1, die übrigen 0.

Man erhält also zehn Schaaren von Kegelschnitten; fünf derselben bilden sich als Kegelschnittschaaren ab, die je vier der Fundamentalpunkte zu gemeinschaftlichen Schnittpunkten haben; die fünf anderen als Strahlbüschel, deren Scheitel in den Fundamentalpunkten liegen. Unter ihnen sind als conjugirt zu betrachten zwei Schaaren, deren eine vier Punkte zu Grundpunkten, und deren andere den fünften Punkt zum Büschelscheitel hat.

Dass diese Kegelschnittschaaren wirklich existiren, zeigt sich auf folgende Art. Jeder ebene Schnitt der Oberfläche wird abgebildet durch eine Curve dritter Ordnung, deren Gleichung ist:

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 + u_4 f_4 = 0.$$

Ist nun $p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 = 0$ das Büschel von Kegelschnitten mit vier von den Fundamentalpunkten zu Grundpunkten, $q_1 a_1 + q_2 a_2 = 0$ das Büschel von Geraden, welches den fünften Punkt zum Scheitel hat, so kann man die Parameter u, p, q so bestimmen, dass identisch

$$\Sigma u_i f_i = (p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2)(q_1 a_1 + q_2 a_2).$$

Denn da diese Gleichung für die fünf Fundamentalpunkte bereits besteht, so braucht sie, um identisch zu sein, nur noch für fünf beliebig gewählte Punkte erfüllt zu werden. Setzt man diese Gleichungen an, so hat man sechs Gleichungen, in welchen man die p oder die q beliebig wählen darf, und welche dann die andern Unbekannten auf lineare Weise bestimmen.

Jeder Kegelschnitt eines der Kegelschnittbüschel vereinigt sich also mit einer Geraden des conjugirten Strahlbüschels zur Abbildung eines in zwei Kegelschnitte zerfallenden ebenen Schnittes der Fläche.

Die zehn Kegelschnittschaaren der Fläche vereinigen sich auf diese Weise zu den Schnittcurven der fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen, welche nach Herrn *Kummer* die Tangentenebenen der doppeltberührenden Kegel sind. Und zwar lehrt die Tafel (IV.):

Die Kegelschnittschaaren, in welchen die Tangentenebenen eines doppeltberührenden Kegels die Fläche schneiden, haben die Eigenschaft, dass immer die Kegelschnitte einer Schaar die Geraden einer Gruppe (IV.) *treffen, und die Paare der conjugirten Geraden unter sich als specielle Kegelschnitte enthalten, während umgekehrt die Kegelschnitte der andern Schaar die letzteren treffen und die aus den ersten gebildeten Paare enthalten.*

Man bemerkt, wie hiebei die in conjugirten Schaaren zu Geradenpaaren ausartenden Kegelschnitte sich zu den windschiefen Vierecken (III.) zusammensetzen, deren jedes aber bei zwei verschiedenen Kegeln auftritt.

In der Tafel (IV.) sind die fünf Gruppen links in den Strahlbüscheln enthalten, welche beziehungsweise 1, 2, 3, 4, 5 zu Scheiteln haben, die Gruppen rechts in den entsprechenden Kegelschnittbüscheln.

§. 4. Abbildung der Doppelcurve.

Die Doppelcurve selbst ist der einzige ebene Schnitt der Oberfläche, welcher nicht eindeutig abgebildet wird. Da sie durch den Schnitt der Oberfläche mit einer bestimmten Ebene erhalten wird, so muss ihre Abbildung eine Curve des Systems dritter Ordnung

$$\Sigma u_i f_i = 0$$

sein; die Punkte dieser Curve entsprechen paarweise den Punkten der Doppelcurve. Sehen wir, wie man diese besondere Curve des Systems erhalten kann.

Gehen wir von dem Kegelschnitt 16 aus, welcher die bei der Abbildung bevorzugte Gerade der Fläche repräsentirt. Durch diese Gerade kann man unendlich viele Ebenen legen; jede schneidet die Fläche noch in einer Curve dritter Ordnung, welche den mit dem Schnittpunkt der Geraden und der Doppelcurve vereinigten Punkt enthält und ausserdem einen Doppelpunkt dort hat, wo die Schnittebene der Doppelcurve zum zweiten Male begegnet. Die Abbildung dieser Curve muss, da sie mit dem Bilde der Geraden, dem

Kegelschnitt 16, eine Curve dritter Ordnung ausmacht, eine Gerade sein; und zwar eine Gerade, die durch einen bestimmten Punkt P der Bildebene geht, welche dem mit dem Schnittpunkt der Geraden 16 und der Doppelcurve vereinigten Punkte der Fläche entspricht. Das Büschel von Curven dritter Ordnung, das auf der Fläche durch den Ebenenbüschel entsteht, welcher die Gerade 16 zur Axe hat, bildet sich also als Strahlbüschel ab, welches den Punkt P zum Scheitel hat.

Um den Punkt P zunächst zu finden, verfahre ich folgendermassen. Die Parameter u des Ausdrucks $\Sigma u_i f_i$ bestimme ich so, dass die Curve

$$(2.) \qquad \Sigma u_i f_i = 0$$

noch durch zwei weitere Punkte des Kegelschnitts 16 geht, was zwei lineare Bedingungen für die u ergiebt, also zwei derselben linear durch die übrigen oder durch irgend zwei Grössen λ, μ ausdrücken lässt. Die Curve (2.) enthält dann den Kegelschnitt 16 ganz, und nimmt also die Form an

$$\varphi.(\lambda a + \mu b) = 0,$$

wo a, b lineare Ausdrücke sind. Das Büschel $\lambda a + \mu b = 0$ ist also die Abbildung der Curven dritter Ordnung, in welchen die durch die Gerade 16 gelegten Ebenen die Fläche noch schneiden; und der Scheitel des Büschels, $a = 0$, $b = 0$, ist der Punkt P.

Auf jedem Strahle dieses Büschels liegen zwei Punkte Q, Q', deren Vereinigung den Doppelpunkt der betreffenden Curve dritter Ordnung repräsentirt. Der Ort dieser Punktepaare ist die Abbildung der Doppelcurve. Nehmen wir irgend zwei Paare Q, Q'. Durch die entsprechenden beiden Punkte der Doppelcurve lässt sich ein Büschel von Ebenen legen. *Daher müssen je zwei Punktepaare Q, Q' mit den Fundamentalpunkten zusammen ein System von neun Punkten bilden, durch welches sich unendlich viele Curven dritter Ordnung, und zwar Curven des Systems $\Sigma u_i f_i = 0$, legen lassen.*

Ich suche jetzt den Punkt P' auf dem Kegelschnitt 16, welcher der Abbildung der Doppelcurve angehört, welcher also den auf der Geraden 16 liegenden Punkt der Doppelcurve repräsentirt und sich auf der Fläche mit dem durch P repräsentirten Punkte vereinigt. Von den vier gegebenen Grundcurven $f_i = 0$ können wir zwei durch

$$\varphi.a = 0, \qquad \varphi.b = 0$$

ersetzen; irgend zwei andere Combinationen des Systems $\Sigma u_i f_i = 0$ seien $\psi = 0$, $\chi = 0$. Damit die Punkte P, P' denselben Punkt x des Raumes repräsentiren, müssen die Werthe von $\varphi.a$, $\psi.b$, ψ und χ dieselben Verhält-

nisse haben, ob man sie für P' oder für P bildet. Bezeichnet man die Werthe für den bekannten Punkt P durch den angehängten Index 0, so hat man demnach zur Bestimmung von P' die Gleichungen

$$\varphi=0, \quad \psi\chi_0-\chi\psi_0=0.$$

Sie stellen einen Kegelschnitt und eine Curve dritter Ordnung dar, welche ausser den Fundamentalpunkten sich nur noch in dem gesuchten Punkte durchschneiden.

Für die Abbildung der Doppelcurve liefert dies nicht nur den weiteren Punkt P', sondern auch eine Tangente. Denn da jede durch P gehende Linie die Abbildung der Doppelcurve in zwei zusammengehörigen Punkten schneidet, auf der Geraden PP' aber P selbst einer dieser Punkte ist, so muss die Gerade PP' bei P zwei unendlich nahe Punkte enthalten, also die Abbildung der Doppelcurve in P berühren. So sind jetzt acht Punkte dieser Curve bestimmt.

Dieselbe geht demnach noch durch einen bestimmten neunten Punkt. Da der Curve zwei an P unendlich nahe Punkte von PP' gehören, so müssen auf ihr auch zwei an P' unendlich nahe, jenen entsprechende Punkte liegen, d. h. es muss ihre Tangente in P gegeben sein. In der That ist die Curve, welche aus $\varphi=0$ und der Geraden PP' besteht, nichts anderes als die Abbildung des ebenen Schnitts der Tangentenebene der Oberfläche in P', d. h. derjenigen Tangentenebene der Doppelcurve, welche die Gerade 16 enthält. Die andere Tangentenebene, welche in demselben Punkte der Doppelcurve möglich ist, und welche sich mit jener in einer Tangente der Doppelcurve schneidet, bildet sich als Curve dritter Ordnung ab, welche durch die Fundamentalpunkte so wie durch P' geht und in P einen Doppelpunkt hat. Die Gleichung der Abbildung findet man sofort, indem man die Parameter u der Curve $\Sigma u_i f_i=0$ so bestimmt, dass die Differentialquotienten derselben im Punkte P verschwinden. Die so erhaltene Curve bildet mit der Combination von $\varphi=0$ und PP' das Büschel von Curven dritter Ordnung, welchem die Abbildung der Doppelcurve angehört, und die Tangente der eben erwähnten Curve im Punkte P' giebt also auch die Tangente für die Abbildung der Doppelcurve.

Einen letzten Punkt zur Bestimmung der Abbildung der Doppelcurve kann man auf mannigfache Weise finden. Man kann nämlich ebenso wie das Punktepaar PP' andere Punktepaare finden, welche sich zu andern Geraden verhalten wie jenes zu der Geraden 16. Wird eine Gerade der Fläche durch

eine Gerade abgebildet, so sind die Curven dritter Ordnung, welche sie zu einem vollständigen ebenen Schnitte ergänzen, in der Abbildung Kegelschnitte durch die drei Fundamentalpunkte, welche dem Bilde der Geraden *nicht* angehören. Man erhält sie, wenn man die Curve $\Sigma u_i f_i = 0$ zwingt, durch noch zwei Punkte auf der Verbindungslinie zweier Fundamentalpunkte zu gehen, was zwei lineare Bedingungen zwischen den u giebt. Aus der Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ sondert sich dann ein linearer Factor ab, und es bleibt die Gleichung eines Kegelschnittbüschels übrig. Daher durchschneiden diese Kegelschnitte sich nicht nur in den andern drei Fundamentalpunkten, sondern noch in einem vierten Punkte, welcher in Bezug auf die hier betrachtete Gerade genau die Rolle spielt wie P für 16, und welcher der Doppelcurve angehört.

Wählt man eine Gerade der Oberfläche, welche sich als Fundamentalpunkt, etwa 1, abbildet, so sind die Bilder der Ergänzungscurven dritter Ordnung wieder Curven dritter Ordnung, welche 1 zum Doppelpunkt haben. Man findet sie also, indem man die Parameter u so bestimmt, dass die Differentialquotienten von $\Sigma u_i f_i$ nach den ξ für den Punkt 1 verschwinden. Aber da $\Sigma u_i f_i$ für jenen Punkt ohnedies verschwindet, so erhält man nur *zwei* von einander unabhängige Bedingungen zwischen den u, und man kann also zwei durch die übrigen linear ausdrücken. Die Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ verwandelt sich hiedurch in die Gleichung eines Büschels von Curven dritter Ordnung, welche in 1 einen Doppelpunkt haben. Dieselben schneiden sich daher ausser in den Fundamentalpunkten in *einem* Punkte, welcher für die hier benutzte Gerade die Stelle von P versieht und der Abbildung der Doppelcurve angehört.

Man sieht, wie auf diese Weise die Abbildung der Doppelcurve mehr als hinreichend bestimmt ist. Analytisch ergiebt sie sich daraus, dass man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
f_1(\xi_1 \xi_2 \xi_3) &= f_1(\eta_1 \eta_2 \eta_3),\\
f_2(\xi_1 \xi_2 \xi_3) &= f_2(\eta_1 \eta_2 \eta_3),\\
f_3(\xi_1 \xi_2 \xi_3) &= f_3(\eta_1 \eta_2 \eta_3),\\
f_4(\xi_1 \xi_2 \xi_3) &= f_4(\eta_1 \eta_2 \eta_3)
\end{aligned}$$

die η eliminirt. In diesen Gleichungen sind ξ, η zwei verschiedene Punkte der Abbildung, welche denselben Punkt des Raumes darstellen. Nach einer Methode, ähnlich derjenigen, welche an einem andern Orte entwickelt ist*), führt man diese Elimination dadurch aus, dass man zunächst aus den Glei-

*) *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abel*schen Functionen, p. 56ff.

chungen

$$\varrho x_i = f_i(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$$

die η eliminirt. Man gelangt dann zu der Gleichung der Oberfläche

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0,$$

welche von der vierten Ordnung ist. Der Ausdruck

$$F'(x_1)\delta x_1 + F'(x_2)\delta x_2 + F'(x_3)\delta x_3 + F'(x_4)\delta x_4 = 0$$

wird dann, wenn man die x_i durch $f_i(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ ersetzt, durch die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_3} \delta x_4$$

theilbar, und der Quotient ist die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve. Dass das Resultat von der dritten Ordnung ist, übersieht man sofort; aber es scheint nicht ganz leicht, einzusehen, dass die entstehende Gleichung die Form $\Sigma u_i f_i = 0$ hat.

§. 5. Ebene Schnitte und vollständige Durchschnittscurven.

Da die Abbildung der Doppelcurve hienach aus den gegebenen Functionen f_i gefunden werden kann, so will ich jetzt bei der Darstellung der Abbildungen aller ebenen Schnitte der Oberfläche die Abbildung der Doppelcurve als gegeben voraussetzen. Ihre Gleichung sei $f = 0$. Auf ihr wähle ich beliebig einen Punkt P, dessen Coordinaten α_1, α_2, α_3 seien, und welche in der Abbildung die Stelle des früher so bezeichneten Punktes vertreten soll. Die fünf Fundamentalpunkte sind dann nicht mehr beliebige Punkte von f, vielmehr müssen sie mit dem Punkte, in welchem die Tangente in P die Curve nochmals schneidet, auf einem Kegelschnitte liegen. Ist $\Delta = 0$ die *Hesse*sche Curve zu $f = 0$, und setzt man

$$\Delta_{\alpha^2 \xi} = \tfrac{1}{3} \Sigma \xi_i \frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha_i},$$

$$f_{\alpha^2 \xi} = \tfrac{1}{3} \Sigma \xi_i \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_i},$$

so schneiden sich bekanntlich die Geraden

$$\Delta_{\alpha^2 \xi} = 0, \quad f_{\alpha^2 \xi} = 0$$

in jenem Punkte der Curve. Sind also $A = 0$, $B = 0$ beliebige Gerade in der Abbildungsebene, so ist

$$\varphi = A f_{\alpha^2 \xi} - B \Delta_{\alpha^2 \xi} = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Kegelschnitts, welcher durch den erwähnten

Punkt geht, und welcher also durch seine übrigen Durchschnitte mit der Curve dritter Ordnung solche fünf Punkte bestimmt, wie sie zu Fundamentalpunkten gewählt werden dürfen.

Nennen wir $3n$ Punkte, welche die Schnittpunkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit der gegebenen Curve dritter Ordnung $f=0$ sind, kurz ein *Schnittpunktsystem n^{ter} Ordnung*. Die zu den Punkten eines solchen gehörigen elliptischen Integrale erster Gattung w_i (mit beliebig constanter unterer Grenze genommen) genügen dann immer der Gleichung

$$w_1+w_2+\cdots+w_{3n} = nc,$$

wo c eine gewisse Constante bedeutet. Gehört zum Punkte P das Integral p, zu dem ihm zugeordneten Punkte P' des Kegelschnitts φ das Integral p', so ist, da P zweimal genommen und P' ein Schnittpunktsystem erster Ordnung bilden,

$$2p+p' = c.$$

Sind ferner $q, q'; r, r'$ etc. Integrale, die zu Punktepaaren auf den durch P gelegten Strahlen gehören, so ist auch immer:

$$p+q+q'=c, \qquad p+r+r'=c, \qquad \text{etc.}$$

Die Integrale der Fundamentalpunkte seien $v_1, v_2, \ldots v_5$; dann ist auch noch

$$p'+\Sigma v_i = 2c.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$\Sigma v_i+q+q'+r+r' = 3c,$$

d. h. *je zwei auf Strahlen des Büschels P gelegene Punktepaare bilden mit den Fundamentalpunkten ein Schnittpunktsystem dritter Ordnung.* Jede Curve dritter Ordnung, welche die Fundamentalpunkte, ein Punktepaar von $f=0$ auf einem Strahl des Büschels P enthält und durch irgend einen andern Punkt geht, enthält auch noch denjenigen, in welchem die Verbindungslinie des letzteren mit P die Curve $f=0$ schneidet.

Ich werde jetzt zeigen, dass wirklich *das System der durch je zwei Punktepaare auf Strahlen des Büschels P und durch die Fundamentalpunkte gelegten Curven dritter Ordnung die Form*

$$(3.) \qquad u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3+u_4f_4 = 0$$

hat, also mit dem System der Abbildungen ebener Schnitte der Oberfläche vierter Ordnung völlig identisch ist.

Zu diesem Ende wähle ich in der Ebene einen beliebigen Punkt A und drei Strahlen des Büschels P, auf denen die Punktepaare QQ', RR', SS' liegen. Die Curven $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ lege ich durch die Fundamentalpunkte und durch A, ausserdem $f_1=0$ durch RR', S; die Curve geht dann



auch durch S'; $f_2=0$ durch SS', Q, mithin auch durch Q'; endlich $f_3=0$ durch QQ', R, also auch durch R'. Jede Curve $f_1+\lambda f_2=0$ geht dann durch die Fundamentalpunkte, durch A, und durch SS'; bestimmt man λ so, dass sie noch durch einen beliebig gewählten Punkt T der Curve $f=0$ geht, so enthält sie auch den zugeordneten Punkt T', der mit T auf einem Strahle des Büschels P liegt. Ebenso enthält $f_1+\mu f_3=0$, wenn μ so bestimmt wird, dass die Curve durch den Punkt T geht, auch den Punkt T'. Auch die Curve

$$(4.) \qquad (f_1+\lambda f_2)+\varrho(f_1+\mu f_3) = 0$$

enthält T, T', und wenn man ϱ so bestimmt, dass die Curve durch einen Punkt U von $f=0$ geht, auch den zugeordneten Punkt U'. Die Curve (4.) geht also durch die Fundamentalpunkte und durch A, und enthält zwei beliebig gewählte Paare TT', UU'. Die Form (4.) umfasst demnach bei beliebiger Wahl der Parameter λ, μ, ϱ alle Curven dritter Ordnung, welche durch die Fundamentalpunkte und A gehen und zwei Punktepaare TT', UU' enthalten. Alle diese Punkte, ausser A, enthält auch $f=0$; daher umfasst die Gleichung

$$(5.) \qquad (f_1+\lambda f_2)+\varrho(f_1+\mu f_3)+\sigma f = 0$$

alle Curven dritter Ordnung, welche überhaupt durch die Fundamentalpunkte und durch zwei Punktepaare TT', UU' gelegt werden können. Das System (5.) aber ist von dem System (3.) nicht verschieden.

Man sieht hieraus, dass die Wahl der Abbildung der Doppelcurve, des Punktes P, und des bis auf einen Punkt willkürlichen Kegelschnitts φ die Abbildung völlig und eindeutig, und also, bis auf eine lineare Transformation, deren Coefficienten beliebig bleiben, auch die Gleichung der Fläche vollständig bestimmt.

So wie die Abbildung jedes ebenen Schnittes durch die Fundamentalpunkte geht, und die Abbildung der Doppelcurve in zwei Punktepaaren QQ' schneidet, *so muss die Abbildung des vollständigen Durchschnitts der Fläche vierter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung eine Curve $3n^{ter}$ Ordnung sein, welche jeden Fundamentalpunkt n fach enthält, und ausserdem die Abbildung der Doppelcurve in $2n$ Punktepaaren QQ' schneidet.* Man erhält die Gleichung dieser Curve, wenn

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

die schneidende Fläche ist, in der Form

$$F(f_1 f_2 f_3 f_4) = 0.$$

Aber auch der soeben ausgesprochene Satz ist umkehrbar, und man weist dies ähnlich nach, wie das Entsprechende bezüglich der ebenen Schnitte. Man

kann daher umgekehrt jede Curve mit den oben bezeichneten Eigenschaften als die Abbildung des vollständigen Durchschnitts der gegebenen Fläche mit einer Fläche n^{ter} Ordnung betrachten. Dabei mag bemerkt sein, was sofort ersichtlich ist, dass, wenn etwa die Curve $3n^{ter}$ Ordnung in einem der Fundamentalpunkte einen $(n+1)$fachen Punkt hat, die dem Fundamentalpunkte entsprechende Gerade einen Theil der vollständigen Durchschnittscurve bildet.

Die hier bewiesene Eigenschaft ebener Schnittcurven führt augenblicklich zur Lösung einer Reihe von Aufgaben, deren genauere Ausführung, da sie auf der Hand liegt, hier übergangen werden kann. So construirt man zu der Abbildung jedes Kegelschnitts einer der zehn Schaaren die Abbildung des ergänzenden Kegelschnitts, insbesondere die Bilder der vierzig Kegelschnitte, welche in den Ebenen der vierzig Paare von Geraden liegen, u. s. w.

§. 6. Curven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen.

Bei der Frage nach Curven dritter Ordnung, welche auf der Oberfläche liegen, kann man zunächst die ebenen betrachten. Diese bilden immer mit einer Geraden einen ebenen Schnitt; es giebt also sechzehn Schaaren, welche sich abbilden 1) als Gerade durch den Punkt P; 2) als Kegelschnittschaaren durch drei Fundamentalpunkte und durch ein Punktepaar QQ', daher mit einem weiteren gemeinsamen Punkt (vgl. §. 4); 3) als Curven dritter Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte gehen und in einem derselben einen Doppelpunkt haben, welche ausserdem ein Paar QQ' enthalten und demnach noch einen weiteren festen Punkt besitzen (§. 4). Jede dieser Schaaren enthält fünfmal eine Gerade und einen Kegelschnitt.

Um die unebenen Curven dritter Ordnung zu finden, welche auf der Fläche liegen, gehe ich auf die Gleichung

$$N = 3n - \Sigma\alpha$$

zurück. Da eine Gerade die Curve dritter Ordnung in diesem Falle höchstens in zwei Punkten schneiden kann, so ist keine der Zahlen α grösser als 2; man hat also in obiger Formel, damit $N = 3$, höchstens $n = 4$. Doch müsste $\Sigma\alpha = 9$ für $n = 4$ sein, also vier der α gleich 2; daher müsste die Abbildungscurve vierter Ordnung vier Doppelpunkte haben. Es bleiben also nur übrig die Fälle:

$n = 3$, ein α gleich 2, die übrigen gleich 1;
$n = 2$, drei α gleich 1, die übrigen Null;
$n = 1$, alle α Null.

Es giebt also sechzehn doppelt unendliche Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen. Die Curven einer Schaar treffen eine der sechzehn Geraden zweimal, zehn einmal, die fünf aber, welche die erste schneiden, gar nicht. Die Abbildungen dieser Curvenschaaren sind:

1) Das System der Geraden in der Ebene.

2) Die Kegelschnittsysteme durch drei Fundamentalpunkte.

3) Die Curven dritter Ordnung, welche durch die Fundamentalpunkte gehen und in einem derselben einen Doppelpunkt haben.

Zwei Curven desselben Systems schneiden sich einmal, zwei Curven verschiedener Systeme zweimal, wenn die entsprechenden Geraden sich nicht treffen, dreimal, wenn sie sich treffen.

Eine solche Schaar enthält insbesondere die entsprechende einfach unendliche Schaar von ebenen Curven dritter Ordnung, indem die Schnittpunkte mit der Doppelcurve sich zu einem wirklichen Doppelpunkte vereinigen können; sodann fünfmal eine Gerade, welche die der Schaar zugeordnete schneidet, in Verbindung mit einer einfachen Kegelschnittschaar, welche beide Geraden schneidet; und insbesondere zehnmal drei Gerade, deren eine von den beiden anderen geschnitten wird, und welche mit der dieser Schaar zugeordneten Geraden ein windschiefes Viereck bilden.

Bei der Uebertragung ebener Sätze auf die Fläche ist es eine Schaar dieser Curven, welche die Stelle der Geraden in der Ebene versieht.

Jede dieser Raumcurven wird durch jede Curve einer einfachen ihr zugeordneten Schaar von Curven fünfter Ordnung und zweiter Species (*Salmon*) mit einem wirklichen Doppelpunkt zum vollständigen Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung ergänzt. Die Abbildungen dieser Schaaren werden, den oben unter 1), 2), 3) angeführten Abbildungen der Raumcurven dritter Ordnung entsprechend, folgende:

1) Curve fünfter Ordnung, welche jeden der Fundamentalpunkte zum Doppelpunkt hat. Sie muss durch die drei Punkte der Abbildung der Doppelcurve gehen, welche die Durchschnitte derselben mit der zugehörigen der unter 1) oben angeführten Geraden zu Paaren QQ' ergänzen, und muss noch ein anderes Paar QQ' enthalten.

2) Curve vierter Ordnung, welche zwei Fundamentalpunkte als Doppelpunkte, die übrigen einfach enthält. Sie muss durch die drei Punkte der Abbildung der Doppelcurve gehen, welche die Durchschnitte derselben mit dem zuge-

hörigen der unter 2) oben angeführten Kegelschnitte zu einem Paar QQ' ergänzen, und muss ein weiteres Paar QQ' enthalten.

3) Curve dritter Ordnung durch vier Fundamentalpunkte. Sie muss durch die drei Punkte der Abbildung der Doppelcurve gehen, welche die Durchschnitte derselben mit der zugehörigen der unter 3) oben angeführten Curve dritter Ordnung zu Paaren QQ' ergänzen, und muss noch ein anderes Paar QQ' enthalten.

Wenn die Raumcurve dritter Ordnung in eine ebene Curve mit Doppelpunkt ausartet, so löst die Curve fünfter Ordnung sich in eine Gerade und eine ebene Curve vierter Ordnung auf, was sich in der Abbildung leicht verfolgen lässt.

§. 7. Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species, welche auf der Fläche liegen. Doppelvieren.

Von besonderem Interesse sind die Raumcurven vierter Ordnung, welche auf der Fläche liegen. Da durch eine Raumcurve vierter Ordnung, wenn sie erster Species ist, unendlich viele, wenn sie zweiter Species ist, eine Fläche zweiter Ordnung gelegt werden kann, so wird jede Raumcurve vierter Ordnung durch eine andere zum vollständigen Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung ergänzt. Die Abbildungen zweier solcher sich ergänzenden Curven sind zusammen von der Ordnung 6. Die beiden Abbildungscurven können also nur von der zweiten und vierten oder beide von der dritten Ordnung sein. Im ersten Falle hat man Raumcurven zweiter, im anderen Raumcurven erster und zweiter Species vor sich. In der That nämlich sieht man sofort, da keine der Zahlen α grösser als 3 sein kann, die Abbildungscurve auch nicht zerfallen darf, dass nur folgende Fälle möglich sind:

1) $n=2$, zwei α gleich 1, die übrigen 0;
2) $n=4$, drei α gleich 2, zwei gleich 1;
3) $n=3$, drei der α gleich 1, eines 2, eines 0;
4) $n=3$, alle α gleich 1.

Es giebt daher im Ganzen vierzig dreifach unendliche Schaaren von Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species, welche in der Weise zwanzig conjugirte Schaaren bilden, dass die Ergänzung der einer Schaar angehörigen Curven zu der conjugirten Schaar gehört. Solcher Schaaren sind in 1) zehn enthalten, in 2) die ihnen conjugirten; unter 3) sind zwanzig Schaaren ent-

halten, die paarweise conjugirt sind. *Dagegen giebt es nur* **eine** *vierfach unendliche Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und erster Species;* dieselbe ist die mit 4) bezeichnete, und die Ergänzungscurve einer jeden darin vorkommenden Curve gehört wieder der nämlichen Schaar an.

Die Beziehungen der vierzig Schaaren von Curven vierter Ordnung und zweiter Species zu den sechzehn Geraden ergiebt sich aus folgender Combination. Die sechzehn Combinationen zu fünf von sich nicht schneidenden Geraden, welche in der Tafel I. gegeben sind, enthalten alle Combinationen sich nicht schneidender Geraden zu 2 und 3. Wenn man aber ein beliebiges Tripel sich nicht schneidender Geraden wählt, so zeigt sich, dass ausser den beiden zu einer Fünf mit ihnen verbundenen Geraden noch *eine* existirt, welche jene drei nicht schneidet. Es existiren also *Vieren* von sich nicht schneidenden Geraden; ihre Zahl ist vierzig, und diese Vieren ordnen sich (einem von Herrn *Schläfli* aufgefundenen Verhalten der Geraden einer Fläche dritter Ordnung analog) paarweise dergestalt, dass von zwei solchen Vieren

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix}$$

jede Gerade der einen die drei nicht unter oder über ihr stehenden der anderen Vier schneidet, die vierte aber nicht. Nennen wir ein solches System eine *Doppelvier, so enthält also die Fläche zwanzig Doppelvieren,* welche in dem folgenden Schema zusammengestellt sind:

(V.)				
	1 2 3 15	1 4 5 10	4 9 12 14	2 7 13 14
	10 7 6 16	15 9 8 16	5 8 11 13	3 6 11 12
	1 2 4 14	1 10 11 12	3 9 12 15	3 4 5 6
	11 8 6 16	2 7 8 9	5 7 10 13	15 14 13 16
	1 2 5 13	1 10 13 14	3 8 11 15	2 4 5 7
	12 9 6 16	3 6 8 9	4 7 10 14	15 12 11 16
	1 3 4 12	1 11 13 15	2 9 14 15	2 3 5 8
	13 8 7 16	4 6 7 9	5 6 10 11	14 12 10 16
	1 3 5 11	1 12 14 15	2 8 13 15	2 3 4 9
	14 9 7 16	5 6 7 8	4 6 10 12	13 11 10 16.

Diese zwanzig Doppelvieren sind wieder zu zwei conjugirt und bilden zehn Gruppen, deren jede **alle** *Geraden enthält.* Es ergänzen sich in dieser Weise die entsprechenden Doppelvieren der ersten und dritten, so wie der

zweiten und vierten Columne des obigen Schemas. *Jedes derartige Paar von Doppelvieren ist einem bestimmten Tripel der Doppelgruppen* (IV.) *adjungirt;* jede Doppelvier nämlich enthält zwölf Paare sich schneidender Geraden (II.), und zwar je zwei aus den Hälften dreier Doppelgruppen (IV.), keine aber aus den anderen; die ergänzende Doppelvier verhält sich genau ebenso.

Jede der vierzig Schaaren von Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species ist einer Vier so zugeordnet, dass jede Curve der Schaar die Geraden der Vier zweimal trifft, die Geraden der anderen Hälfte der Doppelvier nicht, alle übrigen einmal. Die conjugirte Schaar ist derselben Doppelvier zugeordnet, nur dass die beiden Hälften der Doppelvier entgegengesetzte Beziehungen zu der Schaar haben, wie vorhin. Einer solchen Doppelschaar steht diejenige gegenüber, welche der ergänzenden Doppelvier zugeordnet ist. Bildet sich eine Schaar als Kegelschnitte, die zugeordnete als Curven vierter Ordnung ab, so stehen ihnen gegenüber zwei Schaaren, die sich als Curvensysteme dritter Ordnung abbilden, und umgekehrt.

Zwei Curven derselben Schaar schneiden sich in zwei Punkten, zwei Curven aus conjugirten Schaaren in sechs, zwei Curven aus gegenüberstehenden Doppelschaaren in vier.

Wenn man eine Schaar heraushebt, und die conjugirte sowie die beiden gegenüberstehenden auslässt, so theilen sich in Bezug auf die erste die übrigen sechsunddreissig Schaaren in drei Gruppen zu zwölf. Die Schaaren der einen Gruppe gehören zu Vieren, welche mit der Vier der gegebenen Schaar zwei Gerade gemein haben; Curven solcher Schaaren schneiden die der gegebenen Schaar in drei Punkten. Die Schaaren der anderen Gruppen gehören zu Vieren, welche mit der Vier der gegebenen Schaar e i n e *Gerade gemein haben; Curven solcher Schaaren schneiden die der gegebenen Schaar in vier Punkten. Die Schaaren der dritten Gruppe gehören zu Vieren, welche mit der Vier der gegebenen Schaar keine Gerade gemein haben; Curven dieser Schaaren schneiden die Curven der gegebenen Schaar in fünf Punkten.*

Die zwölf Schaaren der zweiten Gruppen bestehen aus drei Schaaren nebst ihren zugeordneten und gegenüberstehenden. Die zwölf Schaaren der dritten Gruppen sind denen der ersten zugeordnet.

Jede der vierzig dreifach unendlichen Schaaren von Curven vierter Ordnung und zweiter Species enthält vier solche doppelt unendliche Schaaren, welche in eine Gerade und eine Schaar von Raumcurven dritter Ordnung zer-

fallen; nämlich in eine Gerade der Vier, welche von der Schaar nicht getroffen wird, und die Schaar von Raumcurven dritter Ordnung, welche die entsprechende Gerade der zugeordneten Vier zweimal schneiden.

Jede jener vierzig Schaaren enthält ferner eine doppelt unendliche Schaar von Curven, die aus zwei sich in einem Punkt schneidenden Kegelschnitten bestehen. Die beiden einfach unendlichen Kegelschnittschaaren, aus welchen diese doppelt unendliche Schaar sich zusammensetzt, sind dadurch bestimmt, dass die von ihnen getroffenen Systeme (IV.) die vier Geraden enthalten, denen die Schaar der betrachteten Curven vierter Ordnung zugeordnet ist.

Zwei Geraden mit einer Kegelschnittschaar kommen vierzehnmal in jeder Schaar von Curven vierter Ordnung vor. Und zwar erhält man sechs dieser Combinationen, indem man zwei Gerade a, b der Vier wählt, welche von der Schaar vierter Ordnung nicht getroffen wird, und die Kegelschnittschaar hinzufügt, welche diese sowie die entsprechenden der ergänzenden Vier schneidet. Diese sechs Combinationen werden also aus Kegelschnitten gebildet und aus zwei Geraden, welche jene, aber nicht einander schneiden. Dagegen benutzt man zur Bildung der acht übrigen Combinationen je *eine* Gerade a der von der Schaar vierter Ordnung nicht getroffenen Vier, fügt ihr eine, m, der beiden Geraden hinzu, welche a treffen, ohne der ergänzenden Vier anzugehören, und die Kegelschnittschaar, welche m und die zu a in der ergänzenden Vier gehörige Gerade α trifft. In diesen Fällen hat man also als Curve vierter Ordnung einen Kegelschnitt, eine ihn einmal schneidende Gerade, und eine zweite Gerade, welche diese, nicht aber den Kegelschnitt trifft.

In jeder der vierzig Schaaren vierter Ordnung finden sich endlich $4+12=16$ Systeme von 4 Geraden, welche eine Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species ersetzen. Vier dieser Systeme bestehen je aus einer Geraden der Vier, deren Geraden von den Curven der Schaar zweimal geschnitten werden, in Verbindung mit den drei Geraden der ergänzenden Vier, welche erstere schneiden. Die zwölf anderen sind ungeschlossene Vierseite; man erhält eines derselben, wenn man irgend zwei Gerade wählt, welche von der betrachteten Schaar *nicht* geschnitten werden, und eines der beiden Paare (II.) hinzufügt, deren jede Gerade eine der ersten beiden trifft, und deren jede Gerade zugleich eine der beiden Geraden trifft, welche jenen Geraden in der betreffenden Doppelvier zugeordnet sind.

§. 8. Raumcurven vierter Ordnung und erster Species, welche auf der Fläche liegen.

Ich komme jetzt zur Untersuchung der vierfach unendlichen Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und erster Species, welche auf der Fläche liegt, und deren Curven sich als Curven dritter Ordnung durch die Fundamentalpunkte abbilden.

Jede Curve dieser Schaar schneidet jede der sechzehn Geraden in einem Punkte, jeden auf der Fläche liegenden Kegelschnitt in zwei Punkten, jede auf der Fläche liegende Curve dritter Ordnung in drei Punkten, jede Curve vierter Ordnung in vier Punkten.

Die Schaar enthält jede der Geraden in Verbindung mit der zugehörigen Curvenschaar dritter Ordnung, sowie die Doppelschaar, welche aus je zwei Gebilden zweier conjugirten Kegelschnittschaaren besteht. Sie enthält insbesondere jedes Geradenpaar (II.), in Verbindung mit der Kegelschnittschaar, welche der das Paar enthaltenden conjugirt ist. Sie enthält endlich die vierzig windschiefen Vierecke (III.).

Da eine durch die Fundamentalpunkte gelegte Curve dritter Ordnung nach dem Früheren kein Punktepaar QQ' enthalten kann, ohne noch ein zweites zu enthalten, so treten in der Schaar keine Curven auf, welche auf der Doppelcurve *einen* Doppelpunkt haben, sondern nur solche, die deren zwei haben — die ebenen Schnitte. Dagegen kann man die Forderung stellen, dass die Abbildung einer Curve der Schaar in einem beliebigen anderen Punkte der Bildebene einen Doppelpunkt habe, was drei Bedingungen mit sich führt. *Durch jeden Punkt der Oberfläche geht also eine einfach unendliche Schaar von Raumcurven vierter Ordnung, welche in diesem Punkte einen Doppelpunkt haben und ganz der Fläche angehören. In jeder Schaar giebt es zwei Curven mit Rückkehrpunkt, und fünf Curven, welche in zwei Kegelschnitte zerfallen.* Die Abbildungen dieser einfachen Schaar bilden ein Curvenbüschel dritter Ordnung mit fünf gemeinsamen Punkten und einem gemeinsamen Doppelpunkt. Die Tangentenpaare des Doppelpunkts bilden daher eine Involution, deren Doppelstrahlen die beiden Rückkehrtangenten sind. Unter den Curven vierter Ordnung, welche dem Büschel entsprechen, ist insbesondere auch die Schnittcurve der Tangentenebene enthalten. Da nun die Doppelverhältnisse eines Büschels der Abbildung des eindeutigen Entsprechens wegen noch für die Bogenelemente auf der Fläche selbst, beziehungsweise für deren Tangenten gelten, so hat man den Satz:

Die Tangenten des Doppelpunktes in dieser Schaar von Curven vierter Ordnung bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die Tangenten der mit Rückkehrpunkt schneidenden Curven sind; und insbesondere liegen die letzteren zu den Haupttangenten harmonisch.

Man kann nun fragen, für welche Punkte der Oberfläche die beiden Rückkehrtangenten dieser Schaar zusammenfallen. Jedes Paar der Involution muss dann aus der festen Richtung dieser Tangente bestehen und aus einer beliebigen anderen Richtung. Denken wir uns einen solchen Punkt und den betreffenden Punkt der Abbildung gefunden. Alle Curven dritter Ordnung, welche durch die Fundamentalpunkte gehen und diesen Punkt zum Doppelpunkt haben, müssen in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente haben. Bilden wir nun die fünf besonderen Curven, welche aus einem durch vier Fundamentalpunkte und den gegebenen Punkt gehenden Kegelschnitt und aus der Verbindungslinie des Punktes mit dem fünften Fundamentalpunkte bestehen, wobei vorausgesetzt wird, dass der gegebene Punkt nicht einer der Fundamentalpunkte selbst ist. Betrachten wir zwei dieser zerfallenden Curven. Entweder fallen die beiden dabei vorkommenden Geraden zusammen, d. h. der gegebene Punkt liegt in der Verbindungslinie zweier Fundamentalpunkte; oder der Kegelschnitt der einen Combination wird in dem gegebenen Punkte von der Geraden der andern berührt, d. h. der Kegelschnitt muss in zwei Gerade zerfallen, von denen eine den gegebenen Punkt und einen Fundamentalpunkt, der andere drei solche enthalten müsste, was unmöglich ist; oder endlich die Kegelschnitte berühren sich, haben daher fünf Punkte gemein, fallen also zusammen, und gehen in die Abbildung der Geraden 16 über. Man sieht also, *dass nur die Punkte der sechzehn Geraden nicht mehr als eine Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt zulassen, während alle Curven vierter Ordnung, welche in ihnen einen Doppelpunkt haben, eine feste Tangente besitzen. Diese feste Tangente ist die Gerade selbst, auf welcher der gegebene Punkt liegt; die Curven vierter Ordnung bestehen aus ihr und einer Schaar von Curven dritter Ordnung.*

Dass für jeden Punkt der sechzehn Geraden dies zutrifft, sieht man leicht. Gehört der Punkt der Geraden 16 an, so bestehen die gesuchten Curven in der Abbildung aus dem Kegelschnitt 16 und einer Geraden durch den Punkt; die Tangenten des Doppelpunktes fallen zusammen, wenn die Gerade den Kegelschnitt berührt. Gehört der Punkt der Verbindungslinie zweier Fundamentalpunkte an, so sind die Bilder der gesuchten Curvenschaar diese Ver-

bindungslinie selbst und die Kegelschnitte, welche durch den gegebenen Punkt und die drei übrigen Fundamentalpunkte gehen; nur für den im gegebenen Punkte berührenden Kegelschnitt fallen die Tangenten des Doppelpunktes zusammen. Ist endlich der Punkt auf einer der Geraden gelegen, welche sich als Fundamentalpunkte abbilden, so ist jede Curve, welche durch ihn geht, in der Abbildung genöthigt, in dem Fundamentalpunkte eine bestimmte Tangente zu haben. Die Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkt zerfallen in die Gerade und in eine Curve dritter Ordnung, deren Abbild wieder eine Curve dritter Ordnung ist; die letztere geht durch alle Fundamentalpunkte, hat in einem einen Doppelpunkt und für ihn *eine* gegebene Tangente. Einer Berührung der Geraden im Raum mit der Curve dritter Ordnung im Raum entspricht ein Rückkehrpunkt mit der gegebenen Richtung als Rückkehrtangente, was wieder nur auf *eine* Weise eintreten kann.

Die Schnittpunkte zweier Geraden machen in gewissem Sinne eine Ausnahme. Für diese besteht die Schaar von Curven vierter Ordnung aus den beiden Geraden und einer Kegelschnittschaar, deren Curven beide Geraden schneiden. Hier sind beide Tangenten des Doppelpunktes fest; ein Rückkehrpunkt kann nicht eintreten, wohl aber ein dreifacher Punkt, indem ein Kegelschnitt durch den Doppelpunkt des Paares hindurchgeht. —

Jede Curve vierter Ordnung und erster Species schneidet die Doppelcurve in vier Punkten, und es giebt stets eine einfach unendliche Schaar, welche in denselben vier Punkten schneidet, so wie eine ergänzende Schaar, welche in denselben Punkten den anderen Mantel der Fläche schneidet, so dass jede Curve der einen Schaar sich mit jeder Curve der anderen zu einem vollständigen Durchschnitte vereinigt.

In der That schneidet jede in der Abbildung durch die Fundamentalpunkte gelegte Curve dritter Ordnung die Abbildung der Doppelcurve in 4 Punkten Q, deren vierter durch die ersten drei bestimmt ist, und welche mit den ersten Grundpunkte eines Büschels sind. Den vier Punkten Q sind auf der Abbildung der Doppelcurve vier Punkte Q' zugeordnet, welche mit den Fundamentalpunkten die Grundpunkte eines zweiten, ergänzenden Büschels sind.

§. 9. Ausgezeichnete Raumcurven vierter Ordnung und erster Species, welche auf der Fläche liegen.

Die Doppelcurve enthält vier Punkte, in denen die beiden Tangentenebenen sich vereinigen (Rückkehrpunkte der Fläche). Die Abbildungen dieser

Punkte erhält man, indem man vom Punkte P an die Abbildung der Doppelcurve Tangenten zieht; in jedem der vier Berührungspunkte liegt ein Paar QQ' vereinigt. Die elliptischen Argumente dieser Punkte (q) sind durch die Gleichung

$$p+2q = c$$

gegeben, wo rechts noch Perioden addirt werden können. Man erhält daraus für die q die Werthe

$$q = \frac{c-p}{2}+\frac{a\omega+b\omega'}{2},$$

wenn ω, ω' die elliptischen Perioden, a und b gleich 0 oder 1 sind. Daher ist die Summe aller q bis auf Perioden:

$$\Sigma q = 2(c-p),$$

also, wegen der oben (§. 5) aufgestellten Gleichungen:

$$\Sigma v+\Sigma q = 2c-p+2c-2p = 3c.$$

Die vier Berührungspunkte bilden somit zusammen mit den Fundamentalpunkten die Grundpunkte eines Büschels, welches sich selbst ergänzt; und daher hat man den Satz:

Durch die auf der Doppelcurve gelegenen vier Rückkehrpunkte der Fläche geht eine einfache Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und erster Species. Längs jeder dieser Curven wird die Fläche von einer Fläche zweiter Ordnung berührt, und je zwei der Curven liegen zusammen auf einer Fläche zweiter Ordnung.

Unter dieser Curvenschaar befinden sich einige besondere Curven von hervorragender Bedeutung. Man wird auf sie geführt durch die Betrachtung conjugirter Kegelschnittschaaren. Dieselben bilden sich ab als Kegelschnittschaar durch vier Fundamentalpunkte und Geradenschaar durch den fünften. Jedem Kegelschnitt der einen Schaar im Raume entspricht ein Kegelschnitt der conjugirten, welcher mit ersterem in einer Ebene liegt. Da sich auf diese Weise also auch die abgebildeten Schaaren eindeutig entsprechen, so liegen die Schnittpunktpaare entsprechender Elemente beider Gebilde auf einer Curve dritter Ordnung. Diese geht durch die Fundamentalpunkte und durch die Berührungspunkte der von P an die Abbildung der Doppelcurve gezogenen Tangenten. Man construirt nämlich in der Abbildung den zu einem Kegelschnitt durch vier Fundamentalpunkte gehörigen Strahl des Büschels durch den fünften folgendermassen: Der Kegelschnitt schneidet die Abbildung der Doppelcurve in zwei Punkten R, S; diese mit P verbunden geben zwei

weitere Punkte R', S' der Abbildung der Doppelcurve; letztere liegen mit dem fünften Fundamentalpunkt auf dem zugehörigen Strahl des Büschels. Legt man nun R in einen der vier Berührungspunkte der von P gezogenen Tangenten, so fällt R' mit R zusammen, und der Strahl schneidet den Kegelschnitt in diesem Berührungspunkt, der also der Curve angehört. Ist der Kegelschnitt aber insbesondere der Kegelschnitt 16, so rückt R in P, und der Strahl schneidet den Kegelschnitt in dem fünften Fundamentalpunkt. Geht endlich der Kegelschnitt durch denjenigen Punkt in der Abbildung der Doppelcurve, welcher mit einem der ersten vier Fundamentalpunkte und P in einer Geraden liegt, so fällt R in diesen, also R' in den Fundamentalpunkt, und wird zugleich ein Durchschnitt des Strahls mit dem Kegelschnitt. Daher geht in der That die fragliche Curve durch alle Fundamentalpunkte. Und so hat man den Satz:

Unter der obigen Schaar befinden sich insbesondere fünf Curven, welche der Ort der Durchschnittspunkte zugeordneter Kegelschnittschaaren, also der Ort der Berührungspunkte der doppelt berührenden Ebenen sind.

Dieses sind die Berührungscurven der von Herrn *Kummer* gefundenen Kegel.

Unter der vierfach unendlichen Schaar von Curven vierter Ordnung und erster Species befinden sich noch fünf andere bemerkenswerthe Curven, der geometrische Ort der Berührungspunkte von Kegelschnitten conjugirter Schaaren. Nennt man ein Kegelschnittbüschel $\varphi+\lambda\psi=0$, ein Büschel von Geraden $A+\mu B=0$, so ist der geometrische Ort der Punkte, in denen Kegelschnitte der Schaar von Geraden des Büschels berührt werden, die Curve dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & AB_1-BA_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & AB_2-BA_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & AB_3-BA_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Curve geht durch die Fundamentalpunkte des Kegelschnittbüschels ($\varphi=0$, $\psi=0$), durch die Nebenecken des aus ihnen gebildeten Vierecks ($\varphi_i+\lambda\psi_i=0$), und durch den Scheitel des Büschels ($A=0, B=0$); in letzterem hat sie dieselbe Tangente wie der durch den Büschelscheitel gehende Kegelschnitt, in den ersten wird sie berührt von den Verbindungslinien des betreffenden Grundpunktes mit dem Scheitel des Strahlbüschels. Wenden wir dies auf die Abbildung zweier conjugirten Kegelschnittschaaren an, etwa auf diejenigen, welche sich als Kegelschnitte durch 1, 2, 3, 4 und als Strahlen durch 5 abbilden,

so erhält man als Ort der Berührung eine Curve dritter Ordnung, welche durch die Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5 geht, in den vier ersten beziehungsweise von den Strahlen 9, 12, 14, 15 und im letzten von dem Kegelschnitt 16 berührt wird, und welche endlich durch die Schnittpunkte von 6 mit 13, von 7 mit 11, von 8 mit 10 geht. Die entsprechende Raumcurve vierter Ordnung geht daher durch die acht Scheitel der Paare:

$$1, 9;\ 2, 12;\ 3, 14;\ 4, 15;\ 5, 16;\ 6, 13;\ 7, 11;\ 8, 10;$$

d. h. durch die Scheitel der entsprechenden Systeme conjugirter Geradenpaare (IV.). Man hat also den Satz:

Es giebt auf der Oberfläche fünf Curven vierter Ordnung und erster Species, deren jede der Ort der Berührungen conjugirter Kegelschnittschaaren ist und durch die acht Scheitel der in diesen Schaaren vorkommenden Geradenpaare hindurchgeht.

§. 10. Analytischer Ausdruck der Fläche. Die *Kummer*schen Berührungskegel.

Ich gehe jetzt zum Beweise des Satzes über, dass jede Fläche vierter Ordnung mit einem Kegelschnitt als Doppelcurve in der angegebenen Weise auf einer Ebene eindeutig abgebildet werden kann. Legen wir die von Herrn *Kummer* gegebene Form der Oberflächengleichung zu Grunde

$$(1.)\qquad \varphi^2-4p^2\psi = 0,$$

in welcher φ, ψ Ausdrücke zweiten Grades, p ein linearer Ausdruck ist. Man erhält die Doppelcurve aus $p=0$, $\varphi=0$; für die Rückkehrpunkte der Fläche ist auch noch $\psi=0$. Setzt man mit Herrn *Kummer* an Stelle der Gleichung (1.) die Gleichung

$$(2.)\qquad (\varphi+2\lambda p^2)^2-4p^2(\psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2) = 0,$$

in welcher λ ein willkürlicher Parameter ist, so stellt

$$\psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2 = 0$$

eine Flächenschaar zweiter Ordnung dar, welche durch die Rückkehrpunkte geht, und welche die Fläche vierter Ordnung in der oben angegebenen Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und erster Species berührt; diese Raumcurven sind die Durchschnitte der Flächenpaare

$$(3.)\qquad \begin{cases} \psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2 = 0, \\ \varphi+2\lambda p^2 = 0. \end{cases}$$

Die in der zweiten Gleichung enthaltene Schaar ist dadurch charakterisirt, *dass*

sie durch die Doppelcurve geht und in dieser einen allen Flächen der Schaar gemeinsamen Tangentenkegel besitzt, dessen Tangentenebenen in den Rückkehrpunkten zugleich Tangentenebenen der Fläche sind. Dieser Tangentenkegel befindet sich selbst unter dieser Schaar. Nimmt man ihn als Curve $\varphi = 0$ an und legt das Coordinatentetraeder $(xyzp)$ zu Grunde, dessen Ecken die Spitze dieses Kegels und die Nebenecken des aus den Rückkehrpunkten gebildeten Vierecks sind, so erhält man die einfachste Darstellung der Flächengleichung, nämlich

$$(4.) \qquad (x^2+y^2+z^2)^2-4p^2(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta p^2+2p(ax+by+cz)) = 0$$

oder, der Form (2.) entsprechend:

$$(x^2+y^2+z^2+2\lambda p^2)^2-4p^2((\alpha+\lambda)x^2+(\beta+\lambda)y^2+(\gamma+\lambda)z^2+(\delta+\lambda^2)p^2+2p(ax+by+cz)) = 0.$$

Die fünf Berührungskegel des Herrn *Kummer* erhält man, indem man den Coefficienten von $-4p^2$ der Bedingung unterwirft, dass seine *Hesse*sche Determinante verschwindet. Man gelangt dadurch zu der Gleichung fünften Grades in λ:

$$(5.) \qquad \delta+\lambda^2 = \frac{a^2}{\alpha+\lambda}+\frac{b^2}{\beta+\lambda}+\frac{c^2}{\gamma+\lambda},$$

eine Form, welche sofort zeigt, dass die Gleichung fünften Grades einen allgemeinen Charakter besitzt, indem alle Coefficienten derselben, abgesehen von den ersten beiden, welche 1 und 0 sind, ganz beliebige Werthe annehmen können. Die zugehörigen Kegelspitzen sind durch die Gleichungen gegeben:

$$(\alpha+\lambda)x+ap = 0,$$
$$(\beta+\lambda)y+bp = 0,$$
$$(\gamma+\lambda)z+cp = 0.$$

Dieses sind, für ein veränderliches λ, die Gleichungen einer Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die Ecken des Coordinatentetraeders geht; man hat daher den Satz:

Die Spitzen der fünf doppelt berührenden Kegel liegen auf einer Raumcurve dritter Ordnung mit dem Punkte, in welchem die vier Tangentenebenen der Rückkehrpunkte sich treffen, und mit den drei Nebenecken des aus den Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks.

§. 11. Erzeugung der Fläche durch Kegelschnittschaaren. Paare von Geraden.

Seien nun λ, λ' zwei Wurzeln der Gleichung fünften Grades, und $K=0$, $K'=0$ die Gleichungen der beiden entsprechenden Kegel, also

$$K = \psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2,$$
$$K' = \psi+\lambda'\varphi+\lambda'^2p^2.$$

Indem man ψ und φ mittelst dieser Gleichungen durch K und K' ausdrückt, nimmt die Gleichung der Oberfläche die Formen an:

$$(6.)\quad \begin{cases} 0 = \left(\dfrac{K-K'}{\lambda-\lambda'}\right)^2-2p^2(K+K')+(\lambda-\lambda')^2p^4, \\ \quad = \left(\dfrac{K-K'}{\lambda-\lambda'}+(\lambda-\lambda')p^2\right)^2-4p^2K, \\ \quad = \left(\dfrac{K-K'}{\lambda-\lambda'}-(\lambda-\lambda')p^2\right)^2-4p^2K'. \end{cases}$$

Sind nun $A=0$, $C=0$ irgend zwei feste Tangentenebenen des Kegels K, $B=0$ die Verbindungsebene ihrer Berührungsseiten, so ist

$$(7.)\quad A+2\varrho B+\varrho^2C = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Tangentenebene des Kegels, und man erhält alle, wenn man ϱ beliebig variiren lässt. Denkt man sich zugleich die absoluten Werthe der Coefficienten von A, B, C so bestimmt, dass

$$K = B^2-AC,$$

so ist für den Schnitt der Ebene (7.) mit der Fläche vierter Ordnung

$$K = (B+\varrho C)^2,$$

und die Gleichung (6.) zerfällt in die Factoren:

$$(8.)\quad \begin{cases} K' = [(\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)]^2, \\ K' = [(\lambda-\lambda')p-(B+\varrho C)]^2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zusammen mit (7.) geben die beiden conjugirten Schaaren von Kegelschnitten, in denen die Tangentenebenen von $K=0$ die Oberfläche schneiden.

Betrachten wir Schnittpunkte von Kegelschnitten dieser Schaaren. Zwei Kegelschnitte derselben (etwa der ersten) Schaar treffen sich nur, wenn die Gleichungen erfüllt sind:

$$(9.)\quad \begin{cases} A+2\varrho B+\varrho^2C=0, & K'=[(\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)]^2, \\ A+2\sigma B+\sigma^2C=0, & K'=[(\lambda-\lambda')p+(B+\sigma C)]^2. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, da man ϱ von σ verschieden annehmen muss:

$$2B+(\varrho+\sigma)C = 0,$$

und daher aus den beiden letzten:

$$p.C = 0.$$

Aber $C=0$ würde auf $B=0$ und $A=0$, also auf die Kegelspitzen führen, welche der Fläche gar nicht angehören; es bleibt also übrig $p=0$. Kegelschnitte derselben Schaar schneiden sich also nur auf der Doppelcurve. Dass dies eintreten kann, sieht man, indem man von irgend einem Punkte der Doppelcurve die beiden Tangentenebenen an $K=0$ legt. Jedem Kegelschnitt einer Schaar entspricht daher *einer* derselben Schaar, welcher ersteren auf einem Punkte der Doppelcurve schneidet. Für die Rückkehrpunkte, in denen der Kegel die Doppelcurve schneidet, fallen beide zusammen.

Für die Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten aus conjugirten Schaaren müssen die Gleichungen bestehen:

$$(10.) \quad \begin{cases} A+2\varrho B+\varrho^2 C=0, & K'=[(\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)]^2, \\ A+2\sigma B+\sigma^2 C=0, & K'=[(\lambda-\lambda')p-(B+\sigma C)]^2. \end{cases}$$

Ist σ von ϱ verschieden, so folgt aus den ersten beiden Gleichungen

$$2B+(\varrho+\sigma)C = 0,$$

wodurch die beiden letzten in einander übergehen. Zwei Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren schneiden sich also in zwei Punkten. Da K' ein ganz allgemeiner Ausdruck ist, so können Besonderheiten im Allgemeinen nicht eintreten.

Wenn aber in (10.) $\varrho=\sigma$, so fallen die ersten Gleichungen zusammen, und aus den andern beiden folgt

$$p(B+\varrho C) = 0.$$

Zwei in einer Ebene liegende Kegelschnitte der beiden Schaaren schneiden sich also zweimal auf der Doppelcurve, zweimal auf der Berührungscurve des Kegels $K=0$ mit der Oberfläche, wie Herr *Kummer* bemerkt hat.

Ich werde jetzt zeigen, *dass in jeder der Kegelschnittschaaren vier Geradenpaare vorkommen*. Da nach dem Vorigen eine Gerade nicht beiden Schaaren gemeinschaftlich angehören kann, so führt dies im Ganzen auf sechzehn verschiedene Geraden. Die vier Geradenpaare einer Schaar werden gefunden, indem man die Bedingung aufstellt, dass die Ebene (7.) die zugehörige Fläche (8.) berührt, wodurch dann die Schnittcurve in ein Geradenpaar zer-

fällt. Setzt man symbolisch

$$K' = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 \dots$$

und bezeichnet der Kürze wegen durch (a, b, c, d) die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$, so ist die Bedingung dafür, dass die Fläche

$$K' = [(\lambda-\lambda')p + (B+\varrho C)]^2$$

von der Ebene

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C$$

berührt wird ($A = \Sigma A_i x_i$ etc.):

$$(11.) \quad \begin{cases} 0 = (a, b, c, A+2\varrho B+\varrho^2 C)^2 - 3(a, b, (\lambda-\lambda')p+B+\varrho C, A+2\varrho B+\varrho^2 C)^2, \\ = (a, b, c, A+2\varrho B+\varrho^2 C)^2 - 3(a, b, (\lambda-\lambda')p+B+\varrho C, A+\varrho B-(\lambda-\lambda')\varrho p)^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist biquadratisch für ϱ, und giebt also in der That vier Geradenpaare als der einen Schaar angehörig an. Vertauscht man λ mit λ', so erhält man aus der ersten Gleichung (8.) die zweite, und also aus (11.) die Gleichung für die Geradenpaare der andern Schaar.

§. 12. Die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die Geraden der Oberfläche abhängen.

Um zu zeigen, dass auf der Fläche nicht mehr als sechzehn Gerade liegen, dass also bei jedem der fünf Kegel immer wieder dieselben Geraden, nur in anderer Anordnung auftreten, werde ich die Gleichungen zur Bestimmung der Geraden direct aufstellen und zeigen, dass sie auf eine Gleichung sechzehnten Grades führen.

Bezeichnen wir zu diesem Ende mit x den Schnittpunkt einer Geraden mit der Doppelcurve, mit y den Schnittpunkt derselben Geraden mit der Polaren von x in Bezug auf $\psi = 0$. Ist dann

$$D\varphi = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} y_i, \qquad D^2\varphi = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k,$$

$$D\psi = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial x_i} y_i, \qquad D^2\psi = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k,$$

$$Dp = \Sigma p_i y_i,$$

so erhält man die Schnittpunkte der Geraden $(x_i + \lambda y_i)$ mit der Fläche

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$$

aus der Gleichung:

$$(\varphi + 2\lambda D\varphi + \lambda^2 D^2\varphi)^2 - 4(p + \lambda Dp)^2(\psi + 2\lambda D\psi + \lambda^2 D^2\psi) = 0,$$

oder da der Voraussetzung nach

$$(12.)\qquad \varphi=0,\quad p=0,\quad D\psi=0,$$

aus der Gleichung:

$$(2D\varphi+\lambda D^2\varphi)^2-4(Dp)^2(\psi+\lambda^2D^2\psi) = 0.$$

Soll nun die ganze Gerade der Fläche angehören, so muss diese Gleichung unabhängig von λ erfüllt sein, und man muss also haben:

$$D\varphi = Dp.\sqrt{\psi},$$
$$D^2\varphi = 0,$$
$$Dp.D^2\psi = 0.$$

In der letzten Gleichung kann man den Factor Dp auslassen, denn er führt auf

$$D\varphi=0,\quad Dp=0,\quad D\psi=0,\quad D^2\varphi=0,$$

und damit, wie man leicht sieht, auf $\psi=0$; in diesem Falle wäre x ein Rückkehrpunkt der Fläche, y fällt mit x zusammen, eine Gerade existirt überhaupt nicht, wovon man sich auch leicht direct überzeugt. Es bleibt also nur übrig, dass die Gleichungen bestehen:

$$(13.)\qquad D\psi=0,\quad D\varphi-\sqrt{\psi}\,Dp=0,\quad D^2\varphi=0,\quad D^2\psi=0.$$

Eliminirt man aus ihnen die y, so bleibt eine Gleichung in den x übrig, welche verbunden mit $\varphi=0$, $p=0$ die gesuchten Punkte liefert; auch erkennt man leicht, dass für dieselben die Gleichungen

$$D\psi=0,\quad D\varphi-\sqrt{\psi}\,Dp=0$$

verschieden sind, und also die Gleichungen zweier Ebenen angeben, welche sich in einer einzigen Geraden durchschneiden, so dass zu jedem Punkte x nur *eine* Gerade gehört.

Bezeichnen wir symbolisch φ und ψ durch

$$\varphi=a_x^2=b_x^2\ldots,\quad \psi=\alpha_x^2=\beta_x^2\ldots.$$

Wären φ und ψ binäre Formen zweiten Grades, so würde man die y aus den Gleichungen

$$D^2\varphi=0,\quad D^2\psi=0$$

eliminiren, indem man die Invarianten

$$(14.)\qquad A=(ab)^2,\quad B=(a\alpha)^2,\quad C=(\alpha\beta)^2$$

bildete und

$$(15.)\qquad AC-B^2=0$$

setzte. Jn dem vorliegenden Falle hat man nur unter a, b, α, β die symbolischen Coefficienten der quaternären Formen φ, ψ zu verstehen und die

symbolischen Determinanten in A, B, C durch Hinzufügen der aus den Coefficienten von

$$D\psi = \Sigma\psi_i y_i,$$
$$D\varphi - \sqrt{\psi} Dp = \Sigma\varphi_i y_i - \sqrt{\psi}\, \Sigma p_i y_i$$

gebildeten Reihen zu ergänzen. Es wird also

$$(16.)\quad \begin{cases} A = (a, b, \psi, \varphi)^2 - 2\sqrt{\psi}(a, b, \psi, \varphi)(a, b, \psi, p) + \psi(a, b, \psi, p)^2, \\ B = (a, \alpha, \psi, \varphi)^2 - 2\sqrt{\psi}(a, \alpha, \psi, \varphi)(a, \alpha, \psi, p) + \psi(a, \alpha, \psi, p)^2, \\ C = (\alpha, \beta, \psi, \varphi)^2 - 2\sqrt{\psi}(\alpha, \beta, \psi, \varphi)(\alpha, \beta, \psi, p) + \psi(\alpha, \beta, \psi, p)^2. \end{cases}$$

Untersuchen wir die Formen der ersten beiden Vertikalreihen rechts genauer, und zwar zunächst die der zweiten. Setzt man je nach Bedürfniss

$$\psi_i = \alpha_i \alpha_x = \beta_i \beta_x \ldots, \quad \varphi_i = a_i a_x = b_i b_x \ldots,$$

so wird erstlich:

$$(a, b, \psi, \varphi)(a, b, \psi, p) = (a, b, \psi, c) c_x (a, b, \psi, p).$$

Vertauscht man hierin c mit a und c mit b, und nimmt den dritten Theil der Summe der so entstehenden Ausdrücke, so erhält man

$$\tfrac{1}{3}(a, b, \psi, c)\{(a, b, \psi, p) c_x - (c, b, \psi, p) a_x - (a, c, \psi, p) b_x\},$$

oder nach einer bekannten identischen Gleichung:

$$\tfrac{1}{3}(a, b, \psi, c)\{(a, b, \psi, c) p_x + (a, b, c, p) . \psi\}.$$

Da $p_x = 0$, so bleibt das zweite Glied allein übrig, und man hat also:

$$(17.)\quad (a, b, \psi, \varphi)(a, b, \psi, p) = -\tfrac{1}{3}\psi(a, b, c, p)(a, b, c, \psi).$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}(a, \alpha, \psi, \varphi)(a, \alpha, \psi, p) &= (a, \alpha, \beta, \varphi)(a, \alpha, \gamma, p)\beta_x \gamma_x \\ &= \tfrac{1}{2}(a, \alpha, \beta, \varphi)\gamma_x\{(a, \alpha, \gamma, p)\beta_x - (a, \beta, \gamma, p)\alpha_x\} \\ &= \tfrac{1}{2}(a, \alpha, \beta, \varphi)\gamma_x\{(a, \alpha, \beta, p)\gamma_x - (a, \alpha, \beta, \gamma) p_x + (p, \alpha, \beta, \gamma) a_x\}.\end{aligned}$$

Das zweite Glied verschwindet wegen der Gleichung $p_x = 0$, das dritte verschwindet identisch, wenn man für $a_i a_x$ wieder φ_i setzt. Es bleibt also:

$$(18.)\quad (a, \alpha, \psi, \varphi)(a, \alpha, \psi, p) = \tfrac{1}{2}\psi . (a, \alpha, \beta, \varphi)(a, \alpha, \beta, p).$$

Endlich hat man

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \psi, \varphi)(\alpha, \beta, \psi, p) &= (\alpha, \beta, \gamma, \varphi)(\alpha, \beta, \delta, p)\gamma_x \delta_x \\ &= \tfrac{1}{3}(\alpha, \beta, \gamma, \varphi)\delta_x\{(\alpha, \beta, \delta, p)\gamma_x - (\gamma, \beta, \delta, p)\alpha_x - (\alpha, \gamma, \delta, p)\beta_x\} \\ &= \tfrac{1}{3}(\alpha, \beta, \gamma, \varphi)\delta_x\{(\alpha, \beta, \gamma, p)\delta_x - (\alpha, \beta, \gamma, \delta) p_x\},\end{aligned}$$

oder, wenn man das letzte Glied auslässt:

$$(19.)\quad (\alpha, \beta, \psi, \varphi)(\alpha, \beta, \psi, p) = \tfrac{1}{3}\psi(\alpha, \beta, \gamma, \varphi)(\alpha, \beta, \gamma, p).$$

Aus den drei Formeln (17.), (18.), (19.) erhält man die Werthe für die ersten Glieder rechts in (16.), wenn man überall φ_i für p_i setzt; die Anwendung der Gleichung $p_x = 0$ wird dadurch nicht aufgehoben, da sie in die ebenfalls richtige Gleichung $\varphi = 0$ übergeht. Man hat also:

$$\begin{aligned}(a, b, \psi, \varphi)^2 &= -\tfrac{1}{3}\psi(a, b, c, \varphi)(a, b, c, \psi)\\ &= -\tfrac{1}{3}\psi(a, b, c, d)\,d_x(a, b, c, \psi)\\ &= -\tfrac{1}{12}\psi^2.(a, b, c, d)^2,\\ (a, \alpha, \psi, \varphi)^2 &= \tfrac{1}{2}\psi(a, \alpha, \beta, \varphi)^2,\\ (\alpha, \beta, \psi, \varphi)^2 &= \tfrac{1}{3}\psi(\alpha, \beta, \gamma, p)^2.\end{aligned}$$

Es wird daher:

$$A = \psi A', \qquad B = \psi B', \qquad C = \psi C',$$

wo nunmehr

$$(20.)\quad \begin{cases} A' = -\dfrac{\psi}{12}(a, b, c, d)^2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{\psi}(a, b, c, p)(a, b, c, \psi) + (a, b, \psi, p)^2,\\ B' = \tfrac{1}{2}(a, \alpha, \beta, \varphi)^2 - \sqrt{\psi}(a, \alpha, \beta, \varphi)(a, \alpha, \beta, p) + (a, \alpha, \psi, p)^2,\\ C' = \tfrac{1}{3}(\alpha, \beta, \gamma, \varphi)^2 - \tfrac{2}{3}\sqrt{\psi}(\alpha, \beta, \gamma, \varphi)(\alpha, \beta, \gamma, p) + (\alpha, \beta, \psi, p)^2.\end{cases}$$

Jeder dieser Ausdrücke hat die Form $M + N\sqrt{\psi}$, wo M von der zweiten, N von der ersten Ordnung in den x ist. Die Gleichung (15.) also, welche jetzt in

$$A'C' - B'^2 = 0$$

übergeht, nimmt die Form

$$G + H\sqrt{\psi} = 0$$

an, wo G von der vierten, H von der dritten Ordnung in den x ist. *Die Gleichung*

$$G^2 - \psi H^2 = 0$$

stellt somit eine Fläche achter Ordnung dar, welche die Doppelcurve $\varphi = 0$, $p = 0$ in denjenigen sechzehn Punkten schneidet, durch welche die sechzehn Geraden der Oberfläche hindurchgehen.

Die Gleichungen

$$G^2 - \psi H^2 = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad p = 0$$

liefern eine Gleichung sechzehnten Grades. *Aber nach dem Vorigen wird diese Gleichung mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades gelöst.* Und zwar übersieht man sogleich, dass die vollständige Auflösung der Gleichung sechzehnten Grades auf folgende Operationen führt:

1. Aufsuchung einer Wurzel der Gleichung fünften Grades, von welcher die fünf Kegel abhängen.

2. Auflösung einer quadratischen Gleichung, indem man durch die Spitze des Kegels eine Ebene legt und die Schnitte derselben mit dem Kegel bestimmt (Ebene B in (7.)). Die Tangentenebenen in den Schnittlinien sind die Ebenen A, C (7.). Durch diese quadratische Gleichung werden die beiden Kegelschnittschaaren (7.), (8.) ermittelt.

3. Vollständige Auflösung zweier biquadratischen Gleichungen (11.), welche die 2.4 Geradenpaare der beiden Kegelschnittschaaren liefern.

4. Auflösung der acht quadratischen Gleichungen, welche die einzelnen Geraden der acht Paare geben.

Es wird sich weiterhin zeigen, was von diesen Gleichungen erspart werden kann.

§. 13. Erzeugung der Fläche durch projectivische Gebilde.

Wir haben bisher von dem zweiten Kegel $K'=0$ keinen Gebrauch gemacht. Benutzen wir jetzt diesen ebenso wie vorher den Kegel $K=0$, und stellen die Gleichung der variabeln Tangentenebene von $K'=0$ mit Hülfe eines Parameters σ durch die zu (7.) analoge Gleichung dar:

$$(21.)\qquad A'+2\sigma B'+\sigma^2 C' = 0,$$

wo A', C' irgend zwei Tangentenebenen von $K'=0$, B' die Verbindungsebene ihrer Berührungsseiten bedeutet. Sind zugleich die absoluten Werthe der Constanten in A', B', C' so bestimmt, dass

$$K' = B'^2-A'C',$$

so ist auch für einen auf der Tangentenebene (21.) liegenden Punkt:

$$K' = (B'+\sigma C')^2,$$

und führt man dies in die Gleichung der Oberfläche, oder vielmehr in die beiden mit Hülfe von (7.) entstandenen Factoren (8.) derselben ein, so erhält man die *vier* linearen Factoren:

$$(22.)\qquad \begin{cases} 0 = (\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)+(B'+\sigma C'), \\ 0 = (\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)-(B'+\sigma C'), \\ 0 = (\lambda-\lambda')p-(B+\varrho C)+(B'+\sigma C'), \\ 0 = (\lambda-\lambda')p-(B+\varrho C)-(B'+\sigma C'). \end{cases}$$

Wenn also zwei Tangentenebenen verschiedener Kegel gegeben sind, so drücken sich die Coordinaten der vier Durchschnittspunkte ihrer Schnittlinie mit der Fläche rational aus. Da jede Tangentenebene, wie oben erwähnt, mit

Hülfe einer quadratischen Gleichung gefunden wird, so haben also die biquadratischen Gleichungen, welche jene Schnittpunkte darstellen, die Eigenschaft, zu ihrer Lösung nur die Lösung zweier getrennten quadratischen Gleichungen zu erfordern.

Da ausserdem die Gleichungen (22.) projectivische Ebenenbündel darstellen, so hat man den Satz:

Legen wir an jeden von zwei doppelt berührenden Kegeln ($K=0, K'=0$) *eine Tangentenebene* ($C=0, C'=0$). *Ihre Durchschnittslinie schneidet die Oberfläche in 4 Punkten* P_1 P_2 P_3 P_4. *Legen wir ferner durch jede der Berührungsseiten von* $C=0$, $C'=0$ *eine bewegliche Ebene* ($B+\varrho C=0$, $B'+\sigma C'=0$), *und wo sie den betreffenden Kegel nochmals schneidet, die Tangentenebene* ($A+2\varrho B+\varrho^2 C=0$, $A'+2\sigma B'+\sigma^2 C'=0$); *die Schnittpunkte der Schnittlinie der Tangentenebenen mit der Fläche,* Q_1 Q_2 Q_3 Q_4, *sind den vier Punkten* P *in der Weise zugeordnet, dass diese bei der Drehung der Ebenen* $B+\varrho C=0$, $B'+\sigma C'=0$ *allmälig in jene übergehen. Legt man durch* $P_i Q_i$ *und durch den Schnittpunkt der Ebenen* $B+\varrho C=0$, $B'+\sigma C'=0$ *mit der Ebene der Doppelcurve eine Ebene, so entsteht bei Bewegung der Figur ein Ebenenbündel, welches* P_i *zum Scheitel hat. Die vier Ebenenbündel, welche die verschiedenen Punkte* P *zu Scheiteln haben, sind projectivisch.*

Von jeder Ebene, die Ebenen der Bündel selbst ausgenommen, werden diese vier Bündel in projectivischen ebenen Systemen geschnitten. Und zwar bilden vier entsprechende Gerade solcher vier Systeme ein Vierseit, dessen Diagonalen der Schnitt mit der Ebene der Doppelcurve und die Schnitte mit den beweglichen Ebenen $B+\varrho C=0$, $B'+\sigma C'=0$ *sind; so also dass für alle Geradenquadrupel in einer Ebene als Vierseite betrachtet eine Diagonale fest ist, die andern beiden aber durch feste Punkte gehen. Auf der Ebene der Doppelcurve fallen je zwei der vier ebenen Systeme zusammen. Auf den Ebenen der Büschel* $B+\varrho C=0$, $B'+\sigma C'=0$ *ist noch eine zweite Diagonale der vollständigen Vierseite fest, und nur die dritte geht durch einen festen Punkt.*

§. 14. Geometrische Abbildung der Fläche auf einer Ebene.

Heben wir eine der Gleichungen (22.) heraus. Die drei Gleichungen

$$(23.)\quad \begin{cases} A+2\varrho B+\varrho^2 C = 0, \\ A'+2\sigma B'+\sigma^2 C' = 0, \\ (\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)+(B'+\sigma C') = 0 \end{cases}$$

bestimmen ebensowohl ϱ, σ eindeutig durch die x, als die x eindeutig durch ϱ, σ. *Jedem Punkt der Fläche entspricht daher eine einzige Ebene ϱ, σ in jedem der vier Bündel, und umgekehrt; mithin auch beim Durchschnitte der Bündel mit einer beliebigen Ebene jedem Punkt der Oberfläche eine Gerade jedes der ebenen Systeme, und umgekehrt. Daher bildet der Durchschnitt jedes der Ebenenbündel mit einer beliebigen festen Ebene E eine eindeutige Abbildung der Oberfläche, wobei jedem Punkt der Fläche eine bestimmte Gerade entspricht.*

Fixiren wir auf dieser Ebene als Coordinatendreieck die Durchschnitte der Ebene mit den drei Ebenen

$$C=0,\qquad C'=0,\qquad C''=(\lambda-\lambda')p+B+B'=0,$$

so sind ϱ, σ aus (23.) die Coordinaten der dem Punkte x entsprechenden Geraden, d. h. die Abstandsverhältnisse der Geraden von den Ecken

$$C'=0,\quad C''=0 \quad \text{und} \quad C=0,\quad C'=0$$

einerseits und von den Ecken

$$C'=0,\quad C''=0 \quad \text{und} \quad C'=0,\quad C=0$$

andrerseits, jedesmal multiplicirt mit Constanten.

Rechnet man zu einer *Classe von Abbildungen* diejenigen, welche man aus denselben zwei Kegeln dadurch ableitet, dass man auf den Schnittlinien ihrer Tangentenebenen dieselbe correspondirende Schaar von Punkten P_iQ_i benutzt (gleichgültig von welchen Ebenen C, C' man ausgeht), *so giebt es im Ganzen vierzig Classen von Abbildungen;* nämlich zehn Gruppen je nach dem benutzten Kegelpaar, und in jeder Gruppe vier Classen, jenachdem eine oder die andere der vier Schaaren P_iQ_i benutzt wird.

Stellt man aus (23.) die Gleichung eines beweglichen Punktes der Fläche, $\Sigma u_i x_i=0$, auf, so erhält man, indem man aus dieser Gleichung und (23.) die x eliminirt und von der oben schon benutzten Bezeichnung Gebrauch macht:

$$(24.)\quad \begin{cases} 0 = (u, A+2\varrho B+\varrho^2 C, A'+2\sigma B'+\sigma^2 C', (\lambda-\lambda')p+B+\varrho C+B'+\sigma C') \\ \quad = (\lambda-\lambda')(u, A+2\varrho B+\varrho^2 C, A'+2\sigma B'+\sigma^2 C', p) \\ -(u, A+\varrho B, B+\varrho C, A'+2\sigma B'+\sigma^2 C')+(u, A'+\sigma B', B'+\sigma C', A+2\varrho B+\varrho^2 C). \end{cases}$$

Die Coefficienten der u in diesem Ausdrucke sind die Functionen von ϱ, σ, welche den x gleich zu setzen sind. Bezeichnet man diese durch F, so hat man also:

$$
(25.) \quad \begin{cases} \mu x_1 = F_1(\varrho, \sigma), \\ \mu x_2 = F_2(\varrho, \sigma), \\ \mu x_3 = F_3(\varrho, \sigma), \\ \mu x_4 = F_4(\varrho, \sigma). \end{cases}
$$

Die Functionen F sind für jede der Grössen ϱ, σ vom zweiten Grade. *In der soeben behandelten Abbildung also wird das Bild eines ebenen Schnittes (die u constant) eine Curve vierter Classe, welche zwei Seiten des Coordinatendreiecks* ($C=0$, $C'=0$) *zu Doppeltangenten hat.* Den Schnittpunkten zweier ebenen Schnitte entsprechen die beweglichen gemeinschaftlichen Tangenten zweier solcher Curven. Da nun die Zahl dieser beweglichen Tangenten vier sein muss, die beiden gemeinsamen Doppeltangenten aber nur acht gemeinsame Tangenten absorbiren, *so müssen alle Curven* (24.) *noch vier feste gemeinsame Tangenten besitzen.*

Es ist leicht direct nachzuweisen, wie sowohl jene beiden Doppeltangenten, als diese festen Tangenten sich ergeben. Es sind dieses die Gebilde, welche nicht einem, sondern unendlich vielen Punkten der Oberfläche entsprechen, und zwar entsprechen einfache feste Elemente Geraden der Fläche, feste Doppelelemente Kegelschnitten. Betrachten wir den Durchschnitt der Ebene $C=0$ mit der Oberfläche; dieser zerfällt in zwei Kegelschnitte, die Durchschnitte der Ebene mit den beiden Flächen (8.). Da wir hier die erste Gleichung (22.) benutzen, welche aus der ersten Gleichung (8.) entstanden ist, so erhalten wir auch nur die Punkte des ersten Kegelschnitts, indem wir die Punkte Q_1 auf den Schnittlinien von $C=0$ mit der beweglichen Ebene $A'+2\sigma B'+\sigma^2 C'=0$ betrachten, während die Punkte des anderen Kegelschnitts aus anderen Tangentenebenen des ersten Kegels hervorgehen. Alle aus $C=0$ entspringenden Punkte aber liefern dieselbe Ebene des betreffenden Bündels, also die eine feste Doppeltangente der Abbildungscurve. Ebenso liefern die aus $C'=0$ hervorgehenden Punkte die andere Doppeltangente; und man sieht, wie die vier verschiedenen Abbildungen, bei welchen dieselben Kegel benutzt sind, sich nur durch verschiedene Combination der zu Grunde gelegten Kegelschnittpaare, der Schnitte von $C=0$ und $C'=0$ mit der Fläche, von einander unterscheiden. Indem man die Ebenen $B+\varrho C=0$ und $B'+\sigma C'=0$ wandern lässt, immer die Tangentenebenen der Schnittseiten der Kegel legt und immer einen bestimmten Punkt Q_i wählt, bewegt man sich immer im Schnittpunkte zweier Kegelschnittschaaren, die aus den von den Tangenten der Kegel aus-

geschnittenen Doppelschaaren auf bestimmte Weise gewählt sind. Aber wie oben gezeigt, befinden sich in jeder Kegelschnittschaar vier Paare von Geraden. Bemerken wir nun, dass ein Paar, welches bei einem Kegel vorkommt, bei dem andern nie vorkommen kann; sonst müssten beide Kegel eine gemeinschaftliche Tangentenebene haben, was im Allgemeinen durchaus nicht eintritt. Ferner ist oben gezeigt, dass die Kegelschnitte derselben Schaar sich nur auf der Doppelcurve schneiden können; aber durch jeden Schnittpunkt einer Geraden mit der Doppelcurve geht keine weitere Gerade. Daher schneiden die vier Paare einer Schaar einander nicht; aber jedes Paar einer Schaar schneidet zweimal jedes Paar der conjugirten Schaar. Endlich können nicht drei Gerade in einer Ebene liegen, da sonst die Doppelcurve in gerade Linien aufbrechen müsste, um die drei Schnittpunkte mit diesen Geraden zu enthalten.

Sind also die Paare der einen bei $K=0$ auftretenden Kegelschaar

$$a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \quad a_3 b_3, \quad a_4 b_4,$$

die der andern

$$\alpha_1 \beta_1, \quad \alpha_2 \beta_2, \quad \alpha_3 \beta_3, \quad \alpha_4 \beta_4,$$

so erhält man die Paare der ersten Schaar, welche zu K' gehört, indem man zuerst etwa a_1 mit einer diese schneidenden Geraden der zweiten Reihe combinirt; diese sei α_1. Enthält die zu untersuchende Schaar das Paar $a_1\alpha_1$, so darf sie weder b_1 noch β_1 mehr enthalten, da diese a_1 oder α_1 schneiden würden. Die Schaar enthält also noch ein Paar, welches aus den andern Paaren der obigen Reihen gebildet ist, etwa $a_2\alpha_2$, u. s. w. Man sieht, wie man demnach, bei passender Bezeichnung, als Schema der Paare, welche zu K' gehören, folgendes annehmen kann:

in der ersten Schaar: $a_1\alpha_1, \quad a_2\alpha_2, \quad a_3\alpha_3, \quad a_4\alpha_4$

in der zweiten Schaar: $b_1\beta_1, \quad b_2\beta_2, \quad b_3\beta_3, \quad b_4\beta_4.$

Die zusammengehörigen Geraden in der zweiten Schaar sind durch die Paare der ersten vollständig bestimmt, denn die übrig gebliebenen acht Geraden schneiden sich überhaupt nur vier mal zu zwei; dass aber b_1 mit β_1 sich schneidet, wenn a_1 mit α_1, ist daraus ersichtlich, dass das Paar $a_1 b_1$ von $\alpha_1\beta_1$ zweimal geschnitten wird.

Nehmen wir nun an, die Kegelschnitte, welche in der Abbildung die Doppeltangenten liefern, gehörten den Kegelschnittschaaren an, in denen die Paare

$$a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \quad a_3 b_3, \quad a_4 b_4$$
$$a_1\alpha_1, \quad a_2\alpha_2, \quad a_3\alpha_3, \quad a_4\alpha_4$$

vorkommen. Nun geben aber zwei unter einander stehende Paare nicht einen Schnittpunkt, sondern eine gemeinsame Gerade; in der Construction, welche oben ausgeführt wurde, ist also jeder Punkt einer Geraden a_i durch dieselbe Gerade abgebildet, und man erhält also in der That vier feste Tangenten der Abbildung ebener Schnittcurven, nämlich die Bilder der vier Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, welche den zu Grunde gelegten Kegelschnittschaaren gemeinsam sind.

Nehmen wir nun endlich an, die Ausgangsebenen $C = 0$, $C' = 0$ seien die Ebenen zweier solcher Paare, etwa $a_1 b_1$ und $\alpha_1 \alpha_1$. In diesem Falle erleidet die Abbildung eine wesentliche Modification. Die Unbestimmtheit der aus (24.) oder (25.) gegebenen x tritt in diesem Falle für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ ein; es verschwinden also in (24.) die Coefficienten von $\varrho^2 \sigma^2$, welche in diesem Falle allein übrig bleiben. Die Gleichung (24.) ist also dann nur noch vom dritten Grade; oder das System der Abbildungen ebener Schnittcurven hat sich in die dritte Ecke des Coordinatendreiecks und in ein System von Curven dritter Classe aufgelöst, welches zwei Seiten des Coordinatendreiecks nicht mehr zu festen Doppeltangenten, sondern nur noch zu festen einfachen Tangenten besitzt. Der durch die dritte Ecke des Coordinatensystems gehende Geradenbüschel bildet die Gerade a_1 ab; man kann ihn übergehen und sich nur mit dem System von Curven dritter Classe beschäftigen; dieses hat jetzt *fünf einfache feste Tangenten*, die Bilder der fünf einander nicht schneidenden Geraden

$$b_1, \quad \alpha_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4.$$

Und so sind wir denn zu der Abbildung zurückgekehrt, von welcher wir ausgingen. Denn übertragen wir das System von Curven dritter Classe mit fünf festen Tangenten in ein System von Curven dritter Ordnung mit fünf gemeinschaftlichen festen Punkten, indem wir unter ϱ, σ Coordinaten von Punkten, nicht mehr von Geraden in einer Ebene verstehen, so haben wir genau die im Anfange dieser Untersuchungen benutzten Vorstellungen vor uns.

Wir haben gesehen, wie die Abbildung mit der Fläche in unmittelbarer geometrischer Beziehung steht, und wie jede Fläche in der angegebenen Weise abgebildet werden kann. Wir können also sofort alle früher aus der Abbildung hergeleiteten Sätze der allgemeinen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades beilegen.

Die Untersuchung hat durch eine andere Art der Abbildung hindurchgeführt. Wollen wir auch sie in der Weise umgestalten, dass wir unter ϱ, σ Punktcoordinaten verstehen, so erhalten wir folgenden Satz:

Die Fläche lässt sich auf vierzig Classen von Arten so auf einer Ebene eindeutig abbilden, dass die ebenen Schnittcurven sich wieder als Curven vierter Ordnung mit zwei festen Doppelpunkten abbilden. Diese Curven gehen ausserdem noch durch vier feste Punkte, die Bilder einer Vier, zu welcher die Abbildung in besonderer Beziehung steht. Die conjugirte Vier wird dann abgebildet durch vier Kegelschnitte, welche durch drei jener festen Punkte und durch die Doppelpunkte geht. Die acht übrig bleibenden Geraden werden abgebildet durch die Verbindungslinien der Doppelpunkte mit den vier festen Punkten, welche sich sofort als die beiden gegenüberstehenden Vieren ausdrücken. Man sieht hieraus, dass von diesen vierzig Abbildungsarten zunächst zwei conjugirt sind, für welche nur die Vieren der ersten Doppelvier ihre Rollen vertauscht haben; ihnen stehen die Abbildungen gegenüber, bei welchen die gegenüberstehenden Vieren benutzt sind, so dass die vierzig Abbildungsarten sich in zehn Gruppen zu vier theilen. Die Doppelpunkte sind die Bilder zweier beliebigen Kegelschnitte aus zwei nicht conjugirten Schaaren, die Verbindungslinie der Doppelpunkte ist die Abbildung ihres Schnittpunkts. Uebrigens bilden sich zwei Kegelschnittschaaren als Gerade durch einen Doppelpunkt ab; sechs andere als Kegelschnitte durch beide Doppelpunkte und zwei einfache feste Punkte; die beiden letzten als Curven dritter Ordnung durch die vier festen einfachen und einen Doppelpunkt und mit einem Doppelpunkte in dem letzten Doppelpunkt.

Eine solche Abbildung geht in eine der früheren über, wenn die Doppelpunkte Kegelschnitte vorstellen, welche in Paare mit einer gemeinsamen Geraden ausarten, wobei diese gemeinsame Gerade dann zugleich eine derjenigen ist, welche sich vorher als feste einfache Punkte abbildeten.

§. 15. Die Auflösung der Gleichung sechzehnten Grades.

Da man jetzt weiss, dass die sechzehn Geraden sich immer auf die im Anfange der Untersuchung betrachteten zurückführen lassen, so kann man leicht eine Auflösungsmethode der Gleichung sechzehnten Grades angeben, welche die in §. 12 gegebene an Einfachheit übertrifft.

Sind nämlich

$$(26.)\quad K=0,\ K'=0,\ \ldots\ K^{(4)}=0 \qquad (K^{(i)}=\psi+\lambda^{(i)}\varphi+\lambda^{(i)'}p^2)$$

die Gleichungen der fünf Kegel, wobei also die *vollständige* Auflösung der Gleichung fünften Grades vorausgesetzt ist, so sind nur fünf quadratische Glei-

chungen zu lösen, um die variabeln Tangentenebenen dieser Kegel in der Form

$$(27.)\quad \begin{cases} A+2\varrho B+\varrho^2 C = 0, \\ A'+2\varrho' B'+\varrho'^2 C' = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A^{(4)}+2\varrho^{(4)} B^{(4)}+\varrho^{(4)2} C^{(4)} = 0 \end{cases}$$

darzustellen. Unter den Tangentenebenen eines Kegels sind zweimal vier, welche in einem Kegelschnitte und einem Geradenpaar schneiden. Die Werthe von $\varrho^{(i)}$, welche den Geradenpaaren entsprechen, erhält man aus den zehn Gleichungen:

$$(28.)\quad \begin{cases} 0 = (a,\,b,\,c,\,A^{(i)}+2\varrho^{(i)}B^{(i)}+\varrho^{(i)2}C^{(i)})^2 \\ \qquad -3\,(a,\,b,\,\pm\lambda^{(i)}p+B^{(i)}+\varrho^{(i)}C^{(i)},\,A^{(i)}+\varrho^{(i)}C^{(i)}\mp\lambda^{(i)}\varrho^{(i)}p)^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung wird aus (11.) abgeleitet, indem man für den Kegel K' mit dem Parameter λ' die Fläche ψ mit dem Parameter 0 gesetzt denkt, was auf die dort benutzte Ableitung gar keinen Einfluss übt; nur bedeuten dann auch a, b, c symbolische Coefficienten von ψ, so dass

$$\psi = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2.$$

Eliminirt man $\varrho^{(i)}$ aus (28.) und der betreffenden Gleichung (27.), so erhält man eine Gleichung vierten Grades in den x, welche die Fläche

$$(29.)\quad \varphi-(B^{(i)}+\varrho^{(i)}C^{(i)}\pm\lambda^{(i)}p^{(i)}) = 0$$

in vier Geradenpaaren schneidet; und verbindet man (28.), (29.) mit der Gleichung $p=0$, so erhält man acht Punkte der Doppelcurve, entsprechend den Durchschnitten der vier Geradenpaare einer Kegelschnittschaar mit der Doppelcurve. Fügt man noch die Gleichung $u_x=0$ hinzu und eliminirt die x, so erhält man zehn Gleichungen achten Grades in den u:

$$(30.)\quad \begin{cases} U = 0, & V = 0, \\ U^{(1)} = 0, & V^{(1)} = 0, \\ U^{(2)} = 0, & V^{(2)} = 0, \\ U^{(3)} = 0, & V^{(3)} = 0, \\ U^{(4)} = 0, & V^{(4)} = 0. \end{cases}$$

Diese zehn Gleichungen stellen Producte der Gleichungen von je acht Punkten der Doppelcurve dar, nämlich immer von den Schnittpunkten der Doppelcurve mit den Geraden, die in der entsprechenden Gruppe IV. auftreten. Aber aus der Tafel IV. erkennt man, dass je vier Gruppen, aus den verschiedenen Horizontalreihen gewählt, immer eine und nur eine Gerade gemein haben,

welche dann auch noch immer in einer bestimmten Gruppe der fünften Reihe auftritt. Man sieht also, dass je vier der Gleichungen (30.), aus verschiedenen Reihen gewählt, einen und nur einen linearen Factor gemein haben, welcher dann noch in einer bestimmten Gleichung der fünften Reihe auftritt. Indem man also diese gemeinschaftlichen Factoren bestimmt, erhält man ohne weitere Irrationalität die Gleichungen der sechzehn Punkte der Doppelcurve, welche in §. 12 gesucht wurden. Dass, wenn x dieser Punkt ist, die Ebenen

$$D\psi = 0, \quad D\varphi - \sqrt{\psi}\, Dp = D\varphi + \frac{G}{H} Dp = 0$$

die zugehörige Gerade bestimmen, ist a. a. O. gezeigt worden.

Man bedarf also zur Auflösung der Gleichung sechzehnten Grades nur der vollständigen Auflösung von einer Gleichung fünften Grades und von vier quadratischen Gleichungen, deren Coefficienten die entsprechenden vier von den Wurzeln der Gleichung fünften Grades rational enthalten. Die Anzahl der letzteren ist 4, nicht 5, da wie man sah die letzten beiden Gleichungen (30.) nicht benutzt werden.

§. 16. Die Wendecurve.

Im Bd. 67 dieses Journals p. 14 habe ich für die Abbildung der Wendecurve einen Ausdruck gegeben, welcher im vorliegenden Falle eine Curve zwölfter Ordnung darstellt. Da die Curve sich im Allgemeinen gegen sämmtliche Geraden gleich verhalten muss, von allen in gleich viel Punkten geschnitten wird, so muss die Abbildung in jedem der Fundamentalpunkte einen vierfachen Punkt haben, so dass sie jede der Verbindungsgeraden zweier Fundamentalpunkte so wie den Kegelschnitt 16 noch in vier Punkten treffen. Aber man weiss allgemein, dass die Wendecurve von allen Geraden, die auf der Fläche liegen, berührt wird, wo sie denselben begegnet. Die Curve zwölfter Ordnung der Abbildung muss also in jedem Fundamentalpunkte zwei Rückkehrpunkte haben, sie muss jede ihrer Verbindungslinien zur Doppeltangente haben und den Kegelschnitt 16 in zwei Punkten berühren.

Diese Abbildungscurve entspricht einer Raumcurve sechzehnter Ordnung. In der That ist es nicht schwer sich zu überzeugen, dass die *Hesse*sche Fläche $\Delta = 0$ sich mit der gegebenen Fläche in einer Curve durchschneidet, welche die Doppelcurve achtmal enthält. In der That, setzen wir

$$f = \varphi^2 - 4p^2\psi,$$

so nimmt die Gleichung der *Hesse*schen Fläche die Form an

$$(31.)\quad \Delta = M + Nf,$$

wo M aus Termen vierter Dimension in φ und p besteht. Der Schnitt von $\Delta = 0$ und $f = 0$ kann also durch den Schnitt von $M = 0$ mit $f = 0$ ersetzt werden, welcher die Curve $p = 0$, $\varphi = 0$ achtfach enthält, und also ausserdem nur noch eine Curve sechzehnter Ordnung enthalten kann. Zur Darstellung von Δ in der Form (31.) führt folgende Betrachtung.

Der Ausdruck Δ entsteht aus dem Ausdruck $\Delta = (u, v, w, r)^2$, wenn man darin die Symbole $u_i u_k$, $v_i v_k$ etc. durch die zweiten Differentialquotienten von f oder durch

$$(32.)\quad 2\varphi_i \varphi_k + \varphi\varphi_{ik} - 2\psi p_i p_k - 4p(p_k \psi_i + p_i \psi_k) - 2p^2 \psi_{ik}$$

ersetzt. Bezeichnen wir die fünf Glieder dieses Ausdrucks durch 1, 2, 3, 4, 5. Dann besteht Δ aus der Summe von 70 Termen, jeder mit passenden Polynomialcoefficienten multiplicirt; und zwar entstehen die 70 Terme dadurch, dass man in $(u, v, w, r)^2$ die $u_i u_k$, $v_i v_k$ etc. in allen Combinationen durch die verschiedenen Ausdrücke 1, 2, ... 5 ersetzt. Bemerken wir nun, dass offenbar Null entsteht, wenn die Terme 1 mehr als einmal eingeführt werden, oder die Terme 3 mehr als einmal, oder die Terme 4 mehr als zweimal, oder wenn die Terme 3 und 4 irgendwie in demselben Terme von Δ benutzt werden. Lassen wir ausserdem alle Terme von Δ aus, welche die Factoren φ, p zur vierten oder höhern Dimension erhalten, so sehen wir, dass nur Terme übrig bleiben können, welche aus der gleichzeitigen Benutzung folgender Terme von (32.) entstehen:

1 2 2 2
1 2 2 3
1 2 2 4
1 2 3 5
1 2 4 4
2 2 2 3.

Bezeichnen wir die entsprechenden Terme von Δ durch (1222), (1223) etc., so ist das Aggregat der Terme, welche nicht ohne Weiteres in M eingehen:

$$M' = 4(1222) + 12(1223) + 12(1224) + 24(1235) + 12(1244) + 4(2223).$$

Bezeichnen wir nun die symbolischen Coefficienten von φ durch $a, b \ldots$, die von ψ durch $\alpha, \beta \ldots$, so dass

$$\varphi = a_x^2 = b_x^2 \ldots, \quad \psi = \alpha_x^2 = \beta_x^2 \ldots,$$

so ist, mit Hülfe ähnlicher Rechnungen wie in §. 12:

$$(1222) = 2\varphi^3.(\varphi b c d)^2 = 2\varphi^3.(a b c d)(\varphi b c d) a_x = \tfrac{1}{2}\varphi^4.(a b c d)^2.$$

Dieser Term geht also in M ein, und ist bei M' nicht zu berücksichtigen. Ferner wird

$$\begin{aligned}(1223) &= -4\varphi^2\psi(\varphi b c p)^2 = -4\varphi^2\psi(a b c p)(\varphi b c p) a_x \\ &= -\tfrac{4}{3}\varphi^2\psi(a b c p)\{\varphi(a b c p) - p(a b c \varphi)\} \\ &= -\tfrac{4}{3}\varphi^3\psi(a b c p)^2 + \tfrac{4}{3}\varphi^2\psi p(a b c p)(a b c d) d_x \\ &= -\tfrac{4}{3}\varphi^3\psi(a b c p)^2 + \tfrac{1}{3}\varphi^2\psi p^2(a b c d)^2.\end{aligned}$$

Das letzte Glied kann man wieder auslassen, und in M' den Term (1223) durch $-\tfrac{4}{3}\varphi^3\psi(abcp)^2$ ersetzen. Sodann hat man:

$$\begin{aligned}(1224) &= -16\varphi^2 p(\varphi b c p)(\varphi b c \psi) \\ &= -16\varphi^2 p(a b c p)(\varphi b c \psi) a_x \\ &= -\tfrac{16}{3}\varphi^2 p(a b c p)\{(a b c \psi)\varphi - (a b c \varphi)\psi\} \\ &= -\tfrac{16}{3}\varphi^3 p(a b c p)(a b c \psi) + \tfrac{4}{3}\varphi^2 p^2\psi(a b c d)^2.\end{aligned}$$

Dieser Term kann also ganz übergangen werden.

Der nächste Term in M' ist:

$$\begin{aligned}(1235) &= 8\psi p^2\varphi(\varphi b p \alpha)^2 \\ &= 8\psi p^2\varphi(a b p \alpha)(\varphi b p \alpha) a_x \\ &= 4\psi p^2\varphi(a b p \alpha)\{(a b p \alpha)\varphi - (a b \varphi \alpha) p + (a b \varphi p)\alpha_x\}.\end{aligned}$$

Von diesen drei Termen ist nur der letzte zu benutzen, welcher die Form annimmt:

$$4\psi p^2\varphi(a b p \psi)(a b c p) c_x = \tfrac{4}{3}\psi p^2\varphi(a b c p)\{(a b c \psi) p - (a b c p)\psi\};$$

und hier kann abermals der erste Theil übergangen werden, so dass nur bleibt:

$$-\tfrac{4}{3} p^2\varphi\psi^2(a b c p)^2.$$

Ferner hat man:

$$\begin{aligned}(1244) &= -64\varphi p^2(\varphi b p \psi)^2 \\ &= -64\varphi p^2(a b p \psi)(\varphi b p \psi) a_x \\ &= -32\varphi p^2(a b p \psi)\{(a b p \psi)\varphi - (a b \varphi \psi) p + (a b \varphi p)\psi\}.\end{aligned}$$

Nur der letzte Term ist zu berücksichtigen, und zwar wird derselbe:

$$\begin{aligned}-32\varphi p^2\psi(a b \varphi p)(a b p \psi) &= -32\varphi p^2\psi(a b c p)(a b p \psi) c_x \\ &= -\tfrac{32}{3}\varphi p^2\psi(a b c p)\{(a b c \psi) p - (a b c p)\psi\},\end{aligned}$$

wobei wieder nur der letzte Term zu berücksichtigen ist. Endlich ist:

$$(2223) = -2\varphi^3\psi(a b c p)^2.$$

Fassen wir alles zusammen, so wird mit Uebergehung der in M eintretenden Theile:

$$M' = -24\varphi\psi(abcp)^2\{\varphi^2-4p^2\psi\}.$$

Dieser Rest ist also durch f theilbar, was zu beweisen war. —.

Die im Vorstehenden gegebenen Resultate erleiden in besonderen Fällen mannigfache und interessante Modificationen. Aber die Zahl der besondern Fälle, welche Berücksichtigung verdienen, ist so gross, und die dabei auftretenden Erscheinungen so verschiedenartig, dass sie einer besondern Darstellung vorbehalten bleiben müssen.

Giessen, den 12. April 1868.

Neuer und directer Beweis eines Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.

(Von Herrn *Aronhold*.)

In meiner Abhandlung Bd. 62 dieses Journals pag. 281 bin ich bei der Ableitung der Grundgesetze der Invariantentheorie von den Transformationsgleichungen ausgegangen, welche man durch Einführung einer linearen Substitution in eine allgemeine homogene Function p^{ter} Ordnung von n Variabeln erhält, indem man die in Functionen der Substitutionscoefficienten ausgedrückten Coefficienten den entsprechenden einer passenden transformirten Form gleichsetzt. Hiedurch habe ich unter Andern die Anzahl ω der Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten beider Formen gleich der Differenz der Anzahl der Transformationsgleichungen und der Substitutionscoefficienten erhalten, indem ich voraussetzte, dass die Substitutionscoefficienten bestimmte Werthe annehmen, wenn man die zulässige Anzahl von Coefficienten der transformirten Form durch die übrigen ausgedrückt, und den letztern zwar allgemeine, aber nunmehr unveränderliche Werthe beigelegt hat.

Zu der vorläufigen Annahme bestimmter Substitutionscoefficienten war ich berechtigt, weil im weitern Verlauf eine ganz besondere und ausführliche Behandlung der Substitutionscoefficienten, welche diese Annahme *nicht* voraussetzt, zu dem Resultate führt, dass sich die Substitutionscoefficienten in den Gleichungen separiren lassen und alsdann eine völlig bestimmte Substitution geben. In der That gehe ich bei der Lehre von den zugehörigen Formen und Covarianten, pag. 316 und folgende, nur von n von einander unabhängigen Invarianten aus, was ohne obige Annahme zu machen zulässig ist, und leite aus denselben n von einander unabhängige *zugehörige Formen* ab. Alsdann zeige ich, dass die transponirte Substitution nur eine Umformung der Gleichungen ist, welchen diese n zugehörigen Formen definitionsmässig genügen. Dadurch erhalte ich endlich ganz bestimmte von willkürlichen Parametern freie Substitutionscoefficienten; denn wenn die transponirte Substitution μ willkürliche Parameter hätte, so könnte sie nur $n-\mu$ Gleichungen identisch erfüllen, und es könnten nur $n-\mu$ und nicht n von einander unabhängige zugehörige Formen existiren.

Diese ganz strenge und durch die formale Behandlung des Stoffes jener Abhandlung gebotene Beweisführung ist, aus dem Zusammenhang herausgenommen, keine directe und scheint deshalb zu dem Bedenken Veranlassung gegeben zu haben, ob die angegebene Zahl der absoluten Invarianten hinlänglich sicher sei, denn wenn die Substitutionscoefficienten sich mit μ willkürlichen Parametern behaftet fänden, so würde die Zahl der absoluten Invarianten gleich $\omega+\mu$ sein. Herr *Clebsch* hat daher im Bd. 65 dieses Journals pag. 267 einen andern Beweis zur Bestimmung der Zahl ω aufgestellt, welchem die Definition der Invarianten als Integrale partieller Differentialgleichungen zu Grunde gelegt ist, allein dieser Beweis zeigt nur, dass die Zahl nicht kleiner als ω sein kann, weil die Unabhängigkeit der ursprünglichen partiellen Differentialgleichungen von einander nicht bewiesen ist.

Um zu beweisen, dass die Zahl wirklich gleich ω ist, hat Herr *Christoffel* Bd. 68 dieses Journals pag. 267 in einer sehr eingehenden Weise diese Untersuchung der Unabhängigkeit der partiellen Differentialgleichungen von einander geführt, indessen dazu ebenfalls den oben angegebenen Satz von der Existenz von n von einander unabhängigen zugehörigen Formen benutzt, welcher nach dem Obigen schon ohne Zuziehung der partiellen Differentialgleichungen den verlangten Beweis liefert.

Ich will nun auf ganz directe Weise zeigen, dass die Substitution von willkürlichen Parametern frei ist, und dabei weder die Existenz von n zugehörigen Formen, noch andere Sätze der Invariantentheorie voraussetzen, so dass der Satz bei der Begründung der Invariantentheorie gleich von vorne herein eine Stelle finden kann.

Es sei

$$(1.)\qquad x_k = x_k^{(1)}\xi_1+x_k^{(2)}\xi_2+\cdots+x_k^{(n)}\xi_n$$

eine ursprüngliche Substitution, welche, wenn $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ und $F'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ die ursprüngliche und transformirte Form bedeuten, der Gleichung

$$(2.)\qquad F(x_1, x_2, \dots x_n) = F'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$$

Genüge leisten muss.

Ergiebt sich, dass sich aus *allen* Transformationsgleichungen nur $n^2-\mu$ Verbindungen der Substitutionscoefficienten herleiten lassen, so kann man auch nur diese Verbindungen bestimmen, und daher auch nur $n^2-\mu$ Substitutionscoefficienten durch die übrigen, oder alle, durch μ willkürliche Parameter ausdrücken.

Es bezeichne δ eine Differentiation, welche *nur* nach diesen willkürlichen Parametern stattfindet, dann folgt aus (1.):

$$(3.)\qquad \delta x_k = \delta x_k^{(1)}\xi_1+\delta x_k^{(2)}\xi_2+\cdots+\delta x_k^{(n)}\xi_n.$$

Wenn man die aus (2.) zu entnehmenden Transformationsgleichungen in demselben Sinne differentiirt, so werden die rechten Seiten gleich Null, weil die Substitutionscoefficienten, welche die willkürlichen Parameter enthalten, nur auf den andern Seiten vorkommen. Man kann diese Differentiation aber mit der Gleichung (2.) selbst vornehmen, wenn man nur die Variabeln x_k als durch (1.) gegebene Functionen der ξ_k und alsdann die ξ_k als beliebige Grössen ansieht. Dieses giebt, in dem angedeuteten Sinne:

$$\delta F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

oder

$$(4.)\qquad \frac{dF}{dx_1}\delta x_1+\frac{dF}{dx_2}\delta x_2+\cdots+\frac{dF}{dx_n}\delta x_n = 0,$$

und diese Gleichung muss identisch gleich Null werden, nachdem man in derselben die Substitutionen (1.) und (3.) ausgeführt hat. Da aber die Substitutionsdeterminante nicht verschwinden soll, so kann man auch, was bequemer ist, die Variabeln ξ_k in (4.) überall durch die x_k ersetzen, und alsdann (4.) für alle Werthe der letzteren verschwinden lassen.

Hierzu ist die zu (1.) inverse Substitution nöthig, welche durch

$$(5.)\qquad \xi_\lambda = \xi_1^{(\lambda)}x_1+\xi_2^{(\lambda)}x_2+\cdots+\xi_n^{(\lambda)}x_n$$

bezeichnet sei. Wendet man dieselbe auf (3.) an, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad \delta x_k = x_1\Sigma\xi_1^{(\lambda)}\delta x_k^{(\lambda)}+x_2\Sigma\xi_2^{(\lambda)}\delta x_k^{(\lambda)}+\cdots+x_n\Sigma\xi_n^{(\lambda)}\delta x_k^{(\lambda)}.$$

Man denke sich nun alle Werthensysteme der Variabeln x_k, welche Wurzeln der $(n-1)$ Gleichungen:

$$(7.)\qquad \frac{dF}{dx_1}=0,\quad\ldots\quad \frac{dF}{dx_{k-1}}=0,\quad \frac{dF}{dx_{k+1}}=0,\quad\ldots\quad \frac{dF}{dx_n}=0$$

sind, so geht für *jedes* dieser Systeme die Gleichung (4.) in

$$\frac{dF}{dx_k}\cdot\delta x_k = 0$$

über, und da gleichzeitig mit dem System (7.) nicht $\frac{dF}{dx_k}=0$ sein kann, weil sonst die Discriminante von F verschwinden würde, so muss für *sämmtliche* den Gleichungen (7.) genügende Werthensysteme

$$(8.)\qquad \delta x_k = 0$$

sein. Die Anzahl dieser Werthensysteme ist bekanntlich gleich $(p-1)^{n-1}$, was immer grösser oder gleich n ist, mit Ausnahme des Falles $p=2$, der deshalb auszuschliessen ist. Mithin ist δx_k mindestens für n und mehr als n Werthe gleich Null. δx_k ist aber wegen (6.) eine *lineare* Function der Variabeln. Wenn daher δx_k nicht identisch gleich Null wäre, *so müssten alle Werthensysteme, welche Wurzeln der Gleichungen* (7.) *sind, ein und derselben linearen Gleichung genügen.* Dass dieses unmöglich ist, so lange F eine *allgemeine* homogene Function ist, lässt sich einsehen, wenn man die Bedingungen aufstellt, welche andernfalls stattfinden müssten. Da aber diese Bedingungen dann wirklich und *rational* erfüllt sind, also auch erfüllt bleiben müssen, wenn man F auf *rationale* Weise specialisirt, so gelangt man kürzer zum Ziele, wenn man in irgend einer derartigen aber sonst beliebigen Specialisirung von F zeigt, dass n Werthensysteme vorhanden sind, deren Determinante nicht verschwindet, da es dann im allgemeinen Falle gewiss solche giebt. Man setze daher z. B. in den Gleichungen (7.) die Coefficienten der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen, also die Coefficienten von $x_1^{p-1}, x_2^{p-1}, \dots x_n^{p-1}$ gleich Null, dann genügt man den Gleichungen (7.) durch die n Systeme:

$$\begin{array}{llll} x_1=1, & x_2=0, & \dots & x_n=0, \\ x_1=0, & x_2=1, & \dots & x_n=0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1=0, & x_2=0, & \dots & x_n=1, \end{array}$$

deren Determinante gleich 1 ist. Mithin genügen diese gleichzeitig keiner linearen Gleichung, folglich kann es auch im Allgemeinen nicht Statt finden, und δx muss *identisch* verschwinden.

In Folge dessen ist wegen (6.)

$$\Sigma \xi_1^{(\lambda)} \delta x_k^{(\lambda)} = 0, \quad \Sigma \xi_2^{(\lambda)} \delta x_k^{(\lambda)} = 0, \quad \dots \quad \Sigma \xi_n^{(\lambda)} \delta x_k^{(\lambda)} = 0$$

und daher, weil die Substitutionsdeterminante nicht verschwindet:

$$(9.) \qquad \delta x_k^{(\lambda)} = 0.$$

Die Gleichung (9.) sagt aus, dass für $p > 2$ die sämmtlichen partiellen Ableitungen der Substitutionscoefficienten nach den willkürlichen Parametern gleich Null sind; daher folgt, *dass die Substitutionscoefficienten keine willkürlichen Parameter enthalten.*

Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, dass in der vorstehenden Theorie auch der *directe* Beweis enthalten ist, *dass die partiellen Differentialgleichungen linear von einander unabhängig sind.*

Zu diesem Ende setze man die Werthe von (6.) wirklich in (4.) ein

und bezeichne der Kürze halber die Coefficienten von (6.) durch

$$(10.)\quad (ik) = \Sigma \xi_i^{(\lambda)} \delta x_k^{(\lambda)};$$

dann geht (4.) über in

$$(11.)\quad \Sigma (ik) x_i \frac{dF}{dx_k} = 0.$$

Da nun bewiesen ist, dass die $(ik) = 0$ sein *müssen*, so folgt, dass man der vorstehenden Gleichung nur auf diese eine Weise identisch genügen kann, oder *dass die Functionen*

$$x_i \frac{dF}{dx_k}$$

linear von einander unabhängig sind.

Setzt man aber in $x_i \frac{dF}{dx_k}$ statt der Potenzen und Producte der Variabeln die entsprechenden partiellen Ableitungen der Invarianten, so erhält man die linken Seiten der Differentialgleichungen.

Die Gleichung (11.) kann daher auch zur Vervollständigung des von Herrn *Clebsch* gegebenen Beweises dienen.

Aus der vorstehenden Theorie geht noch die bemerkenswerthe Thatsache hervor, dass die Multiplication λ_{ik}, welche Herr *Christoffel* a. a. O. pag. 248 benutzt, um die lineare Unabhängigkeit der partiellen Differentialgleichungen von einander zu beweisen, eine bestimmte Bedeutung haben, nämlich *dass sie die linearen homogenen Functionen* (ik) (10.) *der Variationen der Substitutionscoefficienten sind.* Hieraus folgt unter Andern ganz direct, dass die partiellen Differentialgleichungen wirklich von einander abhängig werden, wenn die Substitutionscoefficienten willkürliche Parameter enthalten.

Berlin, im Juni 1868.

Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunctionen.

(Von Herrn *M. Dietrich* zu Regensburg.)

Schön länger bekannt und leicht zu erweisen ist die Bemerkung, dass die in der Entwicklung einer rationalen Bruchfunction nach Potenzen ihrer Variabeln auftretenden Coefficienten sich durch Determinanten ausdrücken lassen, welche die Coefficienten des Nenners in eigenthümlicher regelmässiger Weise enthalten.

Setzt man nämlich den Bruch

$$\frac{f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots}{1+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+\cdots} = \varphi_0+\varphi_1x+\varphi_2x^2+\varphi_3x^3+\cdots,$$

so ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten φ durch Multiplication mit dem Nenner und nachherige Identificirung der beiden Gleichungsseiten die Relationen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = f_0,\\
&\varphi_1+g_1\varphi_0 = f_1,\\
&\varphi_2+g_1\varphi_1+g_2\varphi_0 = f_2,\\
&\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\varphi_n+g_1\varphi_{n-1}+g_2\varphi_{n-2}+\cdots+g_n\varphi_0 = f_n,\\
&\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

Durch Auflösung erhält man sogleich:

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} f_0, & 1, & 0, & \dots \\ f_1, & g_1, & 1, & 0, \dots \\ f_2, & g_2, & g_1, & 1, 0, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n, & g_n, & g_{n-1}, & \dots\dots, g_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots \\ 0, & g_1, & 1, & 0, \dots \\ 0, & g_2, & g_1, & 1, 0, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1, & g_n, & g_{n-1}, & \dots\dots, g_1 \end{vmatrix}$$

oder durch Reduction des Nenners

$$= (-1)^n. \begin{vmatrix} f_0, & 1, & 0, & \dots \\ f_1, & g_1, & 1, & 0, \dots \\ f_2, & g_2, & g_1, & 1, 0, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n, & g_n, & g_{n-1}, & \dots\dots, g_1 \end{vmatrix},$$

also auch durch Entwicklung

$$\varphi_n = (-1)^n \cdot \left\{ f_0 \cdot \begin{vmatrix} g_1, & 1, & 0, & \dots & & \\ g_2, & g_1, & 1, & 0, & \dots & \\ g_3, & g_2, & g_1, & 1, & 0, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n, & g_{n-1}, & \dots & \dots & \dots, & g_1 \end{vmatrix} - f_1 \cdot \begin{vmatrix} g_1, & 1, & 0, & \dots & \\ g_2, & g_1, & 1, & 0, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-1}, & g_{n-2}, & \dots & \dots, & g_1 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + f_2 \cdot \begin{vmatrix} g_1, & 1, & 0, & \dots & \\ g_2, & g_1, & 1, & 0, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-2}, & g_{n-3}, & \dots & \dots, & g_1 \end{vmatrix} - \dots \pm f_n \right\}.$$

Man sieht sogleich, dass die aus den Zahlen g gebildeten Determinanten einfach die Coefficienten der Entwicklung von $\frac{1}{1+g_1x+g_2x^2+\cdots}$ sind und bei allen Brüchen mit letzterem Nenner in gleicher Weise vorkommen.

Im Nachfolgenden soll nun umgekehrt aus dem Bau der eben betrachteten Determinanten auf ihre Entstehung aus einer Bruchentwicklung geschlossen und dies auf Determinanten ausgedehnt werden, welche nicht aus *einer* Reihe von Zahlen, sondern aus mehreren periodisch auf einander folgenden Zahlenreihen in ähnlicher Weise gebildet sind.

Hat man zunächst die Determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & 0, & \dots & & \\ a_2, & a_1, & 1, & 0, & \dots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{n-1}, & a_{n-2}, & \dots & \dots & \dots & a_1, & 1 \\ a_n, & a_{n-1}, & \dots & \dots & \dots & a_2, & a_1 \end{vmatrix},$$

so erhält man durch Entwicklung derselben nach den Gliedern der ersten Vertikalreihe sofort

$$(1.) \qquad A_n = a_1 . A_{n-1} - a_2 . A_{n-2} + a_3 . A_{n-3} - \cdots \pm a_n .$$

Bildet man ferner mit den gegebenen Zahlen a die Reihe

$$a(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

und mit den aus jenen darzustellenden Zahlen A die Reihe

$$A(x) = 1 - A_1x + A_2x^2 - A_3x^3 + \cdots,$$

so ist hier sogleich

$$A_n = \frac{(-1)^n}{n!} \partial_x^n A(x)_0$$

und hiemit die Darstellung der Determinante A_n auf die der Function $A(x)$ durch die Zahlen a oder die Function $a(x)$ zurückgeführt.

Nun giebt die Multiplication obiger Reihen

$$A(x).a(x) = 1-(A_1-a_1)x+(A_2-A_1a_1+a_2)x^2-(A_3-A_2a_1+A_1a_2-a_3)x^3+\cdots,$$

also, da hier die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x wegen der Gleichung (1.) alle verschwinden,

$$A(x).a(x) = 1 \text{ oder } A(x) = \frac{1}{a(x)}.$$

Es ist daher die zu bestimmende Determinante

$$A_n = \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\partial_x^n\left(\frac{1}{a(x)}\right)_0.$$

Sodann geben die beiden Determinanten

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ a_2, & b_1, & 1, & 0, & \dots \\ a_3, & b_2, & a_1, & 1, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_{n-1}, & a_{n-2}, & \dots & \dots \end{vmatrix} \text{ und } B_n = \begin{vmatrix} b_1, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ b_2, & a_1, & 1, & 0, & \dots \\ b_3, & a_2, & b_1, & 1, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n, & a_{n-1}, & b_{n-2}, & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

welche alternirend mit a_1 und b_1 schliessen, durch Entwicklung

$$(2.)\quad \begin{cases} A_n = a_1B_{n-1}-a_2A_{n-2}+a_3B_{n-3}-\cdots\pm a_n \\ B_n = b_1A_{n-1}-b_2B_{n-2}+b_3A_{n-3}-\cdots\pm b_n. \end{cases}$$

Bildet man ferner die Reihen

$$\begin{aligned} a(x) &= 1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \\ b(x) &= 1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A(x) &= 1-B_1x+A_2x^2-B_3x^3+A_4x^4-\cdots \\ B(x) &= 1-A_1x+B_2x^2-A_3x^3+B_4x^4-\cdots, \end{aligned}$$

so ist einmal

$$A_{2n} = \frac{\partial_x^{2n}A(x)_0}{(2n)!},\qquad A_{2n+1} = -\frac{\partial_x^{2n+1}B(x)_0}{(2n+1)!}.$$

Dann erhält man durch Multiplication:

$$\begin{aligned} A(x).a(x) &= 1-(B_1-a_1)x+(A_2-a_1B_1+a_2)x^2-(B_3-a_1A_2+a_2B_1-a_3)x^3+\cdots \\ A(x).b(x) &= 1-(B_1-b_1)x+(A_2-b_1B_1+b_2)x^2-(B_3-b_1A_2+b_2B_1-b_3)x^3+\cdots \\ B(x).a(x) &= 1-(A_1-a_1)x+(B_2-a_1A_1+a_2)x^2-(A_3-a_1B_2+a_2A_1-a_3)x^3+\cdots \\ B(x).b(x) &= 1-(A_1-b_1)x+(B_2-b_1A_1+b_2)x^2-(A_3-b_1B_2+b_2A_1-b_3)x^3+\cdots, \end{aligned}$$

welche Gleichungen sich mit Beachtungen der Relationen (2.) reduziren auf

$$A(x).a(x) = 1-(B_1-a_1)x-(B_3-a_1A_2+a_2B_1-a_3)x^3-\cdots$$
$$A(x).b(x) = 1+(A_2-b_1B_1+b_2)x^2+(A_4-b_1B_3+b_2A_2-b_3B_1+b_4)x^4+\cdots$$
$$B(x).a(x) = 1+(B_2-a_1A_1+a_2)x^2+(B_4-a_1A_3+a_2B_2-a_3A_1+a_4)x^4+\cdots$$
$$B(x).b(x) = 1-(A_1-b_1)x-(A_3-b_1B_2+b_2A_1-b_3)x^3-\cdots.$$

Hieraus ergeben sich leicht die Gleichungen

$$A(x).a(x)+A(-x).a(-x) = 2,$$
$$A(x).b(x)-A(-x).b(-x) = 0,$$
$$B(x).a(x)-B(-x).a(-x) = 0,$$
$$B(x).b(x)+B(-x).b(-x) = 2,$$

deren Auflösung

$$A(x) = \begin{vmatrix} 2, & a(-x) \\ 0, & -b(-x) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a(x), & a(-x) \\ b(x), & -b(-x) \end{vmatrix},$$

$$B(x) = \begin{vmatrix} 2, & b(-x) \\ 0, & -a(-x) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b(x), & b(-x) \\ a(x), & -a(-x) \end{vmatrix}$$

oder nach kurzer Reduction

$$A(x):B(x):1 = -2b(-x):-2a(-x):\begin{vmatrix} a(x), & a(-x) \\ b(x), & -b(-x) \end{vmatrix}$$

liefert, wo der dem $A(x)$ und $B(x)$ gemeinschaftliche Nenner leicht als Function von x^2 zu erkennen ist.

Sei dann weiter

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ a_2, & b_1, & 1, & 0, & \ldots\ldots \\ a_3, & b_2, & c_1, & 1, & \ldots\ldots \\ a_4, & b_3, & c_2, & a_1, & 1, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_{n-1}, & \ldots\ldots \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} b_1, & 1, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ b_2, & c_1, & 1, & 0, & \ldots\ldots \\ b_3, & c_2, & a_1, & 1, & \ldots\ldots \\ b_4, & c_3, & a_2, & b_1, & 1, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n, & c_{n-1}, & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

$$C_n = \begin{vmatrix} c_1, & 1, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ c_2, & a_1, & 1, & 0, & \ldots\ldots \\ c_3, & a_2, & b_1, & 1, & \ldots\ldots \\ c_4, & a_3, & b_2, & c_1, & 1, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n, & a_{n-1}, & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

woraus

$$(3.)\quad \begin{cases} A_n = a_1 B_{n-1} - a_2 C_{n-2} + a_3 A_{n-3} - a_4 B_{n-4} + \cdots \\ B_n = b_1 C_{n-1} - b_2 A_{n-2} + b_3 B_{n-3} - b_4 C_{n-4} + \cdots \\ C_n = c_1 A_{n-1} - c_2 B_{n-2} + c_3 C_{n-3} - c_4 A_{n-4} + \cdots; \end{cases}$$

dann

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ b(x) &= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \\ c(x) &= 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 - C_1 x + B_2 x^2 - A_3 x^3 + C_4 x^4 - \cdots \\ B(x) &= 1 - A_1 x + C_2 x^2 - B_3 x^3 + A_4 x^4 - \cdots \\ C(x) &= 1 - B_1 x + A_2 x^2 - C_3 x^3 + B_4 x^4 - \cdots. \end{aligned}$$

Hieraus wird erstlich

$$\begin{aligned} A_{3n} &= \frac{(-1)^{3n}}{(3n)!} \cdot \partial_x^{3n} A(x)_0, \\ A_{3n+1} &= \frac{(-1)^{3n+1}}{(3n+1)!} \cdot \partial_x^{3n+1} B(x)_0, \\ A_{3n+2} &= \frac{(-1)^{3n+2}}{(3n+2)!} \cdot \partial_x^{3n+2} C(x)_0. \end{aligned}$$

Ferner findet man durch Multiplication und Reduction mittelst (3.) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&A(x).a(x) = 1-(C_1-a_1)x+(B_2-a_1C_1+a_2)x^2+(C_4-a_1A_3+a_2B_2-a_3C_1+a_4)x^4-\cdots, \\
&A(x).b(x) = 1-(C_1-b_1)x-(A_3-b_1B_2+b_2C_1-b_3)x^3+(C_4-b_1A_3+b_2B_2-b_3C_1+b_4)x^4+\cdots, \\
&A(x).c(x) = 1+(B_2-c_1C_1+c_2)x^2-(A_3-c_1B_2+c_2C_1-c_3)x^3-(B_5-\cdots)x^5+\cdots, \\
&B(x).a(x) = 1+(C_2-a_1A_1+a_2)x^2-(B_3-a_1C_2+a_2A_1-a_3)x^3-(C_5-\cdots)x^5+\cdots, \\
&B(x).b(x) = 1-(A_1-b_1)x+(C_2-b_1A_1+b_2)x^2+(A_4-\cdots)x^4-\cdots, \\
&B(x).c(x) = 1-(A_1-c_1)x-(B_3-c_1C_2+c_2A_1-c_3)x^3+\cdots, \\
&C(x).a(x) = 1-(B_1-a_1)x-(C_3-a_1A_2+a_2B_1-a_3)x^3+\cdots, \\
&C(x).b(x) = 1+(A_2-b_1B_1+b_2)x^2-(C_3-b_1A_2+b_2B_1-b_3)x^3-\cdots, \\
&C(x).c(x) = 1-(B_1-c_1)x+(A_2-c_1B_1+c_2)x^2+(B_4-\cdots)x^4-\cdots,
\end{aligned}$$

und aus diesen, wenn ϱ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3-1=0$ bedeutet,

$$\begin{aligned}
A(x).a(x)+A(\varrho x).a(\varrho x)+A(\varrho^2 x).a(\varrho^2 x) &= 3, \\
A(x).b(x)+\varrho.A(\varrho x).b(\varrho x)+\varrho^2.A(\varrho^2 x).b(\varrho^2 x) &= 0, \\
A(x).c(x)+\varrho^2.A(\varrho x).c(\varrho x)+\varrho.A(\varrho^2 x).c(\varrho^2 x) &= 0, \\
B(x).b(x)+B(\varrho x).b(\varrho x)+B(\varrho^2 x).b(\varrho^2 x) &= 3, \\
B(x).c(x)+\varrho.B(\varrho x).c(\varrho x)+\varrho^2.B(\varrho^2 x).c(\varrho^2 x) &= 0, \\
B(x).a(x)+\varrho^2.B(\varrho x).a(\varrho x)+\varrho.B(\varrho^2 x).a(\varrho^2 x) &= 0, \\
C(x).c(x)+C(\varrho x).c(\varrho x)+C(\varrho^2 x).c(\varrho^2 x) &= 3, \\
C(x).a(x)+\varrho.C(\varrho x).a(\varrho x)+\varrho^2.C(\varrho^2 x).a(\varrho^2 x) &= 0, \\
C(x).b(x)+\varrho^2.C(\varrho x).b(\varrho x)+\varrho.C(\varrho^2 x).b(\varrho^2 x) &= 0.
\end{aligned}$$

Löst man diese Gleichungen nach $A(x)$, $B(x)$ und $C(x)$ auf und beachtet, dass sich durch die wegen $\varrho^3=1$ zulässige Multiplication der zweiten und dritten Vertikalreihe der Nenner der Werthe von $B(x)$ und $C(x)$ mit ϱ und ϱ^2, oder mit ϱ^2 und ϱ dieselbe Function von x^3 ergiebt, welche den Nenner von $A(x)$ bildet, so erhält man

$$A(x):B(x):C(x):1 =$$
$$3\begin{vmatrix} \varrho.b(\varrho x), & \varrho^2.b(\varrho^2x) \\ \varrho^2.c(\varrho x), & \varrho.c(\varrho^2x) \end{vmatrix} : 3\begin{vmatrix} \varrho.c(\varrho x), & \varrho^2.c(\varrho^2x) \\ \varrho^2.a(\varrho x), & \varrho.a(\varrho^2x) \end{vmatrix} : 3\begin{vmatrix} \varrho.a(\varrho x), & \varrho^2.a(\varrho^2x) \\ \varrho^2.b(\varrho x), & \varrho.b(\varrho^2x) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a(x), & a(\varrho x), & a(\varrho^2x) \\ b(x), & \varrho.b(\varrho x), & \varrho^2.b(\varrho^2x) \\ c(x), & \varrho^2.c(\varrho x), & \varrho.c(\varrho^2x) \end{vmatrix}.$$

Nimmt man nun endlich allgemein mit den Zahlen oberhalb A und a als Zeigern

$$A_n^i = \begin{vmatrix} a_1^i, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ a_2^i, & a_1^{i+1}, & 1, & 0, & \dots \\ . & . & . & . & . \\ a_k^i, & a_{k-1}^{i+1}, & \dots, & a_i^k, & a_{i-1}^1, & \dots, & a_1^{i-1}, & 1, & 0, & \dots \\ a_{k+1}^i, & a_k^{i+1}, & \dots, & a_{i+1}^k, & a_i^1, & \dots, & a_2^{i-1}, & a_1^i, & 1, & 0, & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n^i, & a_{n-1}^{i+1}, & \dots \end{vmatrix},$$

also auch

$$(4.)\qquad A_n^i = a_1^i A_{n-1}^{i+1} - a_2^i A_{n-2}^{i+2} - \dots \pm a_{k-i}^i A_{n-k+i}^k \mp a_{k-i+1}^i A_{n-k+i-1}^1 \pm \dots,$$

ferner

$$a^i(x) = 1 + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3 + \dots$$

und

$$A^i(x) = 1 - A_1^{i-1} x + A_2^{i-2} x^2 - \dots \pm A_{i-1}^1 x^{i-1} \mp A_i^k x^i \pm A_{i+1}^{k-1} x^{i+1} \mp \dots$$

an, so ist zunächst

$$A_{kn+i-1}^1 = \frac{(-1)^{kn+i-1}}{(kn+i-1)} \partial_x^{kn+i-1} A^i(x)_0.$$

Sodann entstehen mittelst der Beziehungen (4.) für die Functionen $A(x)$ die Gleichungen:

$$A^i(x).a^i(x) + A^i(\varrho x).a^i(\varrho x) + \dots + A^i(\varrho^{k-1}x).a^i(\varrho^{k-1}x) = k,$$
$$A^i(x).a^{i+1}(x) + \varrho.A^i(\varrho x).a^{i+1}(\varrho x) + \dots + \varrho^{k-1}.A^i(\varrho^{k-1}x).a^{i+1}(\varrho^{k-1}x) = 0,$$
$$A^i(x).a^{i+2}(x) + \varrho^2.A^i(\varrho x).a^{i+2}(\varrho x) + \dots + \varrho^{2k-2}.A^i(\varrho^{k-1}x).a^{i+2}(\varrho^{k-1}x) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A^i(x).a^k(x) + \varrho^{k-i}.A^i(\varrho x).a^k(\varrho x) + \dots + \varrho^{(k-i)(k-1)}.A^i(\varrho^{k-1}x).a^k(\varrho^{k-1}x) = 0,$$
$$A^i(x).a^1(x) + \varrho^{k-i+1}.A^i(\varrho x).a^1(\varrho x) + \dots + \varrho^{(k-i+1)(k-1)}.A^i(\varrho^{k-1}x).a^1(\varrho^{k-1}x) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

wo ϱ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^k - 1 = 0$ vorstellt.

Durch Auflösung erhält man schliesslich:

$$A^i(x) =$$

$$k.\begin{vmatrix} \varrho . a^{i+1}(\varrho x), & \varrho^2 . a^{i+1}(\varrho^2 x), & \dots \\ \varrho^2 . a^{i+2}(\varrho x), & \varrho^4 . a^{i+2}(\varrho^2 x), & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho^{k-1} . a^{i-1}(\varrho x), & \varrho^{2k-2} . a^{i-1}(\varrho^2 x), & \dots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a^1(x), & a^1(\varrho x), & \dots, a^1(\varrho^{k-1} x) \\ a^2(x), & \varrho . a^2(\varrho x), & \dots, \varrho^{k-1} . a^2(\varrho^{k-1} x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^k(x), & \varrho^{k-1} . a^k(\varrho x), & \dots, \varrho^{(k-1)^2} . a^k(\varrho^{k-1} x) \end{vmatrix}.$$

Auch hier zeigt sich der Nenner, der durch die Substitution von $\varrho^m x$ für x im Werthe unverändert bleibt, als eine rationale Function von x^k.

Das Vorstehende giebt zugleich die Auflösung des durch (4.) angezeigten zusammengesetzten Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}
&A_1^1 - a_1^1 = 0,\\
&A_2^1 - a_1^1 A_1^2 + a_2^1 = 0,\\
&A_3^1 - a_1^1 A_2^2 + a_2^1 A_1^3 - a_3^1 = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&A_n^1 - a_1^1 A_{n-1}^2 + \cdots \pm a_{k-1}^1 A_{n-k+1}^k \mp a_k^1 A_{n-k}^1 \pm \cdots \pm a_n^1 = 0.\\
&A_1^2 - a_1^2 = 0,\\
&A_2^2 - a_1^2 A_1^3 + a_2^2 = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&A_n^2 - a_1^2 A_{n-1}^3 + \cdots \mp a_{k-2}^2 A_{n-k+2}^k \pm a_{k-1}^2 A_{n-k+1}^1 \mp \cdots \pm a_n^2 = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&A_1^k - a_1^k = 0,\\
&A_2^k - a_1^k A_1^1 + a_2^k = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&A_n^k - a_1^k A_{n-1}^1 + \cdots \mp a_k^k A_{n-k}^k \pm a_{k+1}^k A_{n-k-1}^1 \pm \cdots \pm a_n^k = 0.
\end{aligned}$$

Regensburg, im April 1868.

Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades.

(Von Herrn *Geiser* in Zürich.)

I.

Durch Rotation eines Kegelschnittes um seine Hauptaxe entsteht eine Fläche zweiten Grades, welche im eigentlichen Sinne des Wortes zwei Brennpunkte besitzt und deshalb einer elementaren Behandlung zugänglich ist, die sich nicht auf andere Flächen zweiten Grades ausdehnen lässt. Man überzeugt sich in der That leicht, dass die Methoden, welche in dem ersten Bande von *Jacob Steiners* „Vorlesungen über synthetische Geometrie" auseinandergesetzt sind, sich sofort auf die charakterisirten Rotationsflächen ausdehnen lassen. Resultate, welche an diese Methode anknüpfen, sollen in der vorliegenden Abhandlung zunächst abgeleitet werden und weitergehenden Untersuchungen zur Einleitung dienen. —

Für die Brennpunkte einer Rotationsfläche der bezeichneten Art*) gilt der Satz: Fällt man von einem Brennpunkte aus Perpendikel auf sämmtliche Tangentialebenen der Fläche und verlängert jedes dieser Perpendikel um sich selbst, so liegen die erhaltenen Endpunkte (die Gegenpunkte des Brennpunktes in Bezug auf die Tangentialebenen) auf einer Kugel, welche den andern Brennpunkt zum Mittelpunkt und die Hauptaxe der Fläche (die gleichbedeutend mit der Hauptaxe des erzeugenden Kegelschnittes ist) zum Radius hat. Sind also von der Fläche ein Brennpunkt und eine Tangentialebene gegeben, so muss der zweite Brennpunkt der Mittelpunkt einer Kugel sein, welche durch den Gegenpunkt des ersten Brennpunktes in Bezug auf die Tangentialebene geht, und die zudem die Hauptaxe der Fläche zum Radius hat.

Man nehme ausser dem einen Brennpunkt B zwei Tangentialebenen T_1 und T_2 an; der zweite Brennpunkt A ist dann der Mittelpunkt einer Kugel,

*) Es giebt offenbar zwei verschiedene Arten von Rotationsflächen zweiten Grades, die sich dadurch unterscheiden, dass bei der einen die beiden Brennpunkte reell, bei der anderen imaginär sind. Wir haben es hier zunächst mit denen der ersten Art zu thun; bei denjenigen Fragen aber, welche im Grunde algebraischer Natur sind, werden die Flächen der zweiten Art nicht von der Betrachtung ausgeschlossen werden können.

welche die Gegenpunkte B_1 und B_2 von B in Bezug auf T_1 und T_2 enthält; er liegt also in der Ebene E, welche man in der Mitte der Strecke $B_1 B_2$ senkrecht auf diese Gerade errichten kann. Diese Ebene E geht auch durch die Durchschnittsgerade g von T_1 und T_2; in der That steht g senkrecht auf der Ebene BB_1B_2 und der Durchschnitt s von g mit dieser Ebene ist zugleich der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch BB_1B_2 gelegt werden kann, womit die Behauptung erwiesen ist. Es ergiebt sich ferner: die Ebene, in welcher A liegt, und die Ebene, welche durch B und g bestimmt ist, sind symmetrisch zu T_1 und T_2, d. h. bilden mit diesen Ebenen gleiche Winkel, ein Satz, dessen Beweis in der Ebene BB_1B_2 geführt wird. Man schneidet die vier Ebenen (T_1, T_2, die Ebene der A und die Ebene gB), welche g enthalten, durch die zu g senkrechte Ebene BB_1B_2; man hat dann in dieser Ebene vier durch s gehende Geraden st_1, st_2, sb, sa, deren Ursprung durch die Bezeichnung angedeutet ist. Jetzt ist $\angle ast_1 = BB_1B_2 = \frac{1}{2}B_2sB = Bst_2$, w. z. b. w. Damit ist auch der nachfolgende Satz evident: Legt man von der Durchschnittsgeraden zweier Tangentialebenen T_1 und T_2 einer Rotationsfläche zweiten Grades aus Ebenen durch die Brennpunkte A und B derselben, so sind diese Ebenen zugeordnet harmonisch zu den Halbirungsebenen der Winkel, welche T_1 und T_2 bilden. Oder auch: Sind von einer der bezeichneten Flächen ein Brennpunkt B und zwei Tangentialebenen gegeben, so liegt der zweite Brennpunkt A auf der Polarebene des Punktes B in Bezug auf diejenige Fläche zweiten Grades, welche aus den winkelhalbirenden Ebenen von T_1 und T_2 besteht.

II.

Da nur eine einzige Kugel durch vier von einander unabhängige Punkte im Raume gelegt werden kann, so lässt sich schliessen, dass im Allgemeinen eine Rotationsfläche zweiten Grades durch einen Brennpunkt und vier Tangentialebenen vollständig bestimmt ist; der zweite Brennpunkt ist dann der Mittelpunkt derjenigen Kugel, welche durch die Gegenpunkte des gegebenen Brennpunktes in Bezug auf die vier Tangentialebenen geht. Man kann aber nach dem gefundenen Satze sagen: Legt man durch den gegebenen Brennpunkt und die Kanten des Tetraeders, welches von den Tangentialebenen gebildet wird, Ebenen und sucht zu jeder derselben eine durch die nämliche Kante gehende, mit ihr symmetrisch zu den beiden in der Kante zusammenstossenden Tetraederflächen gelegene neue Ebene, so werden die sechs auf

diesem Wege erhaltenen Ebenen sich in dem gesuchten zweiten Brennpunkte der Fläche schneiden. Oder auch: Jede Kante des Tetraeders giebt zu einer Fläche zweiten Grades Veranlassung, die aus den winkelhalbirenden Ebenen derjenigen Tetraederflächen besteht, welche sich in ihr schneiden; sucht man nun zu dem gegebenen Brennpunkte die Polarebenen nach diesen sechs Flächen zweiten Grades, so treffen sich dieselben in dem gesuchten zweiten Brennpunkte. Die sechs erwähnten Flächen zweiten Grades haben die Mittelpunkte der acht Kugeln gemein, welche dem Tetraeder eingeschrieben werden können; diese acht Punkte liegen so, dass jede Fläche zweiten Grades, welche sieben von ihnen enthält, auch durch den achten geht. Also kann man folgende neue Form des Satzes aufstellen: Die beiden Brennpunkte einer Rotationsfläche zweiten Grades, welche die vier Ebenen eines Tetraeders berührt, sind conjugirte harmonische Pole in Bezug auf das Bündel der Flächen zweiten Grades, welches durch die acht Mittelpunkte der dem Tetraeder einschreibbaren Kugeln bestimmt wird. Dieses Flächenbündel ist zudem von der besondern Art, dass alle ihm zugehörigen Flächen das Tetraeder zum gemeinsamen Quadrupel haben.

III.

Im Allgemeinen ist also eine Rotationsfläche zweiten Grades durch vier Tangentialebenen und einen Brennpunkt vollkommen eindeutig bestimmt, so dass zu einem ersten Brennpunkt im Allgemeinen stets ein, aber auch nur ein zweiter Brennpunkt gehört. Eine Ausnahme hiervon machen die Ecken des Fundamentaltetraeders, denn zu einer Ecke gehört als zweiter Brennpunkt jeder beliebige Punkt der gegenüberliegenden Seitenfläche; ebenso findet man, dass zu einem beliebigen Punkte, der auf einer Kante des Tetraeders liegt, alle Punkte der gegenüberliegenden Kante gehören. Man kann nämlich ein begrenztes Stück einer Geraden stets als eine Rotationsfläche zweiten Grades auffassen, deren Brennpunkte die Endpunkte der Geraden sind, und deren Tangentialebenen aus den beiden Ebenenbündeln bestehen, welche diese Endpunkte zu Mittelpunkten haben. Wenn also der erste Brennpunkt eine Ebene durchläuft, so ist der Ort des zweiten eine Fläche, auf welcher die sechs Tetraederkanten liegen, die also die vier Tetraederecken zu Doppelpunkten hat, und wenn der erste Brennpunkt sich auf einer Geraden bewegt, von der vorausgesetzt wird, dass sie nicht eine der Ecken enthalte, so beschreibt der zweite Brennpunkt eine Curve, welche die vier Tetraederecken enthält. Man kann aus speciellen Fällen leicht schliessen, dass die Curve und die Fläche

beide vom dritten Grade sind; der Nachweis, dass dies wirklich der Fall ist, wird unter Anwendung des Schlusssatzes in II. geführt, indem dann die vermutheten Sätze sich als specielle Fälle von allgemeineren darstellen, deren Erörterung von Herrn *Hesse* *), von *Steiner* **), vom Verfasser †) und von Herrn *Sturm* ††) gegeben worden ist.

Es ergiebt sich also: 1) Wenn der erste Brennpunkt einer Rotationsfläche zweiten Grades, welche die vier Seitenflächen eines Tetraeders berührt, sich auf einer, keine der Tetraederecken enthaltenden Geraden bewegt, so beschreibt der zweite Brennpunkt eine Raumcurve dritten Grades, welche durch die vier Tetraederecken hindurchgeht. 2) Beschreibt der erste Brennpunkt eine Ebene, so ist der Ort des zweiten eine Fläche dritten Grades, welche die sechs Kanten des Tetraeders enthält, und welche die Ecken desselben zu Doppelpunkten hat. Auf der Fläche können leicht 28 Punkte angegeben werden. Die 28 Verbindungsgeraden der 8 Grundpunkte des Flächenbündels zweiten Grades, für welches die Punkte der Ebene E des ersten Brennpunkts und die Punkte der Fläche dritten Grades F_3 des zweiten Brennpunkts conjugirte harmonische Pole sind, schneiden E in 28 Punkten, und zu jedem derselben kann man auf der ihn erzeugenden Verbindungsgeraden sofort den conjugirten construiren.

Die einer Ebene E entsprechende Fläche dritten Grades F_3 enthält ausser den Tetraederkanten noch drei Gerade, die wie folgt gefunden werden: Die Ebene E schneidet das Tetraeder in einem vollständigen Vierseit, von dessen Diagonalen jede (nach unserer Zuordnung der Brennpunkte) eine Raumcurve dritten Grades ergeben muss, die ihrer ganzen Ausdehnung nach auf F_3 liegt. Jede dieser Raumcurven aber zerfällt in drei Gerade, von denen zwei diejenigen Tetraederkanten sind, welche die zugehörige Diagonale treffen; je die dritte ist eine der gesuchten Geraden, von denen leicht nachgewiesen wird, dass sie in einer und derselben Ebene liegen. Es stossen in jeder Kante des Tetraeders zwei Seitenflächen desselben zusammen, deren Winkelhalbirungsebenen auf der Gegenkante zwei Punkte ausschneiden, so dass auf diese Weise auf jeder Tetraederkante zwei Punkte entstehen, welche von E

---

*) „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung" Bd. 49 dieses Journ.

**) „Ueber die Flächen dritten Grades" Bd. 53 dieses Journ.

†) „Einige geometrische Betrachtungen" Zürcher Vierteljahrschrift Bd. X.

††) S. dessen Werk: „Synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung" pag. 28 etc.

unabhängig sind. Sucht man jetzt auf jeder Tetraederkante zu deren Durchschnittspunkt mit E und den beiden vorhin bestimmten Punkten den vierten harmonischen, dem ersteren zugeordneten Punkt, so liegen die sechs neuen Punkte in einer Ebene E' als die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonalen sich auf F_3 befinden. Die Ebenen E und E' sind offenbar reciprok, d. h. die F_3', welche E' entspricht, enthält drei Gerade, welche in der genannten Weise in E liegen.

Eine Raumcurve dritten Grades, die durch vier feste Punkte gehen soll, ist durch zwei weitere Punkte bestimmt, und von einer Fläche dritten Grades, welche die Ecken eines gegebenen Tetraeders als Doppelpunkte enthält, können im Allgemeinen nur noch drei weitere Punkte gewählt werden. Demzufolge entspricht in der Zuordnung der Brennpunkte auch jeder Raumcurve dritten Grades durch die Ecken des Tetraeders eine Gerade und jeder Fläche dritten Grades durch die Kanten desselben eine Ebene.

IV.

Unter allen Flächen dritten Grades, welche durch die Kanten des Tetraeders gehen, ist diejenige bemerkenswerth, welche der unendlich entfernten Ebene des Raumes entspricht, und welche demzufolge der Ort der Brennpunkte aller Rotationsparaboloide ist, welche die vier Ebenen des Tetraeders berühren. Sucht man für irgend einen Brennpunkt die sämmtlichen Gegenpunkte in Bezug auf die Tangentialebenen des zugehörigen Paraboloids, so liegen dieselben auf einer Ebene, also hat die genannte specielle Fläche dritter Ordnung die Eigenschaft, dass die vier Fusspunkte der Perpendikel, welche man von irgend einem ihrer Punkte aus auf die Tetraederebenen fällen kann, in derselben Ebene liegen.

Aus dieser Eigenschaft kann man umgekehrt die Brennpunktsfläche der Paraboloide herleiten, indem man einen bekannten Satz aus der Theorie der Fusspunktenflächen zu Hülfe zieht. Werden von allen Punkten des Raumes aus die Fusspunktenflächen in Bezug auf eine gegebene Fläche bestimmt und ihre Volumina berechnet, so findet sich, dass diejenigen Punkte, welche gleiche Volumina der zugehörigen Fusspunktenfläche ergeben, auf einer Fläche dritten Grades sich befinden. Als Fusspunktenfläche für ein gegebenes Tetraeder in Bezug auf einen gegebenen Punkt kann man aber dasjenige neue Tetraeder bezeichnen, welches durch die vier Fusspunkte der Perpendikel gebildet wird, welche von dem angenommenen Punkte aus auf die Seitenflächen des ursprüng-

lichen Tetraeders möglich sind. Soll der Inhalt des Fusspunktentetraeders constant und zwar gleich Null sein, so liegen seine vier Ecken in einer Ebene und umgekehrt. Dies giebt in der That den Satz, dass die Brennpunkte aller Rotationsparaboloide, welche vier gegebene Ebenen berühren, in einer Fläche dritten Grades liegen.

Auf dieser Fläche dritten Grades befinden sich die Mitten der Strecken, welche die Mittelpunkte der acht, dem Tetraeder einschreibbaren Kugeln verbinden, was aus einem in III. angegebenen allgemeinen Satze sofort folgt.

Mit der Fläche der Brennpunkte aller Rotationsparaboloide, welche vier feste Tangentialebenen gemein haben, hängt eine andere Fläche zusammen, die von den sämmtlichen Leitebenen umhüllt wird, welche diese Rotationsparaboloide zulassen. Diese Leitebenen sind die Ebenen, welche erhalten werden, wenn man von jedem Punkte der Brennpunktsfläche aus je vier Perpendikel auf die Seitenflächen des Fundamentaltetraeders fällt und durch deren Fusspunkte eine Ebene legt. Man erkennt sofort, dass jede Ebene, welche eine der vier Höhen des Tetraeders enthält, eine solche Leitebene, d. h. Tangentialebene unserer Fläche ist, ebenso wird jede Seitenfläche des Tetraeders eine Tangentialebene derselben sein. Da nun durch eine Kante des Tetraeders vier Tangentialebenen der gesuchten Fläche gehen (nämlich zwei Seitenflächen des Tetraeders und zwei Ebenen, welche die Kante und je eine der beiden, dieselbe schneidenden Höhen enthalten), aber ausser diesen keine andern, so muss die Fläche von vierter Klasse sein. Man hätte auf diese Klasse auch wie folgt schliessen können: Die vier Höhen eines Tetraeders sind vier Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloids, es giebt also unendlich viele Gerade, welche alle vier Höhen gleichzeitig schneiden, durch irgend eine dieser Geraden und die vier Höhen lassen sich also vier Tangentialebenen an die Fläche legen, welche demnach vierter Klasse ist.

V.

Aus dem Bisherigen folgt, dass nicht jeder beliebige Punkt des Raumes als Brennpunkt einer Rotationsfläche zweiten Grades gewählt werden kann, die fünf gegebene Ebenen berührt. Es ist also die Frage zu lösen: Welches ist der Ort der Brennpunkte aller Flächen der genannten Art, welche fünf gegebene gemeinsame Tangentialebenen haben? — Da, wie früher erwähnt, eine begrenzte Gerade stets als Rotationsfläche zweiten Grades aufgefasst werden kann, deren Brennpunkte zugleich die Endpunkte der begrenzten Strecke

sind, und da ferner die sämmtlichen Tangentialebenen dieser speciellen Fläche die beiden Ebenenbündel durch die Endpunkte sind, so ergiebt sich, dass auf der gesuchten Fläche der Brennpunkte die zehn Gerade liegen, in denen die gegebenen fünf Ebenen zu je zweien sich schneiden. In der That erkennt man, dass jede Ecke des Pentaeders als erster Brennpunkt einer Rotationsfläche zweiten Grades aufgefasst werden kann, deren zweiter Brennpunkt irgend ein Punkt der gegenüberliegenden Kante ist. Eine Pentaederebene enthält also vier Geraden der gesuchten Fläche, diese ist demnach mindestens vom vierten Grade.

Dass der Grad nicht höher ist, ergiebt sich aus nachfolgenden Schlüssen:

Um die Anzahl derjenigen Punkte der Fläche zu finden, welche auf einer gegebenen Geraden g liegen, lassen wir das erste Mal von den fünf Pentaederebenen 1, 2, 3, 4, 5 die Ebene 5, das zweite Mal die Ebene 4 weg. Es entstehen dann zwei Tetraeder, 1234 und 1235, von denen jedes als der Ort der entsprechenden Punkte für g eine Raumcurve dritten Grades ergiebt. Diese beiden Raumcurven, die im allgemeinen irreductibel sein werden, haben höchstens fünf Punkte gemein, von denen der eine, der Durchschnittspunkt der Ebenen 1, 2, 3, als nicht von allen auftretenden Elementen abhängig, der unwesentliche Schnitt ist. Der wesentliche Schnitt besteht aus höchstens vier Punkten, welchen also höchstens vier Schnittpunkte der Geraden g mit der Fläche entsprechen. Demzufolge gilt der Satz: Die Brennpunkte aller möglichen Rotationsflächen zweiten Grades, welche fünf gegebene Ebenen berühren, liegen auf einer Fläche vierten Grades, welche die zehn Kanten des Pentaeders enthält und dessen zehn Ecken zu Doppelpunkten hat *).

Es mag noch die Frage erledigt werden: Welches ist der Ort der Brennpunkte der sämmtlichen Rotationsflächen zweiten Grades, welche sechs gegebene Ebenen berühren? — Zunächst ist klar, dass die zwanzig Punkte, in welchen je drei der Ebenen sich schneiden, der gesuchten Curve angehören. Es seien nun die Ebenen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben, dann bilde man die Pentaeder 12345 und 12346. In jedem derselben für sich betrachtet ist die Brennpunktsfläche vom vierten Grade, die beiden schneiden sich also in einer Raumcurve sechzehnten Grades, von welcher der zu findende Ort einen Theil bilden muss. In der That treffen sich die erwähnten Brennpunktsflächen vorerst in den sechs Kanten des Tetraeders 1234, die als unwesentlicher Schnitt

*) Man bemerkt die Analogie dieser Fläche mit der namentlich durch *Steiners* Untersuchungen bekannt gewordenen Kernfläche einer Fläche dritter Ordnung.

auftreten. Es bleibt jetzt als wesentlicher Schnitt der gesuchte Ort übrig, der somit eine Raumcurve zehnten Grades ist, die von jeder der fünfzehn Kanten, in welchen sich die gegebenen sechs Ebenen zu je zweien schneiden, in vier Punkten getroffen wird.

Schliesslich soll noch auf das bekannte Resultat hingewiesen werden, dass es vier Rotationsflächen zweiten Grades giebt, welche sieben gegebene Ebenen berühren. —

Schwieriger ist die Erledigung derjenigen analogen Aufgaben, welche an Stelle der Tangentialebenen Punkte setzen, so dass also Brennpunkte und Punkte als bestimmende Elemente der Rotationsflächen zweiten Grades auftreten. Die entsprechenden ebenen Probleme hat der Verfasser bereits anderswo behandelt*).

VI.

Die im Vorhergehenden für die Rotationsflächen zweiten Grades erhaltenen Resultate beruhen wesentlich auf den bekannten Theoremen über die conjugirten harmonischen Pole in Bezug auf ein Flächenbündel zweiten Grades. Die wenigen aus dieser Theorie nöthigen Sätze sind nicht bewiesen, sondern der in II. angegebenen Literatur entnommen worden, auf welche hier noch einmal aufmerksam gemacht werden mag. Die nachfolgenden Betrachtungen befassen sich nun näher mit der genannten Theorie und legen der Untersuchung ein vollkommen allgemeines Flächenbündel zweiten Grades zu Grunde. In Bezug auf ein solches entspricht jedem Punkte p im Allgemeinen stets ein, aber auch nur ein conjugirter harmonischer Pol p', welcher der Durchschnitt der sämmtlichen Polarebenen von p nach den Flächen des Bündels ist. Die Ausnahmen beschränken sich auf die Punkte einer irreductiblen Raumcurve sechsten Grades C_6 (des Ortes der Mittelpunkte der im Bündel enthaltenen Kegel), welche die Eigenschaft haben, dass jedem von ihnen nicht nur ein Pol zugehört, sondern unendlich viele Pole entsprechen, d. h. die Polarebenen eines solchen Punktes nach den sämmtlichen Flächen des Bündels schneiden sich in einer Geraden. Wenn p auf einer Geraden G sich bewegt, so durchläuft p' eine Raumcurve dritten Grades C_3, welche C_6 in acht Punkten

*) In seiner Inauguraldissertation: „Beiträge zur synthetischen Geometrie".

trifft, und wenn p irgend eine Ebene E beschreibt, so ist der Ort von p' eine Fläche dritten Grades F_3, auf welcher die C_6 ihrer ganzen Ausdehnung nach liegt. Die C_6 liegt auf keiner Fläche zweiten Grades, sondern sie ist theilweiser Durchschnitt zweier Flächen dritten Grades, die ausser ihr noch eine Raumcurve dritten Grades gemein haben.

Die Frage nach dem Ort der Geraden, welche den sämmtlichen Punkten der C_6 entsprechen, erledigt sich wie folgt. Da die drei Polarebenen eines Punktes p der C_6 in Bezug auf drei nicht demselben Büschel des Bündels angehörigen Flächen zweiten Grades sich in einer Geraden schneiden, so kann diese im Allgemeinen gefunden werden, indem man einfach den Durchschnitt der Polarebenen von p nach zweien dieser Flächen construirt. Hiebei tritt aber eine Ausnahme ein, denn das Quadrupel dieser beiden Flächen liegt auf C_6, und jeder seiner Punkte hat die Eigenschaft, dass für ihn die Polarebenen zusammenfallen. Die Polarebene eines Quadrupelpunktes nach der dritten der herausgegriffenen drei Flächen schneidet aber (wenigstens wenn das Flächenbündel allgemein ist) je eine dieser doppelten Polarebenen nur in einer Geraden und fällt nicht mit ihr zusammen. Wenn also die Aufgabe gelöst wird: „Ein Punkt beschreibt eine Raumcurve sechsten Grades, welches ist der Grad der Fläche, welche von der Durchschnittsgeraden der beiden Polarebenen jedes ihrer Punkte nach zwei Flächen zweiten Grades erzeugt wird?“ — so wird der gefundene Grad (wegen der vier vorhin erwähnten Quadrupelebenen) um vier grösser sein als der Grad der Fläche, welche den Punkten der C_6 entspricht.

Es ist nun bekannt, dass wenn ein Punkt auf einer beliebigen Geraden g sich bewegt, dann der Durchschnitt seiner Polarebenen nach zwei festen Flächen zweiten Grades ein Hyperboloid H_2 beschreibt. Für jeden Punkt von H_2 schneiden sich die beiden Polarebenen nach den festen Flächen in einer Geraden, welche die Gerade g trifft. H_2 schneidet nun eine beliebig gegebene Raumcurve n^{ten} Grades in $2n$ Punkten, also liegen auf der Fläche, welche den Punkten dieser Raumcurve entsprechen, $2n$ Punkte, die der Geraden angehören, d. h.: Bewegt sich ein Punkt auf einer Raumcurve n^{ten} Grades, so beschreibt die jeweilige Durchschnittsgerade der Polarebenen dieses Punktes nach zwei festen Flächen zweiten Grades eine Fläche $2n^{\text{ten}}$ Grades. Damit ist nun der Satz bewiesen: diejenigen Geraden, welche als erweiterte conjugirte Pole der Kegelmittelpunktscurve eines Flächenbündels zweiten Grades aufgefasst werden können, bilden eine geradlinige Fläche achten Grades.

Man hätte dieses Resultat noch auf anderem Wege ableiten können. Der

Ort der conjugirten Pole aller Punkte einer Fläche n^{ten} Grades in Bezug auf das vorgelegte Flächenbündel bestimmt sich leicht als eine Fläche $3n^{ten}$ Grades. Einer Ebene e entspricht eine Fläche dritten Grades f_3, der nach dem eben ausgesprochenen Satze eine Fläche neunten Grades entsprechen muss. Diese aber zerfällt in e und die Fläche, welche den Punkten der C_6 entspricht, demzufolge gehört zu den Punkten der C_6 eine geradlinige Fläche achten Grades f_8, wie bereits gefunden worden.

Der schon oben erwähnte Satz, dass die einer Geraden g entsprechende Raumcurve dritten Grades die C_6 in acht Punkten trifft, ergiebt sich durch diese Betrachtung von selbst, da g mit der f_8 in der That acht Punkte gemein hat, deren entsprechende auf C_6 liegen.

VII.

Durch die Theorie der conjugirten harmonischen Pole in Bezug auf ein Flächenbündel zweiten Grades wird die Abbildung der Fläche dritten Grades auf eine Ebene in der allereinfachsten Weise bewerkstelligt, und zwar folgen daraus mit Leichtigkeit die Resultate, welche Herr *Clebsch* *) mit Zugrundlegung der *Grassmann*schen Erzeugungsart der Flächen dritten Grades (von welcher die hier eingeschlagene vierte *Steiner*sche Erzeugungsart ein specieller Fall ist) abgeleitet hat.

Die Ebene E und die Fläche dritten Grades F_3, welche der Ort der conjugirten harmonischen Pole zu allen Punkten von E in Bezug auf das Bündel ist, entsprechen sich im Allgemeinen Punkt für Punkt, und zwar so, dass ohne Ausnahme zu jedem Punkte von F_3 ein, aber nur ein Punkt auf E gehört, während zwar im Allgemeinen zu jedem Punkte von E ein Punkt in F_3 gehört, aber mit Ausnahmen. Die C_6 schneidet nämlich E in sechs Punkten $s_1, \dots s_6$, und jedem derselben entspricht eine Gerade, die ganz auf F_3 sich befindet. Diese Geraden werden mit $G_1, \dots G_6$ bezeichnet, so dass dem Punkte s_λ die Gerade G_λ entspricht. Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass wenn E eine ganz willkürliche Lage gegenüber dem Bündel hat und auch dieser ganz allgemein gewählt ist, dann weder die sechs Punkte s auf einem Kegelschnitte, noch irgend drei von ihnen auf einer Geraden liegen können.

Lägen die Punkte s für jede beliebige Ebene E auf einem Kegelschnitte,

*) „Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung". Bd. 65 dieses Journ. pag. 359.

so müsste die C_6 auf einer Fläche zweiten Grades sich befinden. Wird nun eine beliebige Gerade angenommen, die keinen Punkt von C_6 enthält, so entspricht derselben, wie leicht zu beweisen, eine irreductible Raumcurve dritten Grades C_3. Durch g kann man ein Ebenenbüschel legen, und diesem entspricht ein Büschel von Flächen dritten Grades, dessen Grundcurve aus C_6+C_3 besteht. Dieses Büschel wird von E in einem Curvenbüschel dritten Grades geschnitten, dessen Grundpunkte aus den Punkten s und aus den Schnittpunkten der C_3 mit E bestehen. Da nun die letztern drei nicht in einer Geraden liegen, so können die sechs ersteren sich nicht auf einem und demselben Kegelschnitte befinden.

Es liegen auch keine drei der s in gerader Linie. Wäre dies der Fall, so müsste C_6 in eine Raumcurve dritten Grades C_3 und eine ebene Curve dritten Grades C_3' zerfallen. Sei e die Ebene dieser letzteren, so wird e das Flächenbündel in einem Kegelschnittnetze treffen, für welches C_3' die Tripelcurve ist. Da nun die Tripelcurve des Kegelschnittnetzes einen Theil der Quadrupelcurve (welche identisch mit der Kegelmittelpunktscurve ist) des Flächenbündels bildet, so lässt sich daraus schliessen, dass e in Bezug auf alle Flächen des Bündels denselben Pol erzeugt, was bei einem allgemeinen Bündel, wie wir hier doch eines voraussetzen, nicht möglich ist.

Es soll ferner nachgewiesen werden, dass keine zwei der Geraden G sich schneiden. Nimmt man an, dass G_1 und G_2 in p sich treffen, so wird der conjugirte Pol dieses Punktes sowohl s_1 als s_2 sein müssen, d. h. die Ebene E schneidet die der C_6 entsprechende geradlinige f_8 längs einer ihrer Erzeugenden, was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird.

Schliesslich ist noch zu zeigen, dass keine vier der Geraden G Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloides H_2 sind. Wäre dies der Fall, so müsste sich die E entsprechende F_3 in H_2 und in eine Ebene e spalten. Irgend einer beliebig in E gelegenen Geraden, welche nicht durch einen der Punkte s geht, entspricht eine irreductible Raumcurve dritten Grades, welche also ihrer ganzen Ausdehnung nach in H_2 liegt, und welche nur drei Punkte mit e gemein hat. Sämmtliche Punkte in E mit Ausnahme der s haben ihre entsprechenden auf H_2, einen Theil derselben also auf dem Kegelschnitte, der H_2 und e gemein ist. Den übrigen Punkten von e entsprechen aber einzig die Punkte s, und demzufolge müsste wenigstens einer der Punkte s die Eigenschaft haben, dass seine sämmtlichen Polarebenen nach den Flächen des Bündels zusammenfallen, was beim allgemeinen Bündel ausgeschlossen ist.

VIII.

Zu jedem der Punkte s gehört eine der Geraden G, so dass also sämmtliche Punkte, die auf einer dieser Geraden liegen, ihre entsprechenden Punkte in dem der Geraden zugehörigen Punkte s vereinigen. Wenn also eine beliebige auf F_3 verzeichnete Raumcurve C_n die Gerade G_λ schneidet, so geht die ihr in E entsprechende Curve, die, wie man weiss, höchstens vom Grade $3n$ ist, durch s_λ. Wenn umgekehrt eine in E gelegene irreductible Curve C_n durch s_λ geht, so entspricht ihr auf F_3 eine C_{3n}, welche aber in eine C_{3n-1} und G_λ zerfällt, und zwar schneiden sich diese beiden Theile. Wenn nämlich die Curve C_{3n-1} keinen Punkt mit G_λ gemein hätte, so würde ihr Bild auf E eine Curve sein, die nicht durch s_λ geht; also könnte dieser Punkt nicht auf C_n liegen, wie doch vorausgesetzt worden ist. Eine Curve in E, die s_λ zum $m$fachen Punkte hat, wird auf F_3 zu einer Raumcurve $3m^{\text{ten}}$ Grades, welche $m$mal die Gerade G_λ enthält und sie ausserdem $m$mal schneidet und umgekehrt. Dies ist der wesentliche Satz, auf welchen Herr *Clebsch* in seiner bereits citirten Abhandlung die Untersuchung der auf einer Fläche dritten Grades liegenden Raumcurven gestützt hat.

Zunächst ist es leicht, die 27 Geraden zu finden; sie werden erzeugt: 1) durch die Punkte s, welche die Geraden G_λ ergeben, 2) durch die sechs Kegelschnitte, die je fünf der Punkte s enthalten (die Gerade auf F_3, deren entsprechender Kegelschnitt in E nicht durch s_λ geht, werde mit g_λ bezeichnet), 3) durch die funfzehn Geraden, die je zwei der Punkte s mit einander verbinden (die Gerade auf F_3, welche der Verbindungsgeraden von s_λ und s_μ entspricht, heisse $l_{\lambda,\mu}$). Es fällt nicht schwer, mit Hülfe dieser Sätze die bekannten gegenseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Geraden der F_3 abzuleiten, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll. Einzig sei bemerkt, dass im Allgemeinen keine drei Geraden der Fläche dritten Grades durch denselben Punkt gehen.

Es möge noch der Abbildung der Quadrupelcurve C_6 auf E erwähnt werden. Die Quadrupelcurve kann erzeugt werden als ein Theil des Durchschnittes C_6+C_3 der F_3 mit einer anderen Oberfläche f_3, welche einer Ebene e entsprechen mag. Dieser Durchschnitt bildet sich dann in E als eine Curve neunten Grades C_9 mit den s als dreifachen Punkten ab, aber so, dass C_9 zerfällt und zwar in die der C_3 entsprechende Gerade g, welche der Durchschnitt von e und E ist, und in eine Curve C_8, welche sechs dreifache Punkte enthält. Da g mit C_8 acht Punkte gemein hat, von denen keiner zu den Punkten

s gehört, so schliesst man, dass die C_3, welche einer beliebigen Geraden in E entspricht, die C_6 in acht Punkten trifft, wie bereits in VI. bewiesen worden ist.

Für einen beliebig in C_8 gewählten Punkt liegt der conjugirte Pol auf C_6, demzufolge ist die C_8 der Durchschnitt von E mit derjenigen Fläche, welche von den entsprechenden Geraden zu sämmtlichen Punkten der C_6 gebildet wird. Diese geradlinige Fläche ist also vom achten Grade; sie hat die C_6 zur dreifachen Curve und besteht aus allen denjenigen Geraden, welche die C_6 dreifach schneiden.

IX.

Die Flächen dritten Grades werden nach der Realität ihrer Geraden in Gattungen eingetheilt, deren es bekanntlich fünf giebt. Da nun die *Grassmann*sche Erzeugungsweise der genannten Flächen, von der die hier behandelte vierte *Steiner*sche ein specieller Fall ist, bei reeller Annahme der bestimmenden Elemente von den fünf Gattungen nur vier giebt, so lässt sich sofort schliessen, dass sich für die vorliegende Erzeugungsweise durch eine genauere Untersuchung dasselbe Resultat ergeben muss. Diese specielle Untersuchung bietet auch neben der allgemeinern, bereits von Herrn *Sturm**) durchgeführten noch ein ganz wesentliches Interesse vermöge ihrer Einfachheit.

Sie stützt sich auf die nachfolgenden Sätze: In jeder imaginären Ebene liegt eine reelle Gerade, durch jeden imaginären Punkt geht eine reelle Gerade. Irgend eine beliebige Gerade des Raumes hat entweder keinen reellen Punkt, oder einen, oder zwei (und dann unendlich viele), und demnach unterscheidet man imaginäre, punktirte und reelle Gerade. Durch jeden imaginären Punkt des Raumes lässt sich eine reelle Gerade legen, es giebt also unendlich viele reelle Geraden, welche eine imaginäre Gerade treffen. Seien g_1, g_2, g_3 drei von diesen Geraden, so werden sich keine zwei derselben begegnen, denn würden sich z. B. g_1 und g_2 treffen, so müsste g in der reellen Ebene $g_1 g_2$ liegen und dann einen reellen Punkt haben, was wider die Voraussetzung ist. Es folgt nun, dass jede beliebige reelle Erzeugende des Hyperboloids $g_1 g_2 g_3$, welche mit diesen Geraden derselben Schaar angehört, g trifft. Es ist also leicht, durch g ein reelles Hyperboloid zu legen. Uebrigens geht durch jeden reellen Punkt des Raumes ein solches Hyperboloid, da durch jeden reellen

*) A. a. O., sechstes und siebentes Kapitel.

Punkt des Raumes eine reelle Gerade geht, welche g schneidet*). (Ein reeller Punkt p bestimmt nämlich mit g eine Ebene, die stets eine reelle, durch p gehende und g schneidende Gerade enthält. Diese mit zwei anderen reellen g schneidenden Geraden bestimmt das verlangte Hyperboloid.)

Wenn auf der reellen Fläche dritten Grades F_3 eine imaginäre Gerade g liegt, so kann durch g ein reelles Hyperboloid gelegt werden, das die F_3 ausser in g noch in einer Raumcurve fünften Grades C_5 trifft, von welcher unendlich viele Punkte reell sind, da auf jeder reellen Erzeugenden von H_2 wenigstens ein reeller Punkt von F_3 liegt. Es giebt also Ebenen, welche wenigstens drei reelle Punkte von C_5 enthalten. Eine solche schneidet aber aus C_5 noch einen reellen Punkt aus, da diese Ebene aus F_3 eine reelle Curve dritten Grades und aus H_2 einen Kegelschnitt ausschneidet, von deren Durchschnittspunkten eine gerade Anzahl reell ist. Es giebt demnach unendlich viele Ebenen, welche die C_5 in einem imaginären und vier reellen Punkten treffen, und dies ist nicht anders möglich, als wenn C_5 in eine C_4 und eine imaginäre Gerade zerfällt. Enthält also eine reelle Fläche F_3 eine imaginäre Gerade, so ist ausser dieser einen noch eine andere vorhanden.

Durch jeden imaginären Punkt einer punktirten Geraden g' lässt sich eine reelle Gerade legen, und alle diese Geraden liegen in einer und derselben reellen Ebene. Liegt g' auf einer reellen Fläche dritten Grades F_3, so wird die durch g' mögliche reelle Ebene die F_3 in g' und in einem Kegelschnitte treffen, der die Eigenschaft hat, dass jede in seiner Ebene gelegene reelle Gerade mit ihm einen reellen und einen imaginären Punkt gemein hat. Dies ist nur dann möglich, wenn er in eine reelle und eine punktirte Gerade zerfällt, welche letztere mit g' den reellen Punkt gemein hat.

Es folgt daraus, dass, wenn auf einer reellen Fläche dritten Grades eine reelle Gerade und eine punktirte so gelegen sind, dass der reelle Punkt der letzteren auf der ersteren sich befindet, dann nothwendig drei Geraden der Fläche durch einen und denselben Punkt laufen.

X.

Wenn das Flächenbündel, in Bezug auf welches die conjugirten Pole untersucht werden, reell, d. h. durch drei, nicht demselben Büschel zugehörige

*) Die sämmtlichen reellen Geraden, welche einer imaginären Geraden begegnen, gehören einem Strahlensystem ersten Grades und erster Klasse an; durch jeden reellen Punkt geht, in jeder reellen Ebene liegt eine solche Gerade.

reelle Flächen zweiten Grades bestimmt ist, so gehört zu jedem reellen Punkt ein reeller conjugirter Pol, zu jeder reellen Geraden g eine reelle Raumcurve dritten Grades C_3, und zu jeder reellen Ebene E eine reelle Fläche dritten Grades F_3. Es folgt daraus allerdings nicht die Realität der Quadrupelcurve C_6, aber doch, dass die allfälligen imaginären Schnittpunkte der C_6 mit einer beliebigen reellen Ebene paarweise conjugirt sind. In der That, wenn man das reelle Flächenbüschel betrachtet, welches einem reellen Ebenenbüschel mit der Axe g entspricht, so findet man, dass dasselbe durch eine willkürliche Ebene E in einem reellen Curvenbüschel dritten Grades geschnitten wird, von dessen neun Grundpunkten wenigstens einer reell ist, während die übrigen paarweise conjugirt sind. Von diesen neun Grundpunkten fallen drei auf den Durchschnitt der reellen g entsprechenden C_3 mit E, der entweder aus drei reellen Punkten, oder einem reellen und zwei conjugirten Punkten besteht. Die übrigen sechs Punkte, offenbar die s, welche C_6 mit E gemein hat, sind also paarweise conjugirt, insofern sie nicht reell sind.

Einem reellen Punkte s entspricht nothwendigerweise eine reelle Gerade G, während einem imaginären s eine imaginäre G zugehört, denn wäre auf derselben ein reeller Punkt vorhanden, so müsste demselben ein reelles s entsprechen.

In Bezug auf die s haben wir also folgende vier Fälle zu unterscheiden:

I. alle s sind reell;

II. vier s sind reell und zwei conjugirt imaginär;

III. zwei s reell und zweimal zwei conjugirt imaginär;

IV. dreimal zwei s sind conjugirt imaginär.

Jedem dieser Fälle entspricht in der That in Bezug auf die Realität der Geraden eine besondere Gattung von Flächen dritten Grades, wie vorausgesehen worden ist, und wie die genauere Betrachtung zeigen soll.

ad I. Da die s alle reell sind, so sind die Verbindungsgeraden derselben zu zweien so wie auch die Kegelschnitte, welche je fünf von ihnen enthalten, reell und demzufolge alle 27 Geraden der Fläche reell.

ad II. Es seien s_1, s_2, s_3, s_4 reell und die beiden übrigen s_5 und s_6 conjugirt imaginär, dann sind auch G_1, G_2, G_3, G_4 reell und G_5 und G_6 imaginär. Von den 15 Geraden $l_{\lambda,\mu}$ sind offenbar reell: l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}, l_{56} (letztere, weil s_5 und s_6 als conjugirte Punkte in E durch eine reelle Gerade verbunden werden können). Es ist auch leicht zu sehen, dass diejenigen Geraden, welche den Kegelschnitten $s(56123)$, $s(56124)$, $s(56134)$, $s(56234)$

entsprechen, reell sind, da diese Realität nur von der Realität der Kegelschnitte abhängt. Man kann aber, weil s_5 und s_6 conjugirt sind, dieselben als Doppelpunkte eines reellen Punktsystems auffassen, so dass jeder der genannten Kegelschnitte durch drei reelle Punkte und ein reelles Punktsystem bestimmt, und deshalb selber reell ist. Wäre auch der Kegelschnitt $s(12345)$ reell, so müsste derselbe durch s_6 gehen, was ausgeschlossen ist; aus demselben Grunde ist $s(12346)$ imaginär. Von den Geraden g sind also g_1, g_2, g_3, g_4 reell, g_5, g_6 nicht.

Von den nicht reellen Geraden der vorliegenden Fläche F_3 kann keine einen reellen Punkt enthalten. Wäre z. B. ein reeller Punkt auf l_{15} vorhanden, so läge derselbe entweder auf G_1 oder G_5 oder ausserhalb dieser beiden Geraden. Das letztere ist nicht möglich, denn einem solchen Punkte würde in E ein reeller, nicht mit s_1 zusammenfallender Punkt entsprechen, der mit s_1 eine reelle Gerade $s_1 s_5$ bestimmen würde, was nicht möglich ist, da sonst s_5 auf zwei reellen Geraden $s_1 s_5$, $s_5 s_6$ läge. Auf G_5 kann der angenommene reelle Punkt nicht liegen, denn G_5 enthält überhaupt keinen reellen Punkt, also wäre nur denkbar, dass G_1 und l_{15} einen reellen Punkt gemein hätten. Nach dem Schlusssatze von IX. würden dann drei Geraden der Fläche durch denselben Punkt gehen, was aber im allgemeinen nicht statt findet. Aus demselben Grunde hat auch keine der andern Geraden, sei sie l oder g, einen reellen Punkt. Die Gattung II. hat also 15 reelle und 12 imaginäre Gerade.

ad III. s_1 und s_2 sind reell, s_3 und s_4, s_5 und s_6 conjugirt imaginär.

Die Geraden G_1, G_2 sind reell, die übrigen G imaginär. Die Kegelschnitte $s(34561)$ und $s(34562)$ sind reell, also g_1 und g_2 ebenfalls. Von den übrigen durch je fünf der sechs s möglichen Kegelschnitte hat jeder nur die beiden reellen Punkte s_1 und s_2 und ist im Uebrigen imaginär, demzufolge sind auch g_3, g_4, g_5, g_6 imaginär. Von den 15 Verbindungsgeraden der s sind reell: $s_1 s_2$, $s_3 s_4$, $s_5 s_6$, so dass ihnen die drei reellen Geraden l_{12}, l_{34}, l_{56} entsprechen. Die Geraden l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{23}, l_{24}, l_{25}, l_{26} sind imaginär, weil ihre Abbildungen auf E ausser resp. s_1 und s_2 keinen reellen Punkt haben. Von den Geraden l_{35} und l_{46}, l_{36} und l_{45} haben die beiden ersten einen reellen Punkt gemein, ebenso die beiden letzten, weil in dem vollständigen Viereck 3456 sämmtliche Diagonalpunkte reell sind. Die Gattung III. enthält also 7 reelle, 16 imaginäre und 4 punktirte Gerade.

ad IV. s_1 und s_2, s_3 und s_4, s_5 und s_6 sind conjugirt imaginär.

Alle G sind imaginär. Keiner der Kegelschnitte durch fünf der s hat



einen reellen Punkt, also sind auch alle g imaginär. Den reellen Geraden s_1s_2, s_3s_4, s_5s_6 entsprechen drei reelle Gerade l_{12}, l_{34}, l_{56}. Jede der übrigen der 15 Verbindungsgeraden der s hat, als in einer reellen Ebene liegend, einen reellen Punkt, der mit keinem der s zusammenfällt, also ist die entsprechende Gerade auf F_3 punktirt. Die Gattung IV. enthält demnach 3 reelle, 12 imaginäre und 12 punktirte Gerade.

XI.

Aus den allgemeinen in dem Vorhergehenden behandelten Resultaten lassen sich durch Specialisiren einestheils des Flächenbündels, anderntheils der Ebene E, für deren Punkte die conjugirten Pole bestimmt werden, mannigfache Sätze ableiten, welche namentlich einen genaueren Einblick in die Beschaffenheit derjenigen Flächen dritten Grades gestatten, welche Doppelpunkte haben. Hier soll, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nur das Flächenbündel gewissen Bedingungen unterworfen werden, während die Lage der Ebene E völlig willkürlich gelassen wird.

In VII. ist die nähere Bestimmung der Quadrupelcurve C_6 eines Flächenbündels unter der Voraussetzung gegeben worden, dass für keinen Punkt des Raumes die sämmtlichen Polarebenen in Bezug auf die Flächen zweiten Grades des Bündels zusammenfallen. Wird diese Bedingung aufgehoben und die ganz specielle Annahme gemacht, dass die sämmtlichen Flächen des Bündels ein gemeinsames Quadrupel haben, so zeigt es sich, dass die C_6 in die sechs Kanten dieses Quadrupels zerfällt. Werden dieselben durch eine Ebene E geschnitten, und wird die ihr entsprechende F_3 untersucht, so ergiebt sich zunächst, dass die Punkte s die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, also viermal zu je dreien auf einer Geraden sich befinden, während die Geraden G aus den Kanten des Quadrupels bestehen. Wird s_λ von einer dieser Kanten ausgeschnitten, so ist G_λ die dieser Kante gegenüberliegende. Die Geraden G sind also nicht mehr windschief gegeneinander, sondern treffen sich zu je dreien in den Ecken eines Quadrupels, die demgemäss Doppelpunkte der F_3 sind.

Die Geraden g entstehen aus den Kegelschnitten, welche je fünf der Grundpunkte enthalten. Sei $s(12345)$ ein solcher Kegelschnitt, so zerfällt derselbe in zwei Gerade, von denen jede drei der Punkte s enthält, und einer solchen Geraden entsprechen auf F_3 einfach die den auf ihr liegenden

Punkten s zugehörigen Geraden G, demzufolge coincidiren in unserm Falle die g und G. Was nun noch die Geraden l betrifft, so ist zu unterscheiden, ob die entsprechende Gerade in E zwei gegenüberliegende s verbindet, oder aber zwei, die auf einer Seite des Vierseits der s liegen. Im ersten Falle, der dreimal eintritt, erhält man eine neue Gerade der F_3, im zweiten Falle aber treten nur die bereits bekannten Geraden G auf. Um die Uebersicht zu erleichtern, nehmen wir an, dass von den sechs Punkten s je auf einer Geraden liegen: 123, 156, 246, 345, so dass im Vierseit 123456 die Ecken 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 gegenüberliegende sind. Es befinden sich dann auf F_3 die Geraden:

$$G_1 = g_4 = l_{23} = l_{56};\quad G_2 = g_5 = l_{13} = l_{46};\quad G_3 = g_6 = l_{12} = l_{45};$$
$$G_4 = g_1 = l_{26} = l_{35};\quad G_5 = g_2 = l_{34} = l_{16};\quad G_6 = g_3 = l_{15} = l_{24};$$
$$l_{14};\qquad l_{25};\qquad l_{36}.$$

Jede der sechs Kanten des Quadrupels ist also viermal als Gerade der F_3 zu zählen, jede der drei übrigen Geraden aber nur einmal, wie bereits anderweitig bekannt ist. — Da ein gemeinschaftliches Quadrupel zweier reellen Flächen zweiten Grades entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre, oder zweimal zwei conjugirt imaginäre Punkte hat, so ist klar, dass man leicht die auf die hier angegebene Weise zu erzeugenden Flächen dritten Grades mit vier Doppelpunkten nach der Realität dieser Doppelpunkte in drei Gattungen theilen kann, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Eine einfache Construction der Fläche dritten Grades mit vier Doppelpunkten beruht auf nachfolgenden Betrachtungen:

Vier nicht in einer und derselben Ebene gelegene Punkte a, b, c, d sollen zu einem windschiefen Vierseit verbunden werden, in welchem a und c, b und d gegenüberliegende Ecken, $da = I$ und $bc = III$, $ab = IV$ und $cd = II$ gegenüberliegende Seiten sind. Man kann nun in Bezug auf dieses Vierseit jeder Ebene E einen in ihr liegenden Punkt p so zuordnen, dass, wenn 1, 2, 3, 4 die Durchschnitte von E resp. mit I, II, III, IV sind, dann der gesuchte Punkt p der Schnitt der Geraden 13 und 24 ist. Es ist umgekehrt leicht, zu dem Punkte p die Ebene E zu construiren, indem man einfach die beiden Geraden legt, welche von p ausgehen und resp. I und III, II und IV schneiden, diese Geraden bestimmen die Ebene E vollständig. Als Ausnahmefälle sind diejenigen zu betrachten, wenn E eine Kante des Tetraeders $abcd$ enthält, oder mit einer Seitenfläche desselben zusammenfällt, und wenn p auf einer Kante liegt, oder in eine Ecke desselben fällt.

Die besprochene Fläche wird nun erzeugt, indem man den Punkt p für alle durch einen Punkt P gehenden Ebenen E construirt. Dies würde zunächst daraus folgen, dass wenn E sich um eine Gerade G dreht, dann der Punkt p die Raumcurve dritten Grades durchläuft, welche der partielle Schnitt der Hyperboloide ist, die resp. durch die Geraden I, III, G und II, IV, G bestimmt sind; anderntheils ergiebt sich das gesuchte Resultat als specieller Fall der dritten *Steiner*schen Erzeugungsart der Flächen dritten Grades. In der That, wenn E eine durch P gehende Ebene, p der ihr zugehörige Punkt ist, so lässt sich durch das windschiefe Vierseit $I\,II\,III\,IV$ und durch p ein Hyperboloid legen, für welches E eine Tangentialebene ist (denn E schneidet dasselbe in zwei Geraden); demzufolge liegt p auf dem Ort der Berührungspunkte aller von P aus an das Hyperboloidenbüschel möglichen Tangentialebenen, und dieser Ort ist nach der angegebenen *Steiner*schen Erzeugungsart wirklich eine Fläche dritten Grades. Dass umgekehrt alle Punkte dieses Ortes auch Punkte p sind, lässt sich leicht zeigen, ebenso, dass die Kanten des Tetraeders $abcd$ ganz dem Orte von p angehören, woraus folgt, dass derselbe eine Fläche vom dritten Grade mit den vier Doppelpunkten a, b, c, d ist.

Die übrigen drei Geraden der Fläche bestimmen sich wie folgt: durch P lege man die zugehörige Ebene E, so schneidet dieselbe das Vierseit $I\,II\,III\,IV$ in einem Viereck 1234, dessen Diagonaldreiseit ganz auf F_3 liegt. Eine Seite dieses Dreiseits ist nämlich die Polare des Punktes P in Bezug auf das vorhin erwähnte Hyperboloidenbüschel und gehört deshalb der F_3 an, die beiden anderen aber enthalten den auf F_3 enthaltenen Punkt P und schneiden zudem je drei der Geraden der Fläche.

Schliesslich sei bemerkt, dass durch eine ganz ähnliche Construction die *Steiner*sche Fläche dritter Klasse und vierten Grades hergestellt werden kann.

XII.

Wenn von den acht Schnittpunkten dreier Flächen zweiten Grades sieben auf einer irreductibeln Raumcurve dritten Grades C_3 liegen, so befindet sich der achte ebenfalls auf C_3, und das durch die acht Schnittpunkte bestimmte Flächenbündel zweiten Grades besteht aus den sämmtlichen Flächen zweiten Grades, welche durch C_3 gelegt werden können. Der Ort der Mittelpunkte aller im Bündel enthaltenen Kegel, mit anderen Worten die Quadrupelcurve des Bündels, reducirt sich demnach auf C_3. Conjugirte Punkte in Bezug auf

das Bündel können leicht construirt werden, zu p findet man den zugehörigen p_1, indem man durch p die doppeltschneidende Gerade der C_3 zieht, welche mit C_3 die Punkte s_1 und s_2 gemein haben mag; der gesuchte Punkt p_1 ist dann der vierte harmonische, dem p zugeordnete Punkt in Bezug auf s_1 und s_2. Zu jedem Punkte p im Raum giebt es im Allgemeinen stets einen, aber auch nur einen Punkt p_1; die einzige Ausnahme bilden die Punkte der C_3: jedem derselben entspricht die zugehörige Tangente der C_3.

Bewegt sich p auf einer Geraden g, die C_3 nicht schneidet, so beschreibt p_1 eine Raumcurve dritten Grades c_3, welche, da g und die Tangentenfläche von C_3 sich in vier Punkten treffen, mit C_3 nothwendig vier Punkte gemein hat. — Wenn aber g mit C_3 einen Punkt s gemein hat, so zerfällt die zugehörige c_3 in die Tangente, welche in s an C_3 gelegt werden kann, und in ein Gebilde zweiten Grades. Zunächst ist klar, dass dasselbe auf dem Hyperboloide H_2 liegt, welches durch g und C_3 möglich ist, denn sämmtliche Erzeugende von H_2, welche g treffen, sind doppeltschneidende Geraden der C_3. Ferner bestimmt g mit dem Kegel, welcher durch C_3 geht und s zum Mittelpunkte hat, eine Polarebene, in der das gesuchte Gebilde ebenfalls enthalten sein muss, demzufolge ist es der Schnitt dieser Ebene mit H_2, also ein Kegelschnitt, welcher s enthält und C_3 ausser in s noch in zwei anderen Punkten trifft. — Haben g und C_3 zwei Punkte s_1 und s_2 gemein, so zerfällt c_3 in die Gerade $s_1 s_2$ und die beiden Tangenten, welche in s_1 und s_2 an C_3 gelegt werden können. Ist schliesslich g selbst eine Tangente der C_3, so besteht die ihr zugehörige c_3 aus dieser nämlichen Tangente dreifach gelegt.

Aus den bereits abgeleiteten allgemeineren Sätzen ergiebt sich, dass wenn p eine Ebene durchläuft, die der C_3 gegenüber keine singuläre Lage hat, dann p_1 eine Fläche dritten Grades beschreibt. Dasselbe Resultat hätte man auch in nachfolgender Weise erhalten können: Seien s_1, s_2, s_3 die Durchschnittspunkte von E mit C_3, dann findet man den Ort des Punktes p_1, indem man einfach den Ort der entsprechenden Gebilde für sämmtliche durch den Punkt s_1 gehende und in E liegende Geraden bestimmt. Jeder solchen Geraden g entspricht zunächst die Tangente in s_1 an C_3 und dann ein Kegelschnitt, der in der vorhin angegebenen Weise als Durchschnitt einer Ebene e mit einem Hyperboloid H_2 hergestellt werden kann. Dreht sich nun g in E um s_1, so beschreibt e ein Ebenenbüschel und H_2 ein zu dem Ebenenbüschel projectivisches Hyperboloidenbüschel mit einer Grundcurve, die aus C_3 und der Geraden $s_1 s_2$ besteht; der jeweilige Durchschnitt bewegt sich also, wie die

zweite *Steiner*sche Erzeugungsweise der Flächen dritten Grades lehrt, in einer Fläche dritten Grades F_3.

Es ist jetzt zu untersuchen, ob auf dieser Fläche auch Geraden vorhanden seien und wie viele? — Da s_1, s_2, s_3 auf C_3 liegen, so gehören die Geraden $s_2 s_3$, $s_3 s_1$, $s_1 s_2$ der Fläche F_3 an, ebenso liegen die in s_1, s_2, s_3 an C_3 möglichen Tangenten t_1, t_2, t_3 auf F_3, so dass also durch jeden der Punkte s drei nicht in derselben Ebene liegende Geraden der F_3 gehen, d. h. diese hat die drei Punkte s zu Doppelpunkten. Weitere Geraden der F_3 ergeben sich wie folgt: In Bezug auf den Kegel durch F_3 mit dem Mittelpunkte s_1 hat die Ebene E eine bestimmte durch s_1 gehende Polgerade γ_1, die auch auf F_3 liegt, und der in E ein ganz bestimmter Kegelschnitt entspricht, welcher die Punkte s_1, s_2, s_3 enthält; ähnlich findet man noch für s_2 und s_3 die Geraden γ_2 und γ_3. Es zeigt sich ferner, vermittelst eines Verfahrens, welches man bequem der zweiten *Steiner*schen Erzeugungsart der Flächen dritten Grades entnimmt, dass auf F_3 in den Ebenen $t_1\gamma_1$, $t_2\gamma_2$, $t_3\gamma_3$ noch je eine Gerade — β_1, β_2, β_3 — liegt, deren Bild in E eine resp. durch s_1, s_2, s_3 gehende Gerade ist, so dass also auf F_3 zwölf Geraden nachgewiesen sind, ausser welchen keine weiteren auf der Fläche enthalten sein können, wie sich sofort zeigen wird.

In Bezug auf die C_3 entspricht einer beliebigen Ebene E eine Fläche dritten Grades F_3, einer zweiten Ebene E' gehört eine Fläche F_3' zu. Nun schneiden sich F_3 und F_3' in einer Raumcurve neunten Grades, welche aber zerfällt, und zwar in die c_3, welche der Schnittgeraden g von E und E' entspricht, und in eine Raumcurve sechsten Grades C_6. Diese C_6 kann nichts anderes sein, als die Quadrupelcurve C_3 doppelt gelegt, so dass also die sämmtlichen Flächen dritten Grades, welche durch Ebenen erzeugt werden, sich längs C_3 berühren, d. h. C_3 und eine andere, in jedem ihrer Punkte ihr unendlich nahe gelegene Raumcurve dritten Grades C_3' gemein haben.

Durch diese Bemerkung ist man in den Stand gesetzt, sofort nach VIII. die auf der hier betrachteten Fläche dritten Grades F_3 gelegenen Geraden abzuleiten. Denn seien s_4, s_5, s_6 die Durchschnittspunkte von C_3' mit E, welche resp. den Punkten s_1, s_2, s_3 unendlich nahe liegen, so dass immerhin die Geraden $s_1 s_4$, $s_2 s_5$, $s_3 s_6$ eine bestimmte Richtung behalten, so bilden diese sechs Punkte zusammen die in VII. und VIII. näher definirten Grundpunkte s. Von den sechs Geraden G (um die dort eingeführte Bezeichnung beizubehalten) rücken also dreimal zwei zusammen:

$$G_1 = G_4, \qquad G_2 = G_5, \qquad G_3 = G_6.$$

Ebenso leicht ist einzusehen, dass auch von den sechs Geraden g je zwei zusammenfallen, also:

$$g_1 = g_4, \qquad g_2 = g_5, \qquad g_3 = g_6.$$

Für die Geraden l ergiebt sich die Tabelle:

$$l_{23} = l_{26} = l_{53} = l_{56}; \qquad l_{31} = l_{61} = l_{34} = l_{64}; \qquad l_{12} = l_{15} = l_{42} = l_{45};$$
$$l_{14}; \qquad l_{25}; \qquad l_{36}.$$

Jede der drei Geraden $s_2 s_3$, $s_3 s_1$, $s_1 s_2$, wie sie vorhin genannt wurden, muss also viermal gezählt werden, jede der Geraden t_1, t_2, t_3; γ_1, γ_2, γ_3 doppelt und jede der Geraden β_1, β_2, β_3 einfach, d. h. die Fläche dritten Grades mit drei Doppelpunkten, welche hier erzeugt worden ist, hat 3 quaternäre, 6 binäre und 3 unäre Geraden *).

XIII.

Wenn ein allgemeines Flächenbündel zweiten Grades fest bleibt, während die zu ihm in die bekannte Beziehung gesetzte Ebene nach und nach jede beliebige Lage annimmt, so entstehen unendlich viele Flächen dritten Grades, welche sämmtlich die Quadrupelcurve C_6 des Bündels enthalten, und von denen eine Einzelne erst dann bestimmt ist, wenn von ihr noch drei von einander unabhängige Punkte gegeben sind. Ein Complex von Flächen, welcher dreifach unendlich ist, heisst ein Netz, so dass also durch ein Flächenbündel zweiten Grades ein Netz von Flächen dritten Grades bestimmt ist.

In einem Flächennetz giebt es unendlich viele Flächen, welche einen Doppelpunkt haben, und der Ort derselben bildet eine Fläche, welche man als die Kernfläche des Netzes bezeichnen kann. Analytisch ist dieselbe leicht herzustellen, da man, um ihre Gleichung zu finden, nur die *Jacobi*sche Determinante für irgend vier von einander unabhängige Flächen des Netzes zu bilden und gleich Null zu setzen hat. Es ergiebt sich ohne Weiteres, dass für ein Netz von Flächen dritten Grades die Kernfläche vom achten Grade ist.

Für dasjenige Netz, welches durch ein Flächenbündel zweiten Grades bestimmt ist, lässt sich aber auf rein geometrischem Wege die Kernfläche mit

*) *Sturm*, a. a. O. No. 120.

grösster Leichtigkeit bestimmen. Die Quadrupelcurve C_6 des Bündels hat nämlich die Eigenschaft, dass von irgend einem im Raume beliebig gewählten Punkte aus sieben geradlinige Strahlen gehen, welche dieselbe in zwei Punkten treffen, d. h. die C_6 hat sieben scheinbare Doppelpunkte. Wenn jetzt ein beliebiger Punkt p des Raumes Doppelpunkt einer durch C_6 gehenden F_3 wäre, so müssten doch die sieben durch p gehenden doppeltschneidenden Geraden der C_6 der F_3 angehören, was aber nicht möglich ist, weil von einem Doppelpunkte der F_3 aus höchstens sechs Geraden derselben gehen können. Soll aber p wirklich ein Doppelpunkt sein, so müssen mindestens zwei der von ihm ausgehenden doppeltschneidenden Geraden der C_6 zusammenfallen, d. h. p muss auf einer Geraden liegen, welche mit C_6 drei Punkte gemein hat. Alle diese Geraden aber bilden, wie am Schlusse von VIII. gezeigt wurde, eine geradlinige Fläche vom achten Grade, welche demnach die Kernfläche des Netzes ist.

Es knüpfen sich an diese Betrachtung die nachfolgenden Fragen, auf welche aber hier nicht eingegangen werden soll:

Wie sind die Flächen des vorliegenden Netzes beschaffen, welche zwei oder drei Doppelpunkte haben, resp. wie liegen diese Doppelpunkte? Wie viele Flächen mit drei Doppelpunkten sind in dem Netz enthalten?

Welches ist die Fläche, welche von den Ebenen umhüllt wird, die mit dem vorliegenden Flächenbündel zweiten Grades eine Fläche dritten Grades mit einem Doppelpunkt bestimmen? Welches ist die abwickelbare Fläche, welche von den Ebenen gebildet wird, die Flächen F_3 mit zwei Doppelpunkten bestimmen? Welche gegenseitige Beziehungen haben die Ebenen, welche Flächen F_3 mit drei Doppelpunkten ergeben?

XIV.

Ein merkwürdiges specielles Netz von Flächen dritten Grades wird durch vier gegen einander windschiefe und von einander unabhängige Geraden *I, II, III, IV* bestimmt. Jede F_3, auf welcher die vier Geraden liegen, enthält auch noch diejenigen beiden Geraden 1 und 2 (dieselben sind quadratisch, d. h. mit räumlichem Zirkel und Lineal zu finden), von denen jede die vier ursprünglich gegebenen schneidet, und so hat man ein Netz von Flächen dritten Grades mit einer Grundcurve sechsten Grades, die aus sechs Geraden besteht. Eine einzelne Fläche des Netzes wird erst bestimmt, wenn von ihr

noch drei weitere von einander unabhängige Punkte gegeben sind, denn die vier Geraden legen der F_3 nur 16 Bedingungen auf, während bekanntlich zu deren Bestimmung 19 Bedingungen erforderlich sind.

Es soll jetzt diejenige der Flächen des Netzes bestimmt werden, welche durch die Punkte p_1, p_2, p_3 geht. Die Ebene e dieser Punkte schneide die Geraden I, II, III, IV resp. in den Punkten s_I, s_{II}, s_{III}, s_{IV} und die Geraden 1 und 2 resp. in s_1 und s_2, so geht durch die neun Punkte s und p eine ebene Curve dritten Grades C_3, welche ganz der gesuchten Fläche F_3 angehört, und zwar ist es möglich, beliebig viele Punkte dieser Curve mittelst des Lineals allein zu construiren. — Durch die drei Geraden II, III, IV ist ein Hyperboloid H_2 bestimmt, welches F_3 in drei weitern Geraden trifft, von denen zwei die Geraden 1 und 2 sind. Die dritte ergiebt sich, indem man denjenigen Durchschnittspunkt des in e gelegenen Kegelschnitts von H_2 mit C_3 sucht, welcher keiner der Punkte s ist; durch diesen auf linealem Wege construirbaren Punkt geht dann eine Gerade g_1, welche II, III und IV gleichzeitig schneidet, und welche demzufolge der F_3 angehört. In ähnlicher Weise findet man auf den Hyperboloiden $(III\ IV\ I)$, $(IV\ I\ II)$, $(I\ II\ III)$ noch drei neue Geraden g_2, g_3, g_4 der F_3, so dass also von derselben bereits 10 Geraden bekannt sind. Von diesen bilden 1, 2, g_1, g_2, g_3, g_4 die Hälfte einer *Schläfli*schen Doppelsechs. Es zeigt sich nun, dass die Construction der 27 Geraden der F_3 in diesem Falle nur die Lösung einer quadratischen Gleichung erfordert, während die Construction der 27 Geraden einer durch 19 ihrer Punkte gegebenen F_3 auf eine Gleichung sechsten Grades führt. Es ist übrigens klar, dass die Construction der F_3 unter den hier angenommenen speciellen Bedingungen sich auch leicht vermittelst der *Grassmann*schen Erzeugungsart ausführen lässt, da ja die projectivische Beziehung dreier die Fläche erzeugenden Ebenenbündel, deren Mittelpunkte die Punkte p sind, unmittelbar gegeben ist.

Man kann für das betrachtete Netz die Kernfläche sofort bestimmen. Wäre ein beliebig im Raume gelegener Punkt Doppelpunkt einer Fläche des Netzes, so könnte man auf dieser sofort sieben durch den Punkt p gehende Geraden angeben, von denen sechs die Schnittlinien der Ebenen sind, welche man durch p und je eine der Geraden I, II, III, IV legen kann, während die siebente, von p ausgehend, noch die Geraden 1 und 2 trifft, was ein Widerspruch ist. Dieser Widerspruch wird gehoben — und nur dann kann p ein Knotenpunkt der F_3 sein, wenn p auf einem der Hyperboloide liegt, welche

durch irgend drei der Geraden I, II, III, IV gelegt werden können, d. h. die Kernfläche des Netzes besteht aus vier Hyperboloiden.

Anmerkung. Die vorliegende Abhandlung war im Manuscripte bereits vollkommen beendigt, als der erste Theil der Preisschrift des Herrn Cremona über Flächen dritten Grades erschien (Bd. 68 dieses Journals, Heft 1). Dieselbe konnte demnach nicht benutzt und im Literaturnachweise aufgeführt werden, obschon einzelne Sätze, welche sie enthält, auch in den hier gegebenen Entwicklungen sich finden. —

Zürich, den 9. Jan. 1868.

Ueber einige bestimmte Integrale.

(Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg.)

Die Integrale, mit welchen sich der vorliegende Aufsatz beschäftigt, enthalten die *Bessel*schen Functionen $J^{(h)}(z)$ von beliebiger Ordnung und bilden insofern eine Verallgemeinerung der von Herrn *Lipschitz* gefundenen Integrale *) und eine Erweiterung der durch die Resultate von Herrn *Lipschitz* dargethanen Analogie dieser Functionen mit den trigonometrischen Functionen, wiewohl einige der von mir gefundenen Integrale ihr Analogon unter den trigonometrischen Functionen nicht finden. Die Methode, durch welche man zu diesen Integralen gelangt, beruht auf der Anwendung einer merkwürdigen Formel, welche den Werth eines dreifachen Integrals angiebt, welches eine beliebige nur gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfene Lösung einer partiellen Differentialgleichung enthält. Auf diese Formel wird man naturgemäss geführt durch eine sehr einfache physikalische Betrachtung: Ist nämlich in einem allseitig unbegrenzten Medium eine beliebige anfängliche Temperaturvertheilung $\Phi(xyz)$ gegeben, so erhält man mit Hülfe des bekannten *Laplace*schen Integrals das Gesetz der Bewegung der Wärme, d. h. die Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

in der Form:

$$u = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, \Phi(x+2\alpha\sqrt{t},\, y+2\beta\sqrt{t},\, z+2\gamma\sqrt{t})\, e^{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}.$$

Nimmt man aber an, die Function $\Phi(xyz)$ sei so beschaffen, dass sie mit ihren ersten Differentialquotienten im ganzen unendlichen Raum stetig ist und gleichzeitig der Differentialgleichung

$$-m^2\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

genügt, so erhält man eine Lösung der Wärmegleichung, welche gleichfalls der Bedingung des Anfangszustandes genügt, in der Form:

$$u = e^{-m^2 t}\Phi(xyz).$$

*) Bd. 56 dieses Journals.

Giebt man nun zu, dass die Wärmeprobleme auch für unbegrenzte Medien bei gegebenem Anfangszustand immer nur eine einzige Lösung zulassen, so müssen unter der über Φ gemachten Voraussetzung die beiden Ausdrücke für u übereinstimmen, woraus die oben erwähnte Formel folgen würde.

Abgesehen davon aber, dass der Beweis der Eindeutigkeit der Wärmeprobleme für unbegrenzte Medien meines Wissens noch nicht hinlänglich geführt ist, wäre ein directer Beweis dieser Formel auch darum wünschenswerth, weil dieselbe offenbar mit dem Wärmeproblem nichts zu thun hat und die Zeit nur als einen Parameter enthält. Da ausserdem der directe Beweis eine beträchtliche Verallgemeinerung der Formel zulässt, so werde ich zunächst mit einer anderen Ableitung derselben beginnen und dann die oben erwähnte Anwendung auf die *Bessel*schen Functionen machen.

§. 1.

Wenn man in der Gleichung:

$$(1.) \qquad -m^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}$$

Polarcoordinaten einführt, indem man setzt:

$$x-\xi = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$y-\eta = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z-\zeta = r\cos\vartheta, \qquad \cos\vartheta = \mu,$$

so nimmt dieselbe nach bekannten Regeln die Form an:

$$(2.) \qquad -m^2\Phi = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Legt man nun um den Mittelpunkt xyz mit dem Radius r eine Kugelfläche, in deren Nähe die Function Φ mit ihren ersten Differentialquotienten als endlich, stetig und eindeutig vorausgesetzt wird, so lässt sich der mittlere Werth dieser Function auf dieser Kugelfläche finden. Setzt man nämlich

$$\omega = \int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi\, d\mu\, d\varphi$$

und berücksichtigt, dass:

$$0 = \int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\, d\varphi\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\},$$

weil nämlich der Voraussetzung der Eindeutigkeit zu Folge $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ für $\varphi=-\pi$

und $\varphi = +\pi$ und denselben Werth von μ denselben Werth annehmen muss, so erhält man durch Integration der Gleichung (2.) über die ganze Kugelfläche:

$$-m^2\omega = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r}}{\partial r}$$

oder

$$\frac{\partial^2 r\omega}{\partial r^2} = -m^2 r\omega,$$

woraus man durch Integration in Bezug auf r erhält:

$$(3.)\qquad \omega = \frac{1}{r}\{A\sin mr + B\cos mr\},$$

wo die Constanten A, B nur noch von den Coordinaten xyz des Mittelpunkts der Kugel abhängig sein können. Nimmt man nun an, dass die Function Φ die vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen im ganzen Innern der Kugelfläche erfülle, so muss die Formel (3.) auch noch gültig sein für $r = 0$, und da ω für $r = 0$ nicht unendlich werden soll, so muss $B = 0$ sein. Setzt man nun $r = 0$, so wird

$$\omega_0 = \Phi(xyz)4\pi;$$

folglich:

$$A = \frac{4\pi}{m}\Phi(xyz),$$

also:

$$(4.)\qquad \omega = \frac{4\pi}{m}\Phi(xyz)\frac{\sin mr}{r}.$$

Diese Formel bleibt richtig, so lange man um den Punkt xyz Kugelflächen legen kann, in welchen die Function Φ die oben genannten Stetigkeitsbedingungen nicht verletzt. Nehmen wir nun an, die Function Φ sei so beschaffen, dass sie im ganzen unendlichen Raum die Stetigkeitsbedingungen erfüllt, dass also der Radius jener Kugel ins Unendliche wachsen kann, so können wir die Formel (4.) zur Bestimmung des folgenden Integrals anwenden:

$$(5.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(abc)\,e^{-p^2[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]}\,da\,db\,dc = \Omega.$$

Führt man in diesem Integral Polarcoordinaten ein, was, so lange p reell und von 0 verschieden ist (oder wenn p^2 imaginär sein sollte, so lange sein reeller Theil positiv ist), unbedingt erlaubt ist, indem man setzt:

$$\begin{aligned} a-x &= r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ b-y &= r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ c-z &= r\cos\vartheta, \qquad \cos\vartheta = \mu, \end{aligned}$$

so ergiebt sich:

$$\Omega = \int_0^\infty r^2 e^{-p^2 r^2} dr \int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi \, d\mu \, d\varphi$$

und durch Anwendung der Formel (4.):

$$\Omega = \frac{4\pi}{m} \Phi(xyz) \int_0^\infty r e^{-p^2 r^2} \sin mr \, dr.$$

Nach einer bekannten Formel ist:

$$\int_0^\infty r e^{-p^2 r^2} \sin mr \, dr = \frac{m}{4p^3} \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{m^2}{4p^2}}$$

und demnach:

$$(6.) \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(abc) e^{-p^2[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]} \, da \, db \, dc = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{p^3} e^{-\frac{m^2}{4p^2}} \Phi(xyz).$$

Dies ist die in der Einleitung erwähnte Formel. Man bemerkt aber sofort, dass sich diese Formel noch bedeutend verallgemeinern lässt.

Es lässt sich nämlich genau dasselbe Verfahren anwenden auf das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(abc) \, \varphi\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right) da \, db \, dc,$$

worin φ eine beliebige Function bedeutet, welche an die einzige Bedingung geknüpft ist, dass das vorstehende Integral nicht nur convergent ist, sondern auch seinen Werth nicht ändert durch Einführung neuer Variabeln und beliebige Anordnung der Integrationsfolge. Unter dieser Voraussetzung gelangt man auf demselben Wege wie oben zu der Formel:

$$(7.) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(abc) \, \varphi\left\{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right\} da \, db \, dc \\ \qquad = \frac{4\pi}{m} \Phi(xyz) \int_0^\infty r \varphi(r) \sin mr \, dr. \end{cases}$$

Macht man z. B. über die Function φ die Annahme:

$$\varphi(r) = \frac{e^{-\varepsilon r}}{r^p},$$

so lässt sich das Integral auf der rechten Seite ausführen. Es ist nämlich:

$$\int_0^\infty r^{1-p} e^{-\varepsilon r} \sin mr \, dr$$

der imaginäre Theil des Integrals:

$$\int_0^\infty r^{1-p}\, e^{-(\varepsilon-im)r}\, dr = \frac{\Gamma(2-p)}{(\varepsilon-im)^{2-p}},$$

worin:

$$(\varepsilon-im)^{2-p} = (\varepsilon^2+m^2)^{\frac{1}{2}(2-p)}\, e^{-i(2-p)\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{\varepsilon}}$$

und arctg zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist; und demnach:

$$\int_0^\infty r^{1-p}\, e^{-\varepsilon r}\sin mr\, dr = -\Gamma(2-p).(\varepsilon^2+m^2)^{\frac{1}{2}(p-2)}\sin(p-2)\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{\varepsilon}$$

$$= +\frac{\pi}{\Gamma(p-1)}(\varepsilon^2+m^2)^{\frac{1}{2}(p-2)}\frac{\sin(p-2)\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{\varepsilon}}{\sin p\pi},$$

welche letztere Form gültig ist, so lange p zwischen 1 und 3 liegt, und auch dann noch besteht, wenn die bisher positiv vorausgesetzte Grösse ε in 0 übergeht. Demnach erhält man folgende Formel:

$$(8.)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} da\, db\, dc\, \Phi(abc)\dfrac{e^{-\varepsilon\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}}{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)^{\frac{1}{2}p}} \\ = \dfrac{4\pi^2}{m}\dfrac{\Phi(xyz)}{\Gamma(p-1)}(\varepsilon^2+m^2)^{\frac{1}{2}(p-2)}\dfrac{\sin(p-2)\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{\varepsilon}}{\sin p\pi}. \end{cases}$$

Ist die Function Φ und der Exponent p so beschaffen, dass das dreifache Integral auf der linken Seite bis $\varepsilon=0$ inclusive eine stetige Function von ε ist, so kann in der vorstehenden Formel $\varepsilon=0$ gesetzt werden, und es ergiebt sich:

$$(9.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{da\,db\,dc\,\Phi(abc)}{\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}^{\frac{1}{2}p}} = -\frac{2\pi^2 m^{p-3}}{\Gamma(p-1)\cos\frac{1}{2}p\pi}\Phi(xyz).$$

§. 2.

Ich mache zunächst eine Anwendung der Formel (6.). Nimmt man an, es sei $\Phi(abc)=\Phi(ab)$ von c unabhängig, so geht dieselbe über in:

$$(10.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(ab)\, e^{-p^2[(x-a)^2+(y-b)^2]}da\, db = \frac{\pi}{p^2}e^{-\frac{m^2}{4p^2}}\Phi(xy).$$

Ein specieller Fall der Function Φ, welche allen hier gestellten Anforderungen genügt und gleichzeitig nur von $a^2+b^2=\varrho^2$ abhängt, ist die *Bessel*sche Function 0ter Ordnung:

$$\Phi = J^{(0)}(m\varrho),$$

welche der Differentialgleichung genügt:

$$-m^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho},$$

und welche ausgedrückt werden kann durch die stets convergente Reihe:

$$J(z) = 1-\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2.4^2}-\cdots$$

oder durch das Integral:

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\,d\omega.$$

Setzt man diese Function in die Formel (10.) ein, setzt in derselben $x=0$, $y=0$ und transformirt das Integral auf Polarcoordinaten, so erhält man die Formel:

$$(11.)\qquad \int_0^\infty \varrho e^{-p^2\varrho^2}J^{(0)}(m\varrho)\,d\varrho = \frac{1}{2p^2}e^{-\frac{m^2}{4p^2}}.$$

Dieses bestimmte Integral scheint um so bemerkenswerther zu sein, als das demselben entsprechende Integral für die trigonometrischen Functionen nicht in endlicher Form dargestellt werden kann. Insofern nämlich $\varrho J^{0}(m\varrho)$ eine ungerade Function ist, würde unserm Integral entsprechen: $\int_0^\infty e^{-p^2\varrho^2}\sin m\varrho\,d\varrho$, was auf eine unvollständige Γ-Function zurückkommt.

Um dieses Integral zu verallgemeinern, geben wir zunächst die Voraussetzung auf, dass $\Phi(ab)$ allein von ϱ abhängig sei. Setzt man, um Polarcoordinaten einzuführen:

$$a=\varrho\cos\varphi,\qquad x=r\cos q,$$
$$b=\varrho\sin\varphi,\qquad y=r\sin q,$$

so muss Φ der Differentialgleichung genügen:

$$-m^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

Nimmt man an, es sei:

$$\Phi = \Psi(A\cos h\varphi+B\sin h\varphi),$$

wo Ψ nun nur noch von ϱ abhängig ist, und h der Eindeutigkeit wegen eine ganze Zahl bedeuten muss, so erhält man für Ψ die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{h^2}{\varrho^2}-m^2\right)\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Psi}{\partial\varrho}.$$

Diese Gleichung hat eine durchaus stetige Lösung, nämlich die *Bessel*sche Function h^{ter} Ordnung:

$$\Psi = J^{(h)}(m\varrho),$$

wo $J^{(h)}(z)$ wieder durch eine immer convergente Reihe und durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden kann:

$$J^{(h)}(z) = \frac{z^h}{2.4\dots 2h}\left\{1 - \frac{z^2}{2.2h+2} + \frac{z^4}{2.4.2h+2.2h+4} - \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - h\varphi)\,d\varphi = \frac{z^h}{1.3.5\dots 2h-1}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\cos\varphi)\sin^{2h}\varphi\,d\varphi.$$

Setzt man diese Function in die Gleichung (10.) ein, nachdem man das Integral auf Polarcoordinaten transformirt hat, so ergiebt sich:

$$e^{-p^2r^2}\int_0^\infty \varrho e^{-p^2\varrho^2} J^{(h)}(m\varrho)\,d\varrho \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2p^2r\varrho\cos(\varphi-q)}(A\cos h\varphi + B\sin h\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{p^2}\,e^{-\frac{m^2}{4p^2}} J^{(h)}(mr)(A\cos hq + B\sin hq).$$

In dieser Formel setze man:

$$A = 1, \qquad B = i, \qquad q = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Dann nimmt das Integral in Bezug auf φ folgende Gestalt an:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2p^2r\varrho\sin\varphi + ih\varphi}\,d\varphi,$$

welches sich leicht auf folgende Form bringen lässt:

$$\int_0^\pi \{e^{2p^2r\varrho\sin\varphi + ih\varphi} + e^{-2p^2r\varrho\sin\varphi - ih\varphi}\}\,d\varphi = 2\int_0^\pi \cos(2ip^2r\varrho\sin\varphi - h\varphi)\,d\varphi = 2\pi J^{(h)}(2ip^2r\varrho),$$

und darnach wird das obige Integral:

$$\int_0^\infty \varrho\, e^{-p^2\varrho^2} J^{(h)}(m\varrho)\, J^{(h)}(2ip^2r\varrho)\,d\varrho = \frac{i^h}{2p^2}\,e^{-\frac{m^2}{4p^2}+p^2r^2} J^{(h)}(mr)$$

oder in etwas mehr symmetrischer Form geschrieben, indem man $2p^2r = n$ setzt:

$$(12.)\qquad \int_0^\infty \varrho\, e^{-p^2\varrho^2} J^{(h)}(m\varrho)\, J^{(h)}(in\varrho)\,d\varrho = \frac{i^h}{2p^2}\,e^{-\frac{m^2-n^2}{4p^2}} J^{(h)}\left(\frac{mn}{2p^2}\right).$$

Lässt man in dieser Formel n gegen 0 abnehmen und setzt für die Functionen $J^{(h)}(in\varrho)$, $J^{(h)}\left(\frac{nm}{2p^2}\right)$ die ersten Glieder der Reihenentwicklungen, so erhält man die Verallgemeinerung der Formel (11.):

$$(13.)\qquad \int_0^\infty \varrho^{h+1} e^{-p^2\varrho^2} J^{(h)}(m\varrho)\,d\varrho = \frac{m^h}{(2p^2)^{h+1}}\,e^{-\frac{m^2}{4p^2}}.$$

Alle unsere Betrachtungen bleiben für diese Integrale auch dann noch richtig, wenn man m irgendwie complex, also beispielsweise auch rein ima-

ginär annimmt. Die Functionen $J^{(h)}$ werden in diesem Falle allerdings unendlich für unendliche Werthe des Arguments, jedoch so, dass die Convergenz der Integrale in keiner Weise beeinträchtigt wird, wegen des Factors $e^{-p^2\varrho^2}$. Denn für sehr grosse Werthe der Variablen nähern sich die Functionen $J^{(h)}(m\varrho)$ dem Grenzwerth $\frac{A\cos m\varrho + B\sin m\varrho}{\sqrt{\varrho}}$.

Ebenso kann in der Formel (12.) n irgendwie complex angenommen werden, denn sowohl rechts als links stehen durchaus stetige Functionen von n, welche nur für unendliche Werthe von n unendlich werden, und die Werthe beider Functionen stimmen längs einer Linie, nämlich der ganzen Linie, auf der n reell ist, mit einander überein. Solche Functionen müssen aber überhaupt übereinstimmen*).

Setzt man also $-in$ an die Stelle von n, so nimmt (12.) die Form an:

$$(14.)\qquad \int_0^\infty \varrho\, e^{-p^2\varrho^2} J^{(h)}(m\varrho) J^{(h)}(n\varrho)\, d\varrho = \frac{e^{-\frac{m^2+n^2}{4p^2}}}{2p^2} i^h J^{(h)}\left(\frac{mn}{2ip^2}\right).$$

In ganz ähnlicher Weise lässt sich auch das allgemeinere Integral finden:

$$\int_0^\infty \varrho^\lambda e^{-p^2\varrho^2} J^{(0)}(m\varrho)\, d\varrho,$$

worin λ eine ungerade positive ganze Zahl bedeutet. Hat man dieses Integral gefunden, dann ergeben sich mit Hülfe der recurrenten Formel für die *Bessel*schen Functionen:

$$J^{(h+1)}(z) = \frac{h}{z} J^{(h)}(z) - \frac{\partial J^{(h)}(z)}{\partial z} \text{ **)}$$

die Integrale von der Form:

$$\int_0^\infty \varrho^{h+\lambda} e^{-p^2\varrho^2} J^{(h)}(m\varrho)\, d\varrho,$$

wo λ wieder eine ungerade ganze Zahl bedeutet, welche bis $-2h+1$ abnehmen kann. Da aber diese allgemeinen Formeln keine einfache Gestalt annehmen, und daher auch ohne besonderes Interesse sein dürften, so übergehe ich diese Ableitung und will nur als Beispiel dieser Art das eine Integral anführen:

$$\int_0^\infty e^{-p^2\varrho^2} J^{(1)}(m\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{m}\left(1 - e^{-\frac{m^2}{4p^2}}\right),$$

---

*) Vgl. *Riemann:* Grundl. der Theorie der Functionen einer veränderl. complexen Grösse, §. 15.

**) Vgl. *C. Neumann*: Theorie der *Bessel*schen Functionen. Leipzig 1867 p. 22.

welches sich mit Hülfe der angeführten Recursionsformel aus dem bereits gefundenen Integrale sofort ergiebt.

§. 3.

Man kann nun in ähnlicher Weise wie bisher von der Gleichung (6.), so von der Gleichung (9.) §. 1 ausgehen, um zur Bestimmung des Integrals:

$$\int_0^\infty r^{q-h-1} J^{(h)}(mr)\, dr$$

zu gelangen. Dieser Weg ist aber etwas mühselig, und eine strenge Rechtfertigung des Verfahrens, wenigstens für das ganze Intervall der Gültigkeit der Endformel nicht ohne Schwierigkeiten. Ich werde daher ein anderes Verfahren einschlagen, indem ich die im vorigen §. gefundenen Resultate benutze, wobei man nicht nur am schnellsten zu der Endformel in ihrer einfachsten Gestalt gelangt, sondern auch der Zulässigkeit der auszuführenden Operationen vollständig versichert ist. Es handelt sich also um die Bestimmung des Integrals:

$$(1.)\qquad \int_0^\infty r^{q-h-1} J^{(h)}(mr)\, dr,$$

welches convergent bleibt, so lange:

$$0 < q < h + \tfrac{3}{2},$$

wie man erkennt, wenn man die bekannten Grenzwerthe der Functionen $J^{(h)}$ berücksichtigt. In diesem Integral setzt man nun einer vielfach benutzten *Euler*schen Formel zu Folge:

$$\frac{1}{r^{2h+2-q}} = \frac{1}{\Gamma(h+1-\frac{1}{2}q)} \int_0^\infty s^{h-\frac{1}{2}q} e^{-r^2 s}\, ds$$

und erhält demnach:

$$(2.)\qquad \int_0^\infty r^{q-h-1} J^{(h)}(mr)\, dr = \frac{1}{\Gamma(h+1-\frac{1}{2}q)} \int_0^\infty dr \int_0^\infty s^{h-\frac{1}{2}q} r^{h+1} J^{(h)}(mr)\, e^{-r^2 s}\, ds.$$

Die weitere Entwicklung der Formel beruht nun auf der Umkehrung der Integrationsfolge des Doppelintegrals auf der rechten Seite der Gleichung (2.). Dass diese Umkehrung gestattet ist, ist zwar nicht von selbst klar, da das Integral nicht mehr convergent ist, wenn man für die Function unter dem Integralzeichen durchaus ihre absoluten Werthe setzt. Es lässt sich aber in diesem Fall leicht nachweisen, dass die Umkehrung zu richtigen Resultaten führen muss. Am einfachsten geschieht dies wohl auf folgende Weise:

Erstreckt man die Integration in Bezug auf s statt von 0 von einer positiven Grösse ε aus, so wird das Integral, wie man leicht einsieht, in ein

anderes verwandelt, welches, so lange ε von 0 merklich verschieden ist, noch convergent bleibt, wenn für die Function unter dem Zeichen die absoluten Werthe gesetzt werden, welches demnach die Umkehrung ohne Weiteres gestattet. Wenn nun die Integrale, welche man auf diese Weise erhält, für gehörig kleine Werthe von ε von den entsprechenden Integralen, in denen geradezu $\varepsilon = 0$ gesetzt ist, und zwar sowohl in der Weise genommen, wie die Formel (2.) es verlangt, als auch nachdem die Integrationsfolge umgekehrt worden ist, beliebig wenig unterschieden sind, so ist die Umkehrung der Integrationsfolge in dem Doppelintegral der Formel (2.) gestattet. Diese Stetigkeit der Integrale in Bezug auf ε ist aber für das durch die Umkehrung gewonnene Integral unmittelbar einzusehen, und auch für das in der Formel (2.) vorkommende Integral ist sie leicht nachzuweisen *).

Demnach geht nun die Gleichung (2.) in folgende über:

$$\int_0^\infty r^{q-h-1} J^{(h)}(mr)\,dr = \frac{1}{\Gamma(h+1-\frac{1}{2}q)} \int_0^\infty s^{h-\frac{1}{2}q}\,ds \int_0^\infty e^{-r^2 s} r^{h+1} J^{(h)}(mr)\,dr.$$

Die Integration in Bezug auf r lässt sich hier nun mittelst der Formel (13.) des vorigen Paragraphen ausführen, wodurch man erhält:

$$\int_0^\infty r^{q-h-1} J^{(h)}(mr)\,dr = \frac{m^h}{2^{h+1}\Gamma(h+1-\frac{1}{2}q)} \int_0^\infty e^{-\frac{m^2}{4s}} s^{-\frac{1}{2}q-1}\,ds.$$

Das nach s genommene Integral auf der rechten Seite geht aber durch die Substitution $z = \frac{1}{s}$ in eine Γ-Function über und ergiebt so die merkwürdig einfache Formel:

$$(3.)\qquad \int_0^\infty r^{q-h-1} J^{(h)}(mr)\,dr = m^{h-q}\, 2^{q-h-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}q)}{\Gamma(h+1-\frac{1}{2}q)}.$$

Diese Formel stimmt für den Fall $h = 0$ mit der von Herrn *Lipschitz* ge-

---

*) Am einfachsten führt zu diesem Beweis ein Satz, den ich einer Mittheilung des Herrn *Paul du Bois-Reymond* verdanke, und der für unseren Fall etwas specialisirt, so lautet: Sind die beiden Integrale

$$\int_R^\infty f(r)\varphi(r)\,dr, \qquad \int_R^\infty f(r)\,dr$$

convergent, und nimmt $\varphi(r)$ zwischen den Grenzen beständig ab oder beständig zu, indem es sich der Grenze 0 nähert, so ist:

$$\int_R^\infty f(r)\varphi(r)\,dr = \varphi(R)\int_R^\varrho f(r)\,dr,$$

wenn ϱ eine nicht näher bekannte, zwischen R und ∞ gelegene Grösse bedeutet.

fundenen überein, wie man mit Hülfe der bekannten *Gauss*ischen Relation zwischen den Γ-Functionen erkennt.

Ich hebe noch zwei bemerkenswerthe specielle Fälle dieser Formel hervor: den ersten derselben erhält man durch die Annahme $q=h+1$, welche immer gestattet ist. Diese Annahme ergiebt:

$$(4.)\qquad \int\limits_0^\infty J^{(h)}(mr)\,dr = \frac{1}{m}.$$

Dieses Integral hat also für die *Bessel*schen Functionen aller Ordnungen denselben Werth.

Die zweite specielle Annahme ist $h=q$, welche nur in dem Fall $h=0$ nicht gestattet ist, und führt zu dem Integral:

$$(5.)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{J^{(h)}(mr)\,dr}{r} = \frac{1}{h}.$$

Dieses Integral ist also von m unabhängig, was auch unmittelbar einzusehen ist. Als Function von m betrachtet ist dasselbe aber discontinuirlich, denn für $m=0$ hat es den Werth 0. Ist h eine ungerade Zahl, so hat das Integral zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle entgegengesetzte Werthe; ist aber h eine gerade Zahl, so sind die Werthe zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle dieselben, so dass man hier eine Function hat, welche für alle Werthe von m constant ist, nur für $m=0$ einen isolirten Werth besitzt.

§. 4.

Genau dasselbe Verfahren, was bisher auf die *Bessel*schen Functionen angewandt wurde, führt zu ganz entsprechenden Resultaten bei einer anderen Classe von Functionen, welche in der Theorie der Bewegung der Wärme in einer Kugel eine wichtige Rolle spielen, und die mit den *Bessel*schen Functionen die grösste Verwandtschaft haben, dergestalt, dass man sie geradezu bezeichnen kann mit $J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(z)$. Die in Rede stehenden Functionen gehen nämlich aus den *Bessel*schen Functionen hervor, insofern dieselben durch die Differentialgleichung definirt sind, dadurch, dass man die Ordnungszahl h in ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{2}$ verwandelt, und auch die unendliche Reihe und das bestimmte Integral

$$J^{(h)}(z) = \frac{z^h}{1.3.5\ldots(2h-1)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin^{2h}\omega\cos(z\cos\omega)\,d\omega$$

lassen sich ohne Weiteres auf diese Functionen übertragen, wenn man eine kleine, natürlich sich bietende Modification mit dem numerischen Factor, der vor dem Ganzen steht, vornimmt. Das Integral, welches die *Bessel*sche Function zuerst definirte, wird allerdings durch ein etwas anders gebildetes, aber nicht minder einfaches Integral ersetzt.

Um zu diesen Functionen zu gelangen, gehe ich aus von der auf räumliche Polarcoordinaten transformirten Gleichung (1.) §. 1 und nehme der Einfachheit halber an, die Lösung Φ dieser Gleichung sei unabhängig von dem Winkel φ, wodurch diese Gleichung die Gestalt annimmt:

$$(1.)\qquad -m^2\Phi = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right\}.$$

Nimmt man weiter an, Φ habe die Form:

$$\Phi = R^{(h)}P^{(h)}(\mu),$$

wo $P^{(h)}$ die einfache Kugelfunction $h$ter Ordnung, also eine für alle Werthe von $\vartheta = \arccos\mu$ stetige und eindeutige Function, $R^{(h)}$ eine Function von r allein bedeutet, so ergiebt sich für R die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 R^{(h)}.r}{\partial r^2}+\left(m^2-\frac{h.h+1}{r^2}\right)rR^{(h)} = 0.$$

Definirt man also eine Function $S^{(h)}(r)$ durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad \frac{\partial^2 S^{(h)}}{\partial r^2}+\left(1-\frac{h.h+1}{r^2}\right)S^{(h)} = 0$$

und durch die Bedingung, dass die Function $S^{(h)}$ durchaus endlich und stetig und für $r=0$ mindestens wie die erste Potenz von r verschwinden soll, wodurch S bis auf einen constanten Factor bestimmt ist, so erhält man

$$R^{(h)} = A\cdot\frac{S^{(h)}(mr)}{r}$$

und hat damit eine Lösung der Gleichung (1.), welche den Bedingungen des am Anfang aufgestellten Satzes genügt. Setzt man noch

$$(3.)\qquad S^{(h)}(r) = \sqrt{r}\,J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(r),$$

so erhält man für die Function J die Differentialgleichung:

$$(4.)\qquad \frac{\partial^2 J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}}{\partial r}+\left(1-\frac{\left(\frac{2h+1}{2}\right)^2}{r^2}\right)J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)} = 0,$$

welche mit der Differentialgleichung der *Bessel*schen Functionen übereinstimmt.

Für die Function S lassen sich nun verschiedene Ausdrücke aufstellen, welche sich durch Substitution in die Differentialgleichung leicht verificiren lassen: Man erhält, wenn man den constanten Factor in den Functionen S in geeigneter Weise bestimmt:

$$(5.)\qquad S^{(h)}(r) = \frac{r}{2i^h}\int_{-1}^{+1} P^{(h)}(\mu)e^{ir\mu}\,d\mu,$$

$$(6.)\qquad S^{(h)}(r) = \frac{r^{h+1}}{2.4.6\ldots 2h}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2h+1}\omega\cos(r\cos\omega)\,d\omega \text{ *)}.$$

Die Uebereinstimmung der beiden Ausdrücke lässt sich leicht durch eine partielle Integration nachweisen, wenn man für die Kugelfunction P den bekannten Ausdruck durch einen $h$fachen Differentialquotienten einsetzt. Ferner ergiebt sich aus jedem der beiden Ausdrücke (5.), (6.) für S die stets convergente Entwicklung:

$$(7.)\qquad S^{(h)}(r) = \frac{r^{h+1}}{1.3.5\ldots 2h+1}\left\{1-\frac{r^2}{2.2h+3}+\frac{r^4}{2.4.2h+3.2h+5}-\cdots\right\}.$$

Man sieht, dass sowohl das Integral (6.) als die Reihe (7.), wenn man dieselben durch $\sqrt{r}$ dividirt, aus den entsprechenden Ausdrücken für $J^{(h)}(r)$ hervorgehen durch Vertauschung von h mit $\frac{2h+1}{2}$, abgesehen von dem etwas veränderten constanten Factor.

Ausserdem lassen sich die Functionen $S^{(h)}(r)$ noch durch geschlossene Reihen ausdrücken, auf die es mir hier aber nicht weiter ankommt, nur bemerke ich noch, dass zwischen den Functionen $S^{(h)}$ oder $J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}$ genau dieselbe Recursionsformel besteht, wie zwischen den *Bessel*schen Functionen mit ganzzahligem Index, nämlich:

$$\frac{2h+1}{r}S^{(h)}(r) = S^{(h-1)}(r)+S^{(h+1)}(r),$$

$$\frac{2h+1}{r}J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(r) = J^{\left(\frac{2h-1}{2}\right)}(r)+J^{\left(\frac{2h+3}{2}\right)}(r),$$

welche sich aus jedem der oben gegebenen Ausdrücke für diese Functionen leicht herleiten lassen. Demnach können die Functionen S alle linear ausgedrückt werden durch die beiden ersten derselben:

$$S^{(0)} = \sin r,\quad S^{(1)} = \frac{\sin r}{r}-\cos r.$$

---

*) Diese Ausdrücke für die Function S sind mir bekannt aus einer Vorlesung des Herrn Prof. *Neumann* zu Königsberg.

§. 5.

Ich benutze nun ganz wie oben die Formel (6.) §. 1 zur Ableitung gewisser bestimmter Integrale, die von den Functionen $J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(r)$ abhängen. Zu dem Ende mache ich in der Formel (6.) die Annahme:

$$x = y = 0,$$
$$\Phi(abc) = \frac{1}{\sqrt{r}} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr) P^{(h)}(\mu),$$
$$\Phi(xyz) = \frac{1}{\sqrt{z}} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mz),$$

wonach durch Einführung von Polarcoordinaten unter dem Integralzeichen die Formel (6.) die Gestalt annimmt:

$$(8.)\quad \begin{cases} 2\pi e^{-p^2z^2}\int_0^\infty r^{\frac{3}{2}} e^{-p^2r^2} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr)\,dr \int_{-1}^{+1} P^{(h)}(\mu)\, e^{2p^2rz\mu}\,d\mu \\ \qquad = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{p^3} e^{-\frac{m^2}{4p^2}} . \frac{1}{\sqrt{z}} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mz). \end{cases}$$

Die Integration in Bezug auf μ lässt sich hier mittelst der Formel (5.) ausführen, und man erhält, wenn man:

$$2p^2z = n$$

setzt:

$$(9.)\quad \int_0^\infty r e^{-p^2r^2} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr) J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(-inr)\,dr = \frac{\sqrt{2\pi}(-i)^{\frac{2h+1}{2}}}{4p^2} e^{-\frac{m^2-n^2}{4p^2}} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}\left(\frac{mn}{2p^2}\right),$$

worin wieder wie oben m und n nicht nothwendig reell zu sein brauchen. Lässt man nun hierin n gegen 0 abnehmen, indem man für die beiden von n abhängigen Functionen J die ersten Glieder der Reihenentwicklung setzt, so erhält man die der Formel (13.) §. 2 entsprechende Formel:

$$(10.)\quad \int_0^\infty r^{\frac{2h+3}{2}} e^{-p^2r^2} J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr)\,dr = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\, m^{\frac{2h+1}{2}}}{(2p^2)^{\frac{2h+3}{2}}} e^{-\frac{m^2}{4p^2}},$$

welche bis auf den Factor $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ mit jener übereinstimmt. Für die beiden Fälle $h=0$ und $h=1$ lässt sich diese Formel leicht mit Hülfe der bekannten Integrale verificiren.

Es soll nun in ähnlicher Weise wie in §. 3 das Integral

$$(11.)\quad \int_0^\infty r^{q-\frac{2h+3}{2}} J^{\frac{2h+1}{2}}(mr)\,dr$$

aus dem soeben gefundenen abgeleitet werden. Das Integral (11.) behält einen Sinn, so lange

$$0 < q < h+2.$$

Man setzt genau wie im §. 3

$$\frac{1}{r^{2h+3-q}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2h+3-q}{2}\right)}\int_0^\infty s^{\frac{2h+1-q}{2}} e^{-r^2 s} ds$$

und verfährt ganz in derselben Weise wie dort, indem man von der Formel (10.) Gebrauch macht, und gelangt so zu dem Resultat:

$$(12.)\quad \int_0^\infty r^{q-\frac{2h+3}{2}} J^{\frac{2h+1}{2}}(mr)\,dr = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\, m^{\frac{2h+1}{2}-q}\, 2^{q-\frac{2h+3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}q)}{\Gamma\left(\frac{2h+3-q}{2}\right)},$$

was wieder, abgesehen von dem Factor, $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ mit der Gleichung (3.) §. 3 übereinstimmt.

Macht man wieder dieselben speciellen Annahmen wie oben, indem man $q = \frac{2h+3}{2}$ und $q = \frac{2h+1}{2}$ setzt, so erhält man die beiden Integrale:

$$(13.)\quad \int_0^\infty J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr)\,dr = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\cdot\frac{1}{m},$$

$$(14.)\quad \int_0^\infty J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr)\frac{dr}{r} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\cdot\frac{2}{2h+1}.$$

Diese Formeln sind nur dann völlig unzweifelhaft, wenn m reell und positiv ist. Soll m auch imaginär sein, so muss der reelle Theil von m^2 positiv sein, und dann sind die Potenzen von m in einer ganz bestimmten Weise zu erklären. Ist z. B. m negativ, so ist in der Formel (12.) an Stelle von $m^{\frac{2h+1}{2}-q}$ zu setzen:

$$m^{\frac{2h+1}{2}}(-m)^{-q} = (-1)^{\frac{2h+1}{2}}(-m)^{\frac{2h+1}{2}-q},$$

wo das Zeichen $(-1)^{\frac{2h+1}{2}}$ in demselben Sinne zu nehmen ist, wie in der nunmehr auch zweideutigen Function $J^{\frac{2h+1}{2}}(mr)$. Für negative Werthe von m werden also die Formeln (13.), (14.):

$$\int_0^\infty J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr)\,dr = (-1)^{\frac{2h+1}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.\frac{1}{-m},$$

$$\int_0^\infty J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}(mr)\frac{dr}{r} = (-1)^{\frac{2h+1}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.\frac{2}{2h+1},$$

während für $m = 0$ beide Integrale verschwinden.

Ich hebe endlich noch einen dritten speciellen Fall hervor, den man durch die Annahme $q = h+1$ erhält. Ersetzt man dann in der Formel (12.) die Functionen $J^{\left(\frac{2h+1}{2}\right)}$ durch die Function $S^{(h)}$, so ergiebt sich:

$$(15.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{S^{(h)}(mr)}{r}\,dr = \frac{1}{2}\pi\,\frac{1.3.5\ldots h-1}{2.4.6\ldots h} & h \text{ gerade} \\ \int_0^\infty \frac{S^{(h)}(mr)}{r}\,dr = \frac{2.4.6\ldots h-1}{1.3.5\ldots h} & h \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Integrale gehen für die Fälle $h = 0$ und $h = 1$ in bekannte Integrale über; sie sind, wie man sieht, für $m = 0$ unstetig, und zwar so, dass zu beiden Seiten der Unstetigkeit bei geradem h die entgegengesetzten, bei ungeradem die nämlichen Werthe stattfinden.

Heidelberg, im Januar 1868.

Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

(Von Herrn *A. Mayer* in Leipzig.)

Die folgenden Untersuchungen bringen im Wesentlichen nur dieselben Resultate, die ich schon vor zwei Jahren in meiner Habilitationsschrift *) veröffentlicht habe. Auch die Schlussweise ist nicht wesentlich verändert worden.

Es sind aber in der angeführten Schrift einzelne Ungenauigkeiten unterlaufen und manche Umwege gemacht worden, die man vermeiden kann. Diese Mängel machen es mir wünschenswerth, denselben Gegenstand in etwas veränderter Form und mit Auslassung solcher Betrachtungen, die für die Hauptfrage nicht unbedingt nothwendig sind, hier noch einmal zu behandeln.

Der Vollständigkeit und des Zusammenhanges wegen kann die Auseinandersetzung derjenigen Umformungen, durch welche erst die zweite Variation eine zur Untersuchung ihres Zeichens zweckmässige Gestalt erhält, nicht wohl umgangen werden. Zur Ableitung dieser Formeln von Herrn *Clebsch* **) werde ich mich im Folgenden der sinnreichen Methode bedienen, die Herr *Lipschitz* in der Abhandlung „Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale" ***) mitgetheilt hat, und die bisher noch nicht ausgedehnt worden ist auf den Fall der relativen Maxima und Minima.

§. 1.

Als die allgemeinste Aufgabe der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln lässt sich bekanntlich, indem man alle anderen hierauf zurückführen kann, die folgende betrachten:

Man soll die den m Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(1.)\qquad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \dots\quad \varphi_m = 0$$

*) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig. *Teubner* 1866.

**) Bd. 55, pag. 254 und pag. 335 dieses Journales.

***) Bd. 65 pag. 26 dieses Journales.

unterworfenen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ als Functionen von x so bestimmen, dass das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x y_1 y_1' y_2 y_2' \ldots y_n y_n') \, dx$$

ein Maximum oder Minimum werde.

Dabei muss selbstverständlich $m < n$ sein. Es müssen überdies, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, noch gewisse Grenzbedingungen gegeben sein. Ich nehme an, dass die Grenzen x_0 und x_1, sowie die Grenzwerthe der Variabeln y sämmtlich gegeben seien. Durch Theilung der Aufgabe kann man alle übrigen Fälle auf diesen zurückführen.

Nach dem Vorgange von *Lagrange* betrachtet man an Stelle des vorgelegten Problems das folgende:

Die Functionen y so zu bestimmen, dass das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \Omega \, dx$$

ein Maximum oder Minimum werde, worin

$$(2.) \qquad \Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

und die λ unbestimmte Functionen von x sind, über die man hierauf so zu verfügen hat, dass den gegebenen Bedingungen (1.) genügt wird. Dieses Problem ist dem ersteren aequivalent, wenn man noch hinzufügt, dass überhaupt nur solche Functionen y in Betracht gezogen werden sollen, welche diese Bedingungen erfüllen.

Setzt man allgemein:

$$y_h + \varepsilon \mathfrak{z}_h \quad \text{statt} \quad y_h,$$

wo ε eine genügend kleine Zahl und die $\mathfrak{z}$ willkürliche Functionen von x bedeuten, die jedoch nebst ihren Differentialquotienten $\mathfrak{z}'$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und stetig sein müssen, und entwickelt sodann das Integral J nach Potenzen von ε, so geht dasselbe unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung ε^3 über in:

$$J + \varepsilon \delta J + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta^2 J,$$

während sich, da stets nur solche Functionen y zu berücksichtigen sind, welche den Gleichungen (1.) genügen, für die Variationen $\mathfrak{z}$ die m Bedingungsgleichungen ergeben:

$$(3.) \qquad \delta \varphi_k = \sum_1^n {}_h \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h} \mathfrak{z}_h + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'} \mathfrak{z}_h' \right\} = 0.$$

Da ferner die Grenzwerthe der Variabeln y unverändert bleiben sollen, so müssen die Functionen $\mathfrak{z}$ überdies noch in den Grenzen x_0 und x_1 den Werth Null annehmen.

Soll nun ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrals V oder J vorliegen, so muss für alle beliebigen Variationen $\mathfrak{z}$, welche den angegebenen Bedingungen genügen, die erste Variation δJ verschwinden und die zweite Variation $\delta^2 J$ ein constantes Vorzeichen besitzen.

Die erstere Bedingung führt auf die $n+m$ Differentialgleichungen:

$$(4.)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h}, \qquad \varphi_k = 0.$$

Aus denselben ergeben sich durch Integration die $n+m$ Unbekannten y und λ als Functionen von x und von einer gewissen Anzahl willkürlicher Constanten, welche so zu bestimmen sind, dass die Lösungen y in den beiden Grenzen den gegebenen Grenzwerthen gleich werden.

Damit eine solche Constantenbestimmung möglich sei, müssen die Lösungen y $2n$ von einander unabhängige willkürliche Constanten enthalten. Diese Voraussetzung wird daher dem Folgenden zu Grunde gelegt. Sie kann jedenfalls nur dann erfüllt sein, wenn das System Differentialgleichungen (4.) von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist, und hierzu ist, wie man leicht sieht, nothwendig und hinreichend, dass die Determinante:

$$(5.)\qquad R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_n \partial y'_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_1 \partial y'_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_n \partial y'_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null sei.

Da somit das identische Verschwinden dieser Determinante durch die zu Grunde gelegte Voraussetzung ausgeschlossen wird, so kann man aus den $n+m$ Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h} = v_h, \qquad \varphi_k = 0$$

die $n+m$ Grössen y' und λ bestimmen als Functionen der y und v und folglich das System (4.) ersetzen durch die $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(6.)\qquad \frac{dy_h}{dx}=\frac{\partial H}{\partial v_h},\qquad \frac{dv_h}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y_h},$$

in denen H diejenige Function der y und v bezeichnet, welche durch Einführung der Werthe der y' aus dem Ausdrucke

$$\sum_1^n{}_h\, y'_h v_h - f$$

hervorgeht.

Ich nehme an, dass man die Differentialgleichungen (4.) oder (6.) vollständig integrirt habe, und will mit:

$$(7.)\qquad y_h=[y_h],\qquad \lambda_k=[\lambda_k]$$

die allgemeinen Lösungen der ersteren bezeichnen, sowie überhaupt durch Einschliessung in eckige Klammern die Substitution dieser Lösungen angedeutet werden soll.

Aus ihnen erhält man als vollständige Lösungen des Systems (6.):

$$(8.)\qquad y_h=[y_h],\qquad v_h=\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y'_h}\right]=[v_h].$$

Die $2n$ Integrationsconstanten der Lösungen $[y]$ und $[\lambda]$ mögen mit

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots\quad a_{2n}$$

bezeichnet werden. Sie sind so zu bestimmen, dass die n Functionen $[y_h]$ für $x=x_0$ und $x=x_1$ die gegebenen Grenzwerthe y_{h0} und y_{h1} erhalten, und daher in der Folge als bestimmte, durch diese Grenzwerthe gegebene Grössen zu betrachten. Bei bestimmten, besonderen Werthannahmen der y_{h0} und y_{h1}, z. B. wenn man dieselben sämmtlich $=0$ setzen wollte, könnten hier sowie später gewisse specielle Ausnahmefälle eintreten. Von diesen werde ich immer absehen und demnach Beispielsweise annehmen, dass die Determinante $[R]$, die aus R durch die Substitutionen (7.) entsteht, auch nach Einführung jener bestimmten Werthe der Integrationsconstanten verschieden von Null sei. Diese Annahme ist zulässig. Denn da die Determinante R an sich nicht Null sein soll und in ihr die zweiten Differentialquotienten der y, sowie die ersten der λ gar nicht vorkommen, so kann auch die vollständige Integration der Gleichungen (4.) niemals allgemein die Gleichung $R=0$ zur Folge haben.

§. 2.

Um nun zu entscheiden, ob die Lösungen (7.) das gegebene Integral zu einem wirklichen relativen Maximum oder Minimum machen, muss das Zeichen der zweiten Variation $\delta^2 J$ untersucht werden.

Nennt man $2\delta^2\Omega$ diejenige homogene Function zweiter Ordnung der $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$, welche aus Ω entsteht, wenn man allgemein $[y_h]+\varepsilon\mathfrak{z}_h$ an die Stelle von y_h treten lässt und in der Entwicklung nach Potenzen von ε den Coefficienten von $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ nimmt, so ist:

$$(9.)\qquad \delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\delta^2\Omega\, dx.$$

Um das Zeichen dieses Ausdruckes untersuchen zu können, ist es im Allgemeinen nöthig, die Function $2\delta^2\Omega$ und mit ihr zugleich die Bedingungen (3.) auf eine einfachere Form zu bringen.

Es wird sich zeigen, dass man diese Function darstellen kann als ein Aggregat dreier Functionen, einer homogenen Function zweiter Ordnung von nur n Argumenten $r_1, r_2, \dots r_n$, welche lineare Functionen der $\mathfrak{z}$ und ihrer Differentialquotienten sind, dem Differentialquotienten einer homogenen Function zweiter Ordnung der $\mathfrak{z}$ und endlich einer in Bezug auf die $\delta\varphi_k$ linearen homogenen Function, während sich die $\delta\varphi_k$ selbst in lineare homogene Functionen der r_i verwandeln.

Statt der Function $2\delta^2\Omega$ werden wir zunächst eine andere Function betrachten, die Function nämlich:

$$(10.)\quad \begin{cases} 2\Omega_2 = 2\sum_1^m{}_k\mu_k\sum_1^n{}_h\left\{\left[\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y_h}\right]\mathfrak{z}_h+\left[\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y'_h}\right]\mathfrak{z}'_h\right\} \\ \qquad +\sum_1^n{}_h\sum_1^n{}_i\left\{\left[\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y_h\partial y_i}\right]\mathfrak{z}_h\mathfrak{z}_i+2\left[\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y_h\partial y'_i}\right]\mathfrak{z}_h\mathfrak{z}'_i+\left[\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h\partial y'_i}\right]\mathfrak{z}'_h\mathfrak{z}'_i\right\}, \end{cases}$$

welche der Coefficient von $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ in der Entwickelung derjenigen Function ist, welche man aus Ω erhält, wenn man die Variabeln y und λ durch die Grössen $[y]+\varepsilon\mathfrak{z}$ und $[\lambda]+\varepsilon\mu$ ersetzt.

Die Functionen $2\delta^2\Omega$ und $2\Omega_2$ stehen in dem Zusammenhange:

$$(11.)\qquad 2\delta^2\Omega = 2\Omega_2-2\sum_1^m{}_k\mu_k\delta\varphi_k.$$

Man kann daher auch an Stelle der Function $2\delta^2\Omega$ die Function $2\Omega_2$ umformen und behält dann noch die Freiheit, über die Grössen μ nach Belieben verfügen zu können.

Zu dieser Umformung werden die Lösungen eines gewissen Systems von Differentialgleichungen gebraucht, das mit dem System (4.) in engem Zusammenhange steht.

Differentiirt man die durch die Substitutionen (7.) identischen Gleichungen (4.) nach der Constanten a_i, so erhält man wiederum identische Gleichungen, und diese Gleichungen lassen sich, wenn man allgemein unter $\Omega_2(\xi, \nu)$ den Werth versteht, den die Function Ω_2 für die Werthe ξ_h, ν_k der $\mathfrak{z}_h$, μ_k annimmt, also darstellen:

$$\frac{\partial \Omega_2\left(\frac{\partial [y]}{\partial a_i}, \frac{\partial [\lambda]}{\partial a_i}\right)}{\partial \frac{\partial [y_h]}{\partial a_i}} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2\left(\frac{\partial [y]}{\partial a_i}, \frac{\partial [\lambda]}{\partial a_i}\right)}{\partial \frac{\partial [y_h]'}{\partial a_i}}, \qquad \frac{\partial \Omega_2\left(\frac{\partial [y]}{\partial a_i}, \frac{\partial [\lambda]}{\partial a_i}\right)}{\partial \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_i}} = 0.$$

Man erkennt hieraus, dass die Ausdrücke

$$(12.) \qquad u_h = \sum_1^{2n} {}_i \gamma_i \frac{\partial [y_h]}{\partial a_i}, \qquad r_k = \sum_1^{2n} {}_i \gamma_i \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_i}$$

mit den $2n$ willkürlichen Constanten γ die allgemeinen Lösungen der linearen Differentialgleichungen sind:

$$(13.) \qquad \frac{\partial \Omega_2(u, r)}{\partial u_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2(u, r)}{\partial \frac{du_h}{dx}}, \qquad \frac{\partial \Omega_2(u, r)}{\partial r_k} = 0,$$

zu denen man auch gelangt, wenn man die zweite Variation $\delta^2 J$ selbst als ein Integral betrachtet, dessen Maximum oder Minimum gesucht wird.

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen besitzen zwei, für uns äusserst wichtige Eigenschaften.

Zunächst hat man, indem $2\Omega_2$ eine homogene Function zweiter Ordnung der $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$ und μ ist:

$$2\Omega_2 = \sum_1^n {}_h \left\{ \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h} \mathfrak{z}_h + \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h'} \mathfrak{z}_h' \right\} + \sum_1^m {}_k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} \mu_k$$

$$= \sum_1^n {}_h \left\{ \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h'} \right\} \mathfrak{z}_h + \frac{d}{dx} \sum_1^n {}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h'} \mathfrak{z}_h + \sum_1^m {}_k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} \mu_k.$$

Daraus folgt, dass jedes System Lösungen der Gleichungen (13.) die Gleichung identisch erfüllt:

$$(14.) \qquad 2\Omega_2(u, r) = \frac{d}{dx} \sum_1^n {}_h u_h \frac{\partial \Omega_2(u, r)}{\partial \frac{du_h}{dx}}.$$

Ferner findet für irgend zwei verschiedene Systeme Lösungen dieser Dif-

ferentialgleichungen. u, r und ω, τ, identisch die Gleichung statt:

$$\sum_1^n \left(\omega_i \frac{\partial \Omega_2(u,r)}{\partial u_i} + \frac{d\omega_i}{dx} \frac{\partial \Omega_2(u,r)}{\partial \frac{du_i}{dx}} \right) + \sum_1^m \tau_k \frac{\partial \Omega_2(u,r)}{\partial r_k} = \frac{d}{dx} \sum_1^n \omega_h \frac{\partial \Omega_2(u,r)}{\partial \frac{du_h}{dx}},$$

sowie diejenige, welche aus dieser entsteht, wenn man die u, r und ω, τ mit einander vertauscht. Nach einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen zweiter Ordnung bleibt aber bei dieser Vertauschung der erste Theil der obigen Gleichung ungeändert. Es muss daher auch:

$$\frac{d}{dx} \sum_1^n \omega_i \frac{\partial \Omega_2(u,r)}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \frac{d}{dx} \sum_1^n u_h \frac{\partial \Omega_2(\omega,\tau)}{\partial \frac{d\omega_h}{dx}}$$

sein, woraus durch Integration folgt:

$$15. \qquad \sum_1^n \left(\omega_i \frac{\partial \Omega_2(u,r)}{\partial \frac{du_i}{dx}} - u_i \frac{\partial \Omega_2(\omega,\tau)}{\partial \frac{d\omega_i}{dx}} \right) = \text{const.}$$

Zur Umformung der Function Ω_2 benutzen wir n Systeme vollständiger Lösungen der Gleichungen (13.):

$$16. \qquad u_h^e = \sum_1^n \gamma_i^e \frac{\partial y_h}{\partial a_i}, \qquad r_k^e = \sum_1^n \gamma_i^e \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_i}$$

und führen, statt der $n+m$ Grössen ζ und μ, n neue Variable g ein vermittelst der $n+m$ Gleichungen

$$17. \qquad \zeta_h = \sum_1^n g_e u_h^e, \qquad \mu_k = \sum_1^n g_e r_k^e,$$

mit andern Worten wir setzen für die μ gewisse lineare Functionen der ζ.

Aus diesen Substitutionen ergiebt sich:

$$18. \qquad \begin{cases} \dfrac{d\zeta_h}{dx} = \xi_h + \eta_h, \\ \xi_h = \sum_1^n g_e \dfrac{du_h^e}{dx}, \\ \eta_h = \sum_1^n \dfrac{dg_e}{dx} u_h^e. \end{cases}$$

Es kommt nun hauptsächlich darauf an, die Function Ω_2^0 zu bilden, welche entsteht, wenn man in Ω_2 den ζ und μ die Werthe (17.) giebt, die $\frac{d\zeta}{dx}$ aber nicht $= \xi + \eta$, sondern nur $= \xi$ annimmt.

Zu diesem Ende bemerke man, dass, wenn die neuen Variabeln g Constanten wären, die Ausdrücke (17.) Lösungen der Differentialgleichungen

(13.) sein würden und man daher nach (14.) haben würde:

$$2\Omega_2^0 = \frac{d}{dx}\sum_1^n {}_h \left\{ \sum_1^n {}_\sigma g_\sigma u_h^\sigma \sum_1^n {}_\varrho g_\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} \right\}.$$

Weil nun aber die Function $2\Omega_2^0$ die Differentialquotienten der g gar nicht enthält und folglich dieselbe Gestalt behalten muss, gleichviel ob die Grössen g Constanten oder Functionen von x sind, so gilt die vorstehende Gleichung für alle beliebigen Werthe dieser Grössen, sobald man nur auf der rechten Seite die angedeutete Differentiation nach x so ausführt, als ob die g unabhängig von x wären. Dies kann man aber auch dadurch erreichen, dass man die g als Functionen von x betrachtet und rechter Hand diejenigen Glieder abzieht, welche von der Differentiation der g nach x herrühren. Hiernach findet für alle beliebigen Werthe der g die Gleichung statt:

$$(19.)\quad \begin{cases} 2\Omega_2^0 = \dfrac{d}{dx}\sum_1^n {}_h \left\{ \sum_1^n {}_\sigma g_\sigma u_h^\sigma \sum_1^n {}_\varrho g_\varrho \dfrac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} \right\} \\ \qquad - \sum_1^n {}_h \left\{ \sum_1^n {}_\sigma \dfrac{dg_\sigma}{dx} u_h^\sigma \sum_1^n {}_\varrho g_\varrho \dfrac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} \right\} \\ \qquad - \sum_1^n {}_h \left\{ \sum_1^n {}_\sigma g_\sigma u_h^\sigma \sum_1^n {}_\varrho \dfrac{dg_\varrho}{dx} \dfrac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} \right\}. \end{cases}$$

Der Werth, den die Function $2\Omega_2$ durch die Substitutionen (17.) annimmt, entsteht nun aus $2\Omega_2^0$ dadurch, dass man darin allgemein:

$$\zeta_h + \eta_h \quad \text{statt} \quad \zeta_h$$

setzt. Da ζ_h in $2\Omega_2^0$ nur in der ersten und zweiten Potenz vorkommt, so erhält man:

$$(20.)\qquad 2\Omega_2 = 2\Omega_2^0 + 2\sum_1^n {}_h \frac{\partial \Omega_2^0}{\partial \zeta_h}\eta_h + \overline{\sum_h \sum_i}_1^n \frac{\partial^2 \Omega_2^0}{\partial \zeta_h \partial \zeta_i}\eta_h \eta_i.$$

Aus der ursprünglichen Definition der Function Ω_2^0 ergiebt sich aber sofort:

$$\frac{\partial \Omega_2^0}{\partial \zeta_h} = \sum_1^n {}_\varrho g_\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}}.$$

Nach (17.), (18.) und (19.) wird daher:

$$2\Omega_2^0 + 2\sum_1^n{}_h \frac{\partial \Omega_2^0}{\partial \zeta_h}\eta_h = \frac{d}{dx}\sum_1^n{}_h \mathfrak{z}_h \sum_1^n{}_\varrho g_\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}}$$

$$+\sum_1^n{}_h \left\{ \sum_1^n{}_\sigma \frac{dg_\sigma}{dx} u_h^\sigma \sum_1^n{}_\varrho g_\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} \right\}$$

$$-\sum_1^n{}_h \left\{ \sum_1^n{}_\sigma g_\sigma u_h^\sigma \sum_1^n{}_\varrho \frac{dg_\varrho}{dx} \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} \right\}.$$

Die beiden letzten Glieder lassen sich zusammengefasst also schreiben:

$$\overline{\sum_1^n{}_\sigma \sum{}_\varrho} g_\varrho \frac{dg_\sigma}{dx} \sum_1^n{}_h \left\{ u_h^\sigma \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} - u_h^\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial \frac{du_h^\sigma}{dx}} \right\}.$$

Unterwirft man daher die eingeführten n Systeme Lösungen der Differentialgleichungen (13.) den $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen:

$$(21.)\qquad \sum_1^n{}_h \left\{ u_h^\sigma \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} - u_h^\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial \frac{du_h^\sigma}{dx}} \right\} = 0,$$

die nach (15.) unabhängig von x sind und folglich nur Bedingungsgleichungen zwischen den $2n^2$ Constanten γ_h^ϱ ergeben, so fallen jene beiden letzten Glieder weg, und man erhält, indem offenbar:

$$\frac{\partial^2 \Omega_2^0}{\partial \zeta_h \partial \zeta_i} = \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h' \partial \mathfrak{z}_i'} = \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right]$$

ist:

$$2\Omega_2 = \frac{d}{dx}\sum_1^n{}_h \mathfrak{z}_h \sum_1^n{}_\varrho g_\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} + \overline{\sum_1^n{}_h \sum{}_i} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right]\eta_h \eta_i.$$

Wir sind somit zu der folgenden Transformation der Function $2\delta^2\Omega$ gelangt:

$$2\delta^2 \Omega = \overline{\sum_1^n{}_h \sum{}_i} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right]\eta_h \eta_i + \frac{d}{dx}\sum_1^n{}_h \mathfrak{z}_h \sum_1^n{}_\varrho g_\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial \frac{du_h^\varrho}{dx}} - 2\sum_1^m{}_k \mu_k \delta\varphi_k,$$

worin die Grössen g, μ und η definirt werden durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{z}_h = \sum_1^n{}_\sigma u_h^\sigma g_\sigma, \qquad \mu_k = \sum_1^n{}_\sigma r_k^\sigma g_\sigma, \qquad \eta_h = \frac{d\mathfrak{z}_h}{dx} - \sum_1^n{}_\sigma g_\sigma \frac{du_h^\sigma}{dx}.$$

Gleichzeitig sind aber auch die Ausdrücke $\delta\varphi_k$ umgeformt worden. Setzt man nämlich in denselben für die $\mathfrak{z}$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dx}$ die vorstehenden Werthe ein, so gehen sie über in:

$$\delta\varphi_k = \sum_1^n{}_\sigma\, g_\sigma \sum_1^n{}_h \left\{\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_h}\right]u_h^\sigma + \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_h}\right]\frac{du_h^\sigma}{dx}\right\} + \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_h}\right]\eta_h.$$

Hierin ist aber der Coefficient von g_σ

$$= \frac{\partial\Omega_1(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial r_k^\sigma}$$

und mithin nach (13.) $=0$, so dass sich die Formel reducirt auf:

$$\delta\varphi_k = \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_h}\right]\eta_h.$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, Alles in den $\mathfrak{z}$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dx}$ auszudrücken. Nach (17.) hat man zunächst:

$$\mathfrak{z}_i = u_i^1 g_1 + u_i^2 g_2 + \cdots + u_i^n g_n.$$

Setzt man hierin $i = 1, 2, \ldots n$ und verbindet diese n Gleichungen mit der aus (18.) entspringenden Gleichung:

$$-\eta_h + \frac{d\mathfrak{z}_h}{dx} = \frac{du_h^1}{dx}g_1 + \frac{du_h^2}{dx}g_2 + \cdots + \frac{du_h^n}{dx}g_n,$$

so erhält man durch Elimination der g:

$$(22.)\qquad U.\eta_h = \begin{vmatrix} \frac{d\mathfrak{z}_h}{dx} & \frac{du_h^1}{dx} & \cdots & \frac{du_h^n}{dx} \\ \mathfrak{z}_1 & u_1^1 & \cdots & u_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{z}_n & u_n^1 & \cdots & u_n^n \end{vmatrix} = U_h,$$

worin:

$$(23.)\qquad U = \Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n.$$

Auf ganz analoge Weise ergiebt sich:

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} & U \sum_1^n{}_\varrho\, g_\varrho \sum_1^n{}_h\, \mathfrak{z}_h \frac{\partial\Omega_1(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial\frac{du_h^\varrho}{dx}} \\ & = -\begin{vmatrix} 0 & \sum_1^n{}_h\,\mathfrak{z}_h \frac{\partial\Omega_1(u^1, r^1)}{\partial\frac{du_h^1}{dx}} & \cdots & \sum_1^n{}_h\,\mathfrak{z}_h \frac{\partial\Omega_1(u^n, r^n)}{\partial\frac{du_h^n}{dx}} \\ \mathfrak{z}_1 & u_1^1 & \cdots & u_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{z}_n & u_n^1 & \cdots & u_n^n \end{vmatrix} = -2B, \end{aligned}\right.$$

und endlich findet man, wenn man zum Ueberfluss auch noch die Werthe der μ kennen lernen will, auf demselben Wege aus der zweiten Gleichung (17.):

$$(25.)\qquad U.\mu_k = -\begin{vmatrix} 0 & r_k^1 & \dots & r_k^n \\ \mathfrak{z}_1 & u_1^1 & \dots & u_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{z}_n & u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix} = -R_k,$$

so dass man schliesslich die Formel von Herrn *Clebsch* erhält:

$$(26.)\qquad 2\delta^2\Omega = \sum_1^n{}_h\sum{}_i\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_h'\partial y_i'}\right]\frac{U_h U_i}{U^2} - \frac{d}{dx}\,\frac{2B}{U} + 2\sum_1^m{}_k\frac{R_k}{U}\,\delta\varphi_k.$$

Da gleichzeitig:

$$(27.)\qquad \delta\varphi_k = \sum_1^n{}_h\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_h'}\right]\frac{U_h}{U}$$

geworden ist, so sieht man, dass die erhaltene Umformung Alles leistet, was im Eingange dieses §. in Aussicht gestellt wurde.

Die Definition der darin auftretenden Grössen ist in den Formeln (22.), (23.), (24.), (25.) und (16.) enthalten.

§. 3.

Die Formeln (26.), (27.) gelten identisch für alle Werthe der $2n^2$ Constanten γ_i^σ, welche den $\frac{n(n-1)}{2}$, von x unabhängigen Bedingungsgleichungen:

$$(21.)\qquad \sum_1^n{}_h\left\{u_h^\sigma\frac{\partial\Omega_2(u^\varrho, r^\varrho)}{\partial\frac{du_h^\varrho}{dx}} - u_h^\varrho\frac{\partial\Omega_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial\frac{du_h^\sigma}{dx}}\right\} = 0$$

genügen und für welche die Determinante

$$U = \Sigma\pm u_1^1 u_2^2\dots u_n^n$$

nicht identisch Null ist.

Es handelt sich nun darum, diese Constanten wirklich den genannten Forderungen gemäss zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass die Integrationsconstanten a der Lösungen $[y]$ und $[\lambda]$ s. g. canonische Constanten seien, hat Herr *Clebsch* die allgemeinsten Werthe der γ_i^σ angegeben, welche diesen Bedingungen genügen. Für unsern Zweck aber ist es gar nicht nöthig, diese allgemeinsten Werthe kennen zu lernen; wir werden vielmehr nur ein ganz bestimmtes, besonderes System Werthe der γ_i^σ benutzen.

Um dasselbe ausfindig zu machen, erinnere ich daran, dass:

$$(8.)\qquad y_h = [y_h], \qquad v_h = [v_h] = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h}\right]$$

die vollständigen Lösungen des Systems Differentialgleichungen sind:

$$(6.)\qquad \frac{dy_h}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_h}, \qquad \frac{dv_h}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_h}.$$

Die $2n$ Gleichungen (8.) müssen sich daher nothwendig auflösen lassen nach den $2n$ Integrationsconstanten

$$a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{2n}.$$

Seien:

$$(a_1),\ (a_2),\ \dots\ (a_{2n})$$

die hierdurch erhaltenen Werthe. Setzt man dieselben rückwärts in die Gleichungen (8.) ein, so werden dieselben identisch und können daher nach den y und v differentiirt werden. Thut man dies und substituirt nach der Differentiation für die y und v ihre Werthe (8.), so erhält man das folgende System identischer Gleichungen:

$$(28.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_h}{\partial y_\sigma} = \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial [y_h]}{\partial a_i}\left[\dfrac{\partial (a_i)}{\partial y_\sigma}\right], \\ 0 = \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial [y_h]}{\partial a_i}\left[\dfrac{\partial (a_i)}{\partial v_\sigma}\right], \\ 0 = \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial [v_h]}{\partial a_i}\left[\dfrac{\partial (a_i)}{\partial y_\sigma}\right], \\ \dfrac{\partial v_h}{\partial v_\sigma} = \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial [v_h]}{\partial a_i}\left[\dfrac{\partial (a_i)}{\partial v_\sigma}\right], \end{cases}$$

worin $\dfrac{\partial y_h}{\partial y_\sigma} = \dfrac{\partial v_h}{\partial y_\sigma} = 0$ oder $=1$ ist, jenachdem die Indices h und σ verschieden oder einander gleich sind.

Nun ist:

$$u_h^\sigma = \sum_1^{2n}{}_i \gamma_i^\sigma \left[\frac{\partial [y_h]}{\partial a_i}\right]$$

und wie leicht erhellt:

$$\frac{\partial \Omega_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial \dfrac{du_h^\sigma}{dx}} = \sum_1^{2n}{}_i \gamma_i^\sigma \frac{\partial}{\partial a_i}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h}\right] = \sum_1^{2n}{}_i \gamma_i^\sigma \frac{\partial [v_h]}{\partial a_i}.$$

Setzt man daher allgemein:

$$(29.)\qquad \gamma_i^\sigma = \left[\frac{\partial (a_i)}{\partial v_\sigma}\right]_\omega,$$

d. h. gleich dem Werthe, den die Function $\left[\dfrac{\partial (a_i)}{\partial v_\sigma}\right]$ für irgend einen bestimm-

ten Werth x_ω von x annimmt, so wird für $x = x_\omega$

$$u_h^\sigma = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Omega_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial \dfrac{du_h^\sigma}{dx}} = 0 \quad \text{oder} \quad = 1,$$

jenachdem $\sigma \gtrless h$ oder $\sigma = h$ ist.

Durch die Werthe (29.) der Constanten γ_i^σ werden sonach die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen (21.) identisch erfüllt für $x = x_\omega$, folglich, da sie unabhängig von x sind, überhaupt für jedes x.

Das System Werthe (29.) der γ_i^σ besitzt aber noch eine zweite wichtige Eigenschaft, die nämlich, dass für dasselbe die Determinante U sich ausdrücken lässt durch eine andere Determinante, die in den Kriterien des Maximums und Minimums, wie man sehen wird, eine sehr hervorragende Rolle spielt.

Multiplicirt man nämlich die Determinante:

$$(30.) \qquad \varDelta(x, x_\omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial [y_1]}{\partial a_1} & \frac{\partial [y_1]}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial [y_1]}{\partial a_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial [y_n]}{\partial a_1} & \frac{\partial [y_n]}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial [y_n]}{\partial a_{2n}} \\ \frac{\partial [y_1]_\omega}{\partial a_1} & \frac{\partial [y_1]_\omega}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial [y_1]_\omega}{\partial a_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial [y_n]_\omega}{\partial a_1} & \frac{\partial [y_n]_\omega}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial [y_n]_\omega}{\partial a_{2n}} \end{vmatrix},$$

in der $\frac{\partial [y_i]_\omega}{\partial a_h}$ für $\left[\frac{\partial [y_i]}{\partial a_h}\right]_{x=x_\omega}$ steht, mit A_ω, wo A_ω den Werth der Determinante:

$$A = \Sigma \pm \left[\frac{\partial (a_1)}{\partial v_1}\right] \cdots \left[\frac{\partial (a_n)}{\partial v_n}\right] \left[\frac{\partial (a_{n+1})}{\partial y_1}\right] \cdots \left[\frac{\partial (a_{2n})}{\partial y_n}\right]$$

für $x = x_\omega$ bedeutet, und wendet auf das Product den Satz von der Multiplication der Determinanten an, so erhält man wegen der Identitäten (28.) die Formel:

$$U(x, x_\omega) = A_\omega \varDelta(x, x_\omega),$$

in welcher $U(x, x_\omega)$ diejenige Determinante bezeichnet, die durch die Substitutionen (29.) aus U hervorgeht.

Diese Relation, die man bei Einführung der reciproken Determinante von A:

$$\nabla = \Sigma \pm \frac{\partial [v_1]}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial [v_n]}{\partial a_n} \frac{\partial [y_1]}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial a_{2n}}$$

auch so schreiben kann:

$$\nabla_\omega U(x, x_\omega) = \Delta(x, x_\omega),$$

lehrt, dass die Determinanten U und $\Delta(x, x_\omega)$ bis auf einen von x unabhängigen Factor einander gleich werden, sobald man den γ_i^0 die Werthe (29.) giebt.

Hieraus folgt zugleich, dass diese Werthe auch der zweiten Bedingung genügen, wonach die Determinante U nicht identisch Null werden durfte.

Denn die Determinante $\Delta(x, x_\omega)$ kann nicht identisch Null sein, so lange man die $2n$ Integrationsconstanten a unbestimmt lässt, indem sonst der Grundbedingung, dass die Functionen y in den beiden Grenzen gegebene Werthe annehmen sollen, nicht genügt werden könnte. Nach dem, was am Schlusse von §. 1 festgesetzt worden ist, kann sie daher auch dann nicht identisch verschwinden, wenn man für diese Constanten die aus der genannten Bedingung folgenden Werthe einsetzt.

Die Determinante $U(x, x_\omega)$ könnte sich daher nur dadurch auf Null reduciren, dass $A_\omega = 0$ oder $\nabla_\omega = \infty$ würde. Das ist aber unmöglich. Denn die Determinanten A und ∇ sind unabhängig von x.

Man kann dies indirekt aus dem *Poisson-Jacobi*schen oder dem *Lagrange*schen Satze der Störungstheorie folgern. Man zeigt es aber leichter ganz direct.

Differentiirt man nämlich die Determinante ∇ nach x, so entsteht:

$$\frac{d\nabla}{dx} = \sum_1^n{}_h \sum_1^{2n}{}_i \left\{ \frac{\partial\nabla}{\partial\frac{\partial(v_h)}{\partial a_i}} \frac{d}{dx}\frac{\partial[v_h]}{\partial a_i} + \frac{\partial\nabla}{\partial\frac{\partial[y_h]}{\partial a_i}} \frac{d}{dx}\frac{\partial[y_h]}{\partial a_i} \right\}.$$

Aus den durch Substitution der Lösungen (8.) identischen Gleichungen (6.) ergiebt sich aber, wenn man dieselben nach a_i differentiirt:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial[y_h]}{\partial a_i} = \sum_1^n{}_k \left\{ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial v_h \partial y_k}\right] \frac{\partial[y_k]}{\partial a_i} + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial v_h \partial v_k}\right] \frac{\partial[v_k]}{\partial a_i} \right\},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial[v_h]}{\partial a_i} = -\sum_1^n{}_k \left\{ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial y_h \partial y_k}\right] \frac{\partial[y_k]}{\partial a_i} + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial y_h \partial v_k}\right] \frac{\partial[v_k]}{\partial a_i} \right\}.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung und nimmt die Glieder zusammen, welche mit denselben zweiten partiellen Differentialquotienten der Function H multiplicirt sind, so findet man unter Anwendung der ersten Determinantensätze:

$$\frac{d\nabla}{dx} = \nabla \sum_1^n{}_h \left\{ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial v_h \partial y_h}\right] - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial y_h \partial v_h}\right] \right\} = 0.$$

Die Determinante ∇ ist demnach in der That unabhängig von x, und sie kann

nicht Null oder unendlich sein, weil sich aus den $2n$ Gleichungen

$$v_h = [v_h], \quad y_h = [y_h]$$

die $2n$ Integrationsconstanten a ausdrücken lassen müssen durch die v und y, um ein vollständiges System von Integralen der Differentialgleichungen (6.) zu bilden.

Wir können hiernach unsere Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen, dessen grosse Wichtigkeit erst im Folgenden klar hervortreten wird:

(31.) *Wenn man den $2n^2$ Constanten γ_i^σ die Werthe giebt*

$$\gamma_i^\sigma = \left[\frac{\partial(a_i)}{\partial v_\sigma}\right]_{x=x_\omega},$$

in denen x_ω einen beliebig gewählten Werth von x bezeichnet, so werden die Bedingungsgleichungen (21.) *identisch erfüllt und es wird überdies identisch:*

$$U = C.\Delta(x, x_\omega),$$

wo C eine von Null verschiedene und von x_ω unabhängige Constante ist.

§. 4.

Wir sind nun vollständig ausgerüstet, um an den eigentlichen Zweck dieses Aufsatzes, die Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minimums, gehen zu können.

Wendet man die erhaltene identische Umformung (26.) auf die zweite Variation

$$(9.) \qquad \delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\delta^2\Omega\, dx$$

an, so erhält man mit Rücksicht auf die Bedingungen, denen die Variationen $\mathfrak{z}$ unterworfen sind, die Formel:

$$(32.) \qquad \delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}_h \sum{}_i \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i}\right] \frac{U_h U_i}{U^2},$$

während nach (27.) die Bedingungsgleichungen $\delta\varphi_k = 0$ übergehen in:

$$(33.) \qquad \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_h}\right] U_h = 0.$$

Indem aber bei der Ableitung der Formel (32.) aus der Transformation (26.) für das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{d}{dx}\frac{2B}{U}$$

die Differenz der Grenzwerthe des unbestimmten $\frac{2B}{U}$ gesetzt worden ist, welche

verschwinden, weil die Variationen $\mathfrak{z}$ in den Grenzen verschwinden müssen, so kann diese Formel nur so lange angewendet werden, als die durch (24.) definirte Function $\frac{2B}{U}$ innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 endlich bleibt.

Nehmen wir nun die Grenzen so eng an, dass innerhalb derselben weder einer der Coefficienten der ursprünglichen Function $2\delta^2\Omega$, noch auch irgend eine der Grössen $\frac{\partial[y]}{\partial a}$ und $\frac{\partial[\lambda]}{\partial a}$ unendlich wird, so erleidet diese Function nur dann eine Endlichkeitsunterbrechung, wenn ihr Nenner U Null wird.

Das Verschwinden von U hängt aber ab von den Werthen der $2n^2$ willkürlichen Constanten γ_i^0, und wir können daher, indem wir selbstverständlich stets nur solche Werthe dieser Constanten betrachten, welche den Bedingungsgleichungen (21.) genügen, unter der gemachten Voraussetzung den folgenden Satz aussprechen:

I. *So lange man die willkürlichen Constanten γ_i^a so bestimmen kann, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nirgends verschwindet, gilt für alle in Betracht kommenden Variationen $\mathfrak{z}$ identisch die Formel* (32.), *in welcher diesen Constanten eben solche Werthe beizulegen sind, welche der genannten Forderung genügen.*

Sobald man aber die obere Grenze x_1 weiter ausdehnt, als es die Bedingung erlaubt, dass U nicht verschwinden darf — und wir werden sehen, dass sich aus dieser Bedingung im Allgemeinen immer eine äusserste Grenze ergiebt, die nicht überschritten, ja nicht einmal erreicht werden darf —, so wird die Formel (32.) falsch, und man muss dann wieder zu der ursprünglichen Formel (9.) zurückgehen, in der die Grenzen keinerlei Beschränkung unterworfen sind.

§. 5.

Soll die zweite Variation ein sicheres Kriterium des Maximums oder Minimums liefern, so muss sie weder ihr Zeichen ändern, noch auch selbst verschwinden können, es sei denn, dass die sämmtlichen Variationen $\mathfrak{z}$ identisch Null würden. Denn wenn die zweite Variation verschwindet, so wird die Aenderung des Integrales von der dritten Ordnung und kann daher im Allgemeinen ebensowohl positiv als auch negativ gemacht werden.

Dies vorausgeschickt lässt sich aus der Formel (32.) der folgende Schluss ziehen:

II. *Wenn man die willkürlichen Constanten γ_i^a so bestimmen kann, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nicht verschwindet,*

und wenn überdies die homogene Function zweiter Ordnung

$$2W = \sum_1^n{}_h \sum{}_i \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right] U_h U_i,$$

zwischen deren n willkürlichen Argumenten U_h die m linearen Bedingungsgleichungen (33.) bestehen, innerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht ändert, so kann die zweite Variation $\delta^2 J$ weder ihr Zeichen ändern, noch selbst verschwinden, und es findet dann folglich für die Functionen [y] sicher ein Maximum oder ein Minimum statt.

Aus den gemachten Voraussetzungen ergiebt sich unmittelbar, indem nach denselben der Ausdruck unter dem Integralzeichen endlich bleibt und einen Zeichenwechsel nicht erleiden kann, dass das Integral (32.) ein unveränderliches Vorzeichen besitzt und nur dann verschwinden kann, wenn die Function $2W$ identisch Null wird.

Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, muss demnach untersucht werden, wann diese Function identisch verschwindet.

Aus der Algebra ist bekannt, dass sich jede homogene Function zweiter Ordnung von n Argumenten, zwischen denen m lineare homogene Bedingungsgleichungen bestehen, in ein Aggregat von $n-m$ Quadraten umformen lässt.

Setzt man

$$(34.)\qquad U_h = p_h^1 V_1 + p_h^2 V_2 + \cdots + p_h^{n-m} V_{n-m},$$

so kann man die $n(n-m)$ Coefficienten p_h^i so bestimmen, dass diese Werthe der U_h den m Bedingungsgleichungen (33.) genügen und überdies die beiden Gleichungen zu identischen machen:

$$2W = \varrho_1 V_1^2 + \varrho_2 V_2^2 + \cdots + \varrho_{n-m} V_{n-m}^2,$$
$$\sum_1^n{}_h U_h^2 = V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_{n-m}^2.$$

Die Grössen ϱ sind dann die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix}
\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_1'}\right] - \varrho, & \cdots & \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_1'}\right] & \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}\right], & \cdots & \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}\right] \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_n'}\right], & \cdots & \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_n'}\right] - \varrho, & \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}\right], & \cdots & \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}\right] \\
\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}\right], & \cdots & \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}\right], & 0, & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}\right], & \cdots & \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}\right], & 0, & \cdots & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Das von ϱ freie Glied dieser Gleichung ist nun gerade die Determinante $[R]$, die nach Voraussetzung nicht identisch Null ist.

Daraus folgt, dass keine Wurzel ϱ der obigen Gleichung identisch Null sein kann. Die Function $2W$ lässt sich daher bei unbestimmtem x nicht in ein Aggregat von weniger als $n-m$ Quadraten transformiren. Soll dieselbe überdies, wie es der Satz verlangt, innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 ihr Zeichen nicht ändern, so müssen die $n-m$ Coefficienten ϱ zwischen diesen Grenzen stets positiv oder stets negativ bleiben. Es kann demnach alsdann innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 die Function $2W$ nur dadurch für jeden Werth von x verschwinden, dass die sämmtlichen $n-m$ Grössen V_i identisch Null werden, und dies zieht in Folge der Substitutionen (34.) das Verschwinden der n Grössen U_h nach sich.

Wenn die Bedingungen unseres Satzes erfüllt sind, so kann demnach das Integral (32.) nur verschwinden für solche Functionen $\mathfrak{z}$, welche Lösungen der n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(35.) \qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \dots \quad U_n = 0$$

sind. Da man aber nur solche Functionen $\mathfrak{z}$ zulassen darf, welche in den beiden Grenzen verschwinden, so muss noch hinzugefügt werden, dass diese Lösungen in den beiden Grenzen oder — indem man auch nur in einem Theile des Intervalles x_0 bis x_1 den Variationen $\mathfrak{z}$ die aus (35.) folgenden Werthe geben und dieselben in dem übrigen Theile constant gleich Null annehmen kann, vorausgesetzt, dass zwischen diesen beiden Arten von Werthen ein stetiger Uebergang stattfindet — überhaupt für irgend zwei verschiedene Werthe von x innerhalb der Grenzen verschwinden müssen.

Erinnert man sich aber des Werthes (22.) von U_h, so sieht man, dass die allgemeinen Lösungen des Systems Differentialgleichungen (35.) folgende sind:

$$\mathfrak{z}_h = c_1 u_h^1 + c_2 u_h^2 + \dots + c_n u_h^n,$$

worin die Grössen c willkürliche Constanten bezeichnen. Wenn daher diese n Lösungen, ohne identisch Null zu werden, für irgend einen Werth von x gleichzeitig verschwinden sollen, so muss die Determinante

$$U = \Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \dots u_n^n$$

für diesen Werth von x ebenfalls verschwinden. Nun waren aber in der Formel (32.) die willkürlichen Constanten der u_h^g gerade so zu bestimmen, dass innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 diese Determinante nirgends verschwinden konnte. Es können daher die n Ausdrücke U_h innerhalb dieser Grenzen niemals gleichzeitig für einen, geschweige denn für zwei Werthe von x ver-

schwinden. Damit ist nach I. auch der letzte Theil unseres Satzes erwiesen; man sieht, dass die zweite Variation weder ihr Zeichen ändern, noch auch verschwinden kann, so lange die Voraussetzungen des Satzes II. erfüllt sind.

Wenn dagegen innerhalb solcher Grenzen, wie sie der Satz I. verlangt, die Function $2W$ ihr Zeichen ändern kann, so muss es wenigstens einen Coefficienten ϱ geben, der in irgend einem Intervalle zwischen x_0 und x_1 ein anderes Vorzeichen besitzt als die übrigen, woraus leicht erhellt, dass alsdann das Integral $\delta^2 J$ nach Belieben positiv oder negativ gemacht werden kann.

Die Bedingung, dass die Function $2W$ innerhalb eines Grenzenintervalles, für welches die Formel (32.) gilt, ein unveränderliches Vorzeichen habe, ist demnach nicht nur hinreichend, sondern auch unbedingt nothwendig zum Bestehen eines wirklichen relativen Maximums oder Minimums des über dieses Intervall ausgedehnten Integrales J oder V.

Aus diesem Grunde und um mich kürzer ausdrücken zu können, werde ich im Folgenden immer voraussetzen, dass diese Function zwischen x_0 und x_1 ohne Verletzung der Bedingungsgleichungen (33.) eines Zeichenwechsels nicht fähig sei.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Bemerkung, dass die zweite Variation nicht mehr verschwinden kann, wenn die Bedingungen des Satzes II. erfüllt sind — eine Bemerkung, die ursprünglich von Herrn *Richelot* herrührt und die ihrer Wichtigkeit wegen als besonderer Satz gefasst zu werden verdient —, kürzer also aussprechen:

III. *So lange man die willkürlichen Constanten γ_i^σ so bestimmen kann, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nirgends Null wird, ebenso lange kann auch die zweite Variation selbst nicht verschwinden.*

§. 6.

Aus diesem Satze folgt nun zunächst leicht, dass es im Allgemeinen immer eine äusserste Grenze x' giebt, welche die obere Grenze x_1 nicht überschreiten, ja nicht einmal erreichen darf, wenn es möglich sein soll, die Constanten γ_i^σ der ausgesprochenen Forderung gemäss zu bestimmen.

Die Formeln (13.) und (14.) nämlich zeigen, dass für jedes System Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h} = \frac{d}{dx}\,\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}_h'}, \qquad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0$$

identisch

$$2\delta^2\Omega = 2\Omega_2 = \frac{d}{dx}\sum_1^n {}_h \mathfrak{z}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}'_h}$$

ist. Daraus aber folgt, dass die zweite Variation

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\delta^2\Omega\, dx$$

durch Werthe der $\mathfrak{z}$, welche den m Gleichungen

$$\delta\varphi_k = \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0$$

genügen und in den beiden Grenzen Null werden, immer dann zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn $x_1 \geqq x'$ geworden ist, wo x' die zunächst an x_0 gelegene Wurzel der Gleichung bezeichnet:

$$(36.)\qquad \varDelta(x, x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial [y_1]}{\partial a_1}, & \frac{\partial [y_1]}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial [y_1]}{\partial a_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial [y_n]}{\partial a_1}, & \frac{\partial [y_n]}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial [y_n]}{\partial a_{2n}} \\ \frac{\partial [y_1]_0}{\partial a_1}, & \frac{\partial [y_1]_0}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial [y_1]_0}{\partial a_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial [y_n]_0}{\partial a_1}, & \frac{\partial [y_n]_0}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial [y_n]_0}{\partial a_{2n}} \end{vmatrix} = 0.$$

Selbstverständlich wird immer $x_0 < x_1$ vorausgesetzt. In der That, nach (12.) sind die allgemeinen Lösungen der obigen Differentialgleichungen:

$$(37.)\qquad \mathfrak{z}_h = \gamma_1 \frac{\partial [y_h]}{\partial a_1} + \gamma_2 \frac{\partial [y_h]}{\partial a_2} + \dots + \gamma_{2n} \frac{\partial [y_h]}{\partial a_{2n}},$$

$$(38.)\qquad \mu_k = \gamma_1 \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_1} + \gamma_2 \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_2} + \dots + \gamma_{2n} \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_{2n}},$$

und da die Determinante $\varDelta(x, x_0)$ für $x = x'$ verschwinden soll, so kann man die $2n$ willkürlichen Constanten γ so bestimmen, dass die n Functionen (37.) für $x = x_0$ und $x = x'$ sämmtlich verschwinden.

Indem man dann für das Intervall x_0 bis x' den $\mathfrak{z}$ und μ die Werthe (37.) und (38.) beilegt und ausserhalb desselben die $\mathfrak{z}$ constant gleich Null annimmt, wird unter der Voraussetzung $x_1 \geqq x'$:

$$\delta^2 J = \left[\sum_1^n {}_h \mathfrak{z}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}'_h}\right]_{x_0}^{x'} = 0.$$

Dies würde nicht mehr richtig sein, wenn für die genannten Werthe der $\mathfrak{z}$ und μ die Function

$$\sum_1^n {}_h \mathfrak{z}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathfrak{z}'_h}$$

innerhalb der Grenzen x_0 und x' unendlich würde. Dieser Fall ist aber durch die in §. 4 eingeführten Voraussetzungen von vornherein ausgeschlossen worden.

Da nun für diejenigen Grenzen x_0 und x_1, innerhalb deren die Voraussetzung des Satzes III. erfüllt ist, die zweite Variation niemals verschwinden kann, so muss nothwendig die äusserste Grenze x_1, für welche diese Voraussetzung noch zulässig ist, zwischen x_0 und x' liegen. Sobald sie aber $\geqq x'$ geworden ist, so kann man jener Bedingung sicher nicht mehr genügen.

Aus dem Umstande, dass die zweite Variation immer verschwinden kann, sobald man die obere Grenze x_1 über x' oder auch nur bis zu x' ausdehnt, sieht man zugleich, dass ein Maximum oder Minimum im Allgemeinen überhaupt nur so lange stattfinden kann, als die obere Grenze zwischen x_0 und x' bleibt.

§. 7.

Es fragt sich nun aber, ob umgekehrt, wenn die obere Grenze zwischen x_0 und x' liegt, die willkürlichen Constanten γ_i^ϱ sich auch wirklich immer so bestimmen lassen, dass innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 die Determinante U nirgends Null wird.

Die im vorigen §. benutzte Schlussweise zeigt, dass die zweite Variation überhaupt immer zum Verschwinden gebracht werden kann, sobald die Determinante $\varDelta(x'_0, x'_1)$ für irgend zwei verschiedene Werthe x'_0 und x'_1 verschwindet, die in dem Intervall x_0 bis x_1 liegen.

Wenn daher die Bedingung des Satzes III. erfüllt ist, so kann die Determinante $\varDelta(x'_0, x'_1)$ niemals Null werden, so lange x'_0 und x'_1 innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 bleiben und nicht zusammenfallen. Wir haben daher im Besonderen den Satz:

IV. ***Sobald es möglich ist, die Constanten γ_i^ϱ so zu bestimmen, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nirgends gleich Null wird, kann auch die Determinante***

$$\varDelta(x, x_1)$$

für keinen Werth von x verschwinden, der kleiner als x_1 und grösser oder gleich x_0 ist.

Nun aber erinnere man sich des Satzes (31.), nach welchem die $2n^2$ Constanten γ_i^σ so bestimmt werden können, dass den Bedingungsgleichungen (21.) genügt und zu gleicher Zeit

$$U = C.\Delta(x, x_\omega)$$

wird.

Sei:

$$x_0 < x^0 < x_1 < x'.$$

Dann kann die Determinante $\Delta(x, x_0)$ innerhalb der Grenzen x^0 und x_1 nie verschwinden, weil eben x^0 und x_1 zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $\Delta(x, x_0) = 0$ liegen sollen. Nach dem eben citirten Satze lassen sich die Constanten γ_i^σ so bestimmen, dass identisch

$$U = C.\Delta(x, x_0)$$

wird, also die Determinante U innerhalb der Grenzen x^0 und x_1 nirgends verschwindet. Daraus folgt nach IV., dass auch die Determinante $\Delta(x, x_1)$ niemals verschwinden kann, so lange $x^0 \leqq x < x_1$ ist. Aber diese Determinante wird auch für $x = x_0$ nicht Null. Denn es ist:

$$\Delta(x_0, x_1) = (-1)^n \Delta(x_1, x_0).$$

Es hindert uns überdies nichts, x^0 so nahe als wir wollen an x_0 rücken zu lassen. Daher kann $\Delta(x, x_1)$ auch zwischen x_0 und x^0 nicht verschwinden.

Lassen wir $x_1 + \varepsilon$ an die Stelle von x_1 treten, so können wir das gefundene Resultat also aussprechen:

Die Determinante $\Delta(x, x_1 + \varepsilon)$ kann innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 niemals Null werden, so lange $x_0 < x_1 < x_1 + \varepsilon < x'$ ist.

Da wir nun $x_1 + \varepsilon$ beliebig nahe an x' und ε beliebig klein annehmen können, da wir ferner wissen, dass für die den Bedingungen (21.) genügenden Werthe

$$\gamma_i^\sigma = \left[\frac{\partial(a_i)}{\partial v_\sigma}\right]_{x = x_1 + \varepsilon}$$

der $2n^2$ Constanten γ_i^σ identisch

$$U = C.\Delta(x, x_1 + \varepsilon)$$

wird, so sehen wir nicht nur, dass, so lange x_1 zwischen x_0 und x' bleibt, jene Constanten sich immer so bestimmen lassen, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nirgends verschwindet, sondern lernen sogar eine Lösung dieser Aufgabe kennen.

Erinnern wir uns der Voraussetzungen, unter welchen wir zu diesem Resultate gelangt sind, und verbinden wir dasselbe mit dem Satze II., so er-

halten wir schliesslich das folgende allgemeine Kriterium des Maximums und Minimums:

V. *So lange die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel x' der Grenzgleichung*

$$\Delta(x_0, x_1) = 0$$

bleibt, wird das vorgelegte Integral für diejenigen Functionen y, welche die erste Variation verschwinden machen, stets ein Maximum oder Minimum, vorausgesetzt, dass die homogene Function

$$2W = \sum_i^n \sum_k^n \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_k \, \partial y_i}\right] U_k U_i,$$

deren n willkürliche Argumente U, den m Bedingungsgleichungen

$$\sum_k^n \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right] U_k = 0$$

unterworfen sind, innerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht zu ändern vermag; dagegen findet im Allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum statt, sobald $x_1 \geqq x'$ geworden ist.

Dabei darf jedoch nicht übersehen werden, dass überdies die Coefficienten der ursprünglichen Function $2\delta^2\Omega$ innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nicht unendlich werden dürfen, und dass auch die Endlichkeit der Functionen $\frac{\partial [y]}{\partial a}$ und $\frac{\partial [\lambda]}{\partial a}$ in diesem Intervalle vorausgesetzt worden ist.

Die erstere Bedingung ist nothwendig, weil sonst die ganze Entwickelung der Function Ω nach dem *Taylor*schen Satze nicht mehr zulässig sein würde. Dagegen scheint die zweite Voraussetzung nicht nothwendig zu sein, wenngleich dieselbe allerdings bei der hier benutzten Schlussweise nicht aufgegeben werden kann. Wenigstens hat *Jacobi* *) in dem einfachsten Falle der Variationsrechnung durch ganz andere, von der Endlichkeit oder Unendlichkeit jener Functionen unabhängige Betrachtungen gezeigt, dass die Grenzgleichung das weiteste Grenzenintervall liefert, innerhalb dessen der Nenner U der Reduction durch passende Bestimmung seiner willkürlichen Constanten am Verschwinden verhindert werden kann, und dasselbe ist durch ähnliche Betrachtungen auch für das *Jacobi*sche Beispiel des Integrales der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten im Raume bewiesen worden, wo innerhalb des betreffenden Intervalles eine jener Functionen unendlich wird.

*) Vgl. *Hesse*, Bd. 54, pp. 256—260 dieses Journales.

§. 8.

In dem allgemeinen Falle, wo die Lösungen $[y]$ nicht linear sind in Bezug auf ihre $2n$ Integrationsconstanten a, lässt die Grenzgleichung $\Delta(x, x_0) = 0$ eine sehr einfache Deutung zu, und es ist wichtig, dieselbe abzuleiten, um die Uebereinstimmung der erhaltenen Kriterien mit denjenigen zu zeigen, welche *Jacobi* in Bd. 17 dieses Journals, p. 73 ohne Beweis angegeben hat.

Den $2n$ Constanten a waren diejenigen Werthe beizulegen, welche sich aus den $2n$ Gleichungen ergeben:

$$y_{h0} = [y_h]_0, \qquad y_{h1} = [y_h]_1,$$

in denen links die gegebenen Grenzwerthe, rechts die Werthe der Lösungen für $x = x_0$, respective $x = x_1$ stehen.

Wenn nun diese Gleichungen nicht linear sind rücksichtlich der Unbekannten a, so wird man aus ihnen im Allgemeinen mehrere verschiedene Werthsysteme dieser Constanten erhalten, welche denselben Grenzwerthen der Variabeln y entsprechen, und es wird sich ereignen können, dass für einen gewissen Werth von x_1 zwei dieser Werthsysteme zusammenfallen, oder, wie man auch sagen kann, einander unendlich nahe kommen.

Sei $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ ein System Werthe der Constanten a, welches den obigen Gleichungen genügt. Sollen diese Gleichungen dann auch erfüllt werden durch die unendlich wenig von jenen verschiedenen Werthe

$$a_1 + \delta a_1, \quad a_2 + \delta a_2, \quad \ldots \quad a_{2n} + \delta a_{2n},$$

so müssen die $2n$ Gleichungen stattfinden:

$$0 = \frac{\partial [y_h]_0}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial [y_h]_0}{\partial a_2} \delta a_2 + \cdots + \frac{\partial [y_h]_0}{\partial a_{2n}} \delta a_{2n},$$

$$0 = \frac{\partial [y_h]_1}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial [y_h]_1}{\partial a_2} \delta a_2 + \cdots + \frac{\partial [y_h]_1}{\partial a_{2n}} \delta a_{2n}.$$

Diese können aber nicht anders bestehen, als wenn

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

ist.

Die Gleichung $\Delta(x, x_0) = 0$ ist folglich die Bedingung dafür, dass zwei verschiedene Wurzelsysteme der $2n$ Gleichungen

$$y_{h0} = [y_h]_0, \quad y_{h1} = [y_h]_1,$$

aus denen sich die Integrationsconstanten der Lösungen durch die Grenzwerthe der Variabeln bestimmen, einander gleich werden.

Legt man aber diese Deutung der Grenzgleichung zu Grunde, so erhält man aus V. für den von *Jacobi* behandelten Fall, wo das Maximum oder Minimum des Integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots y^{(n)})\, dx$$

gesucht wird, indem sich hier*) die homogene Function $2W$ auf

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}\right] U_n^2$$

reducirt, worin

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots \quad y_n = y^{(n-1)},$$
$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}', \quad \dots \quad \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}^{(n-1)}$$

zu setzen ist, genau dasselbe Kriterium, welches man an der angegebenen Stelle ausgesprochen findet.

§. 9.

Im Vorhergehenden ist stets nur der Fall betrachtet worden, wo die Grenzen x_0 und x_1, sowie die Grenzwerthe der y sämmtlich gegeben sind. Auf diesen Fall kann man aber bekanntlich alle anderen zurückführen, indem man die Aufgabe in zwei getrennte Theile zerlegt, von denen der erste der eigentlichen Variationsrechnung, der zweite der Differentialrechnung angehört. Man nimmt zuerst die Grenzwerthe der Variabeln sämmtlich als gegeben an und sucht unter dieser Voraussetzung das Maximum oder Minimum des vorgelegten Integrales. Die Kriterien, wann dasselbe bei dieser Annahme ein wirkliches Maximum oder Minimum wird, sind aus dem Vorhergehenden bekannt und nach V. abhängig von den Grenzen und den Werthen der Integrationsconstanten des Problems, welche wiederum abhängen von den Grenzwerthen der Variabeln. Hat man nun den Maximal- oder Minimalwerth des Integrales gefunden, so kommt es, wenn die Grenzwerthe nicht sämmtlich gegeben sind, dann zweitens darauf an, dieselben mit Rücksicht auf die gegebenen Grenzbedingungen so zu bestimmen, dass dieser Werth des Integrales, der nun eine gegebene Function der Grenzwerthe ist, ein Maximum oder Minimum werde. Die Substitution der also bestimmten Grenzwerthe in die obigen Kriterien liefert die Kriterien des Maximums oder Minimums für den vorgelegten Fall.

---

*) Vgl. *Clebsch*, Bd. 55, p. 267 dieses Journales.

Diese Art, die Kriterien des Maximums und Minimums bei nicht gegebenen Grenzwerthen abzuleiten, scheint stets die Ausführung einer Quadratur zu erfordern. Da es aber nicht sowohl auf den grössten oder kleinsten Werth des Integrales, als vielmehr nur auf die Aenderung ankommt, welche derselbe durch Variation der Grenzen und der Integrationsconstanten erfährt, so sieht man leicht, dass man sich immer diese Quadratur ersparen (oder präciser ausgedrückt, dieselbe ersetzen kann durch eine andere, die sich unmittelbar ausführen lässt), sobald unter dem Integralzeichen die Grenzwerthe nicht vorkommen.

Leipzig, im März 1868.

Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen.

(Von Herrn *Karl VonderMühll* in Leipzig.)

Lagrange hat in der Abhandlung: *Sur la construction des Cartes Géographiques* (Schriften der Berliner Academie, 1779, §. 6, S. 171) die Aufgabe gestellt:

> Die Theile einer Ebene so auf einer andern Ebene abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei, und dass ferner ein System paralleler Geraden in der abzubildenden Ebene durch ein System bestimmter Curven in der Bildebene abgebildet werde,

und diese Aufgabe für den Fall gelöst, dass die Curven Kreise seien.

Es wird im Folgenden die Lösung der allgemeinen Aufgabe auf die Lösung einer oder mehrerer gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden; die Ordnung dieser Differentialgleichungen ist gleich der Zahl der Constanten, welche die allgemeine Gleichung der Curven, die den Geraden entsprechen sollen, enthält. Die allgemeine Methode soll dann auf einige besondere Fälle angewandt werden, namentlich auf den Fall, wo den Geraden ganz allgemein Curven zweiten Grades entsprechen sollen.

Die Methode liefert, wenn sie streng verfolgt wird und eine allgemeine Integration der Differentialgleichungen möglich ist, alle Lösungen, welche der Aufgabe genügen, und nicht bloss einige derselben. In vielen Fällen giebt es gar keine Lösung, z. B. wenn den Geraden ein System ähnlicher Kegelschnitte entsprechen sollte, u. s. w.; es rührt dies daher, dass nicht bloss eine, sondern mehrere Differentialgleichungen zugleich erfüllt sein müssen. Es enthalten diese Differentialgleichungen eine Anzahl von Constanten, und es muss in jedem besonderen Falle untersucht werden, ob und wie über dieselben zu verfügen sei, damit durch eine Lösung sämmtlichen Gleichungen Genüge geleistet werde. Ueber die Zahl der Gleichungen und über die Lösbarkeit der Aufgabe überhaupt lässt sich allgemein wohl nichts feststellen.

Die im Folgenden entwickelte Methode unterscheidet sich von derjenigen, welche *Lagrange* in dem Fall, wo die Curven Kreise sein sollen, zur Anwendung gebracht hat, wesentlich bloss dadurch, dass sie nicht an den Aus-

druck für den Krümmungshalbmesser, sondern einfach an die Gleichung der Curve anknüpft; sie führt übrigens auch in dem speciellen Fall von Kreisen ebenso rasch zum Ziel.

Treten Oberflächen an die Stelle der einen oder der beiden Ebenen, so führen dieselben Betrachtungen zur Lösung der Aufgabe, sobald die Oberflächen in beliebiger Weise auf einer Ebene abgebildet sind.

Die rechtwinkligen Coordinaten in der abzubildenden Ebene seien t und u, in der Bildebene T und U, so dass der Punkt T, U Bild des Punktes t, u ist. Damit die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei, müssen zwischen den Grössen T, U und t, u die Relationen bestehen *):

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} T+iU = f(t+iu), \\ T-iU = \varphi(t-iu), \end{cases}$$

oder

$$T = \frac{f(t+iu)+\varphi(t-iu)}{2},$$

$$U = \frac{f(t+iu)-\varphi(t-iu)}{2i}.$$

Da T und U reell sein sollen, müssen f und φ conjugirt imaginäre Functionen sein.

Nun sei die allgemeine Gleichung der Curven, welche Bild der Geraden

$$t = \text{const.}$$

sein sollen:

$$\text{(II.)} \quad F\{T, U, C_1, C_2, \dots C_m\} = 0,$$

wo die Parameter $C_1, C_2, \dots C_m$ Functionen von t sind, da sie für $t=$const. constant sein sollen.

Setzen wir für T und U ihre Werthe in t und u ein, so muss die Gleichung (II.)

$$F\left\{\frac{f(t+iu)+\varphi(t-iu)}{2}, \frac{f(t+iu)-\varphi(t-iu)}{2i}, C_1, C_2, \dots C_m\right\} = 0$$

in Bezug auf t und u identisch erfüllt sein; differentiiren wir dieselbe also $m$mal nach u, so erhalten wir $(m+1)$ Gleichungen, aus denen wir die m Un-

---

*) *Lagrange*, a. a. O.

bekannten $C_1, C_2, \dots C_m$ eliminiren können; die Resultante ist eine Differentialgleichung $m$ter Ordnung zwischen den Functionen f und φ.

Ist die Gleichung (II.), was in der Regel der Fall sein wird, linear in Bezug auf die Constanten C, so macht die Elimination keine Schwierigkeit; allein die Resultante ist eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln f und φ, von denen die eine Function von $t+iu$, die andre Function von $t-iu$ sein soll; das gewöhnliche Integrationsverfahren ist auf eine solche Gleichung nicht anwendbar. Es lassen sich aber durch fortgesetzte Differentiation andere Gleichungen daraus ableiten, welche bloss f und bloss φ enthalten; es zeigt sich ferner, dass man diese Gleichungen immer wieder ebenso oft integriren kann, als man differentiirt hat; die Ordnung der schliesslich zu lösenden gewöhnlichen Differentialgleichungen bleibt also die $m$te.

Es soll im Folgenden angenommen werden, die Resultante sei von der Form:

$$(1.)\qquad F_1\Phi_2-F_2\Phi_1+F_3\Phi_4-F_4\Phi_3+\cdots+F_{2n-1}\Phi_{2n}-F_{2n}\Phi_{2n-1} = 0,$$

wo die Grössen F bloss die Function f und ihre Differentialquotienten, die Grössen Φ bloss die Function φ und ihre Differentialquotienten enthalten, so dass die F als Functionen von $t+iu$, die Φ als Functionen von $t-iu$ zu betrachten sind, und wo ferner durch Vertauschung von f und i mit φ und $-i$ F_h in Φ_h übergeht.

Diese Annahme ermöglicht eine übersichtliche Darstellung des Resultats, und sie bildet auch für den hauptsächlich in Betracht kommenden Fall keine Beschränkung. Denn ist die Gleichung (II.) algebraisch und linear in Bezug auf die Constanten C, was wir voraussetzen wollen, so sind die einzelnen Glieder der Resultante Producte einer Function von f in eine Function von φ; vertauschen wir ferner f, φ, i mit φ, f, $-i$, so bleiben die Werthe von T und U ungeändert; folglich wird durch diese Vertauschung entweder die Resultante auch nicht geändert, oder, wenn bei Berechnung derselben der Factor i weggelassen worden ist, so ändert sich bloss ihr Vorzeichen. Demnach hat die Resultante entweder die Form:

$$\Sigma_h \pm \mathrm{F}_h \phi_h + \Sigma_k (F_{2k-1}\Phi_{2k}+F_{2k}\Phi_{2k-1}),$$

oder die Form:

$$\Sigma_h \pm i\mathrm{F}_h \phi_h + \Sigma_k (F_{2k-1}\Phi_{2k}-F_{2k}\Phi_{2k-1}),$$

wo durch Vertauschung von f und i mit φ und $-i$ F_h in ϕ_h und F_k in Φ_k übergehen. Die erste Form geht aber in die zweite über, wenn wir setzen:

$$\mathrm{F}_h = i\mathrm{F}'_h,\quad \phi = -i\phi'_h,\quad F_{2k-1} = iF'_{2k-1},\quad \Phi_{2k-1} = -i\Phi'_{2k-1}.$$

Wir können also die letztere Form als die der Resultante annehmen. Endlich werden aber auch noch die ersten Glieder des Ausdrucks auf die Form der letzten gebracht, wenn wir setzen:

$$\pm i\mathrm{F}_h = F_{2h-1}, \qquad \mp i\Phi_h = \Phi_{2h-1},$$
$$\mathrm{F}_h = 2F_{2h}, \qquad \Phi_h = 2\Phi_{2h};$$

es ergiebt sich dann:

$$\pm i\mathrm{F}_h\Phi_h = F_{2h-1}\Phi_{2h} - F_{2h}\Phi_{2h-1}.$$

Wir werden jedoch bei der weitern Behandlung der Gleichung (1.) annehmen, es finden zwischen den Grössen F und Φ keine linearen Gleichungen identisch statt; diese Annahme kann gemacht werden, sobald in der Resultante Glieder von der Form $\pm iF_h\Phi_h$ nicht vorkommen; es ist dies in all den bis jetzt behandelten Beispielen der Fall, und es scheint sehr fraglich, ob solche Glieder überhaupt auftreten können.

Um nun aus der Gleichung (1.) andere abzuleiten, welche bloss f und bloss φ enthalten, dividiren wir dieselbe durch $F_2\Phi_2$, differentiiren dann zweimal nach t und zweimal nach u und addiren die beiden so erhaltenen Gleichungen; dann entsteht:

$$(2.)\qquad \left(\frac{F_3}{F_2}\right)'\left(\frac{\Phi_4}{\Phi_2}\right)' - \left(\frac{F_4}{F_2}\right)'\left(\frac{\Phi_3}{\Phi_2}\right)' + \cdots + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_2}\right)'\left(\frac{\Phi_{2n}}{\Phi_2}\right)' - \left(\frac{F_{2n}}{F_2}\right)'\left(\frac{\Phi_{2n-1}}{\Phi_2}\right)' = 0.$$

Nur der Fall ist auszunehmen und besonders in Rechnung zu bringen:

$$(2,\text{a})\qquad F_2 = 0,\quad \Phi_2 = 0.$$

Es ist dies ein einziger Fall, weil die Functionen f und φ conjugirt imaginär sein müssen, weil also, wenn f der Gleichung $F_2 = 0$ Genüge leistet, φ der Gleichung $\Phi_2 = 0$ Genüge leisten muss.

Setzen wir nun:

$$F_1^{(1)} = \left(\frac{F_3}{F_2}\right)', \qquad \Phi_1^{(1)} = \left(\frac{\Phi_3}{\Phi_2}\right)',$$

allgemein:

$$F_h^{(1)} = \left(\frac{F_{h+2}}{F_2}\right)', \qquad \Phi_h^{(1)} = \left(\frac{\Phi_{h+2}}{\Phi_2}\right)',$$

so nimmt die Gleichung (2.) die Form an:

$$(2.)\qquad F_1^{(1)}\Phi_2^{(1)} - F_2^{(1)}\Phi_1^{(1)} + \cdots + F_{2n-3}^{(1)}\Phi_{2n-2}^{(1)} - F_{2n-2}^{(1)}\Phi_{2n-3}^{(1)} = 0.$$

Wir verfahren mit dieser Gleichung genau ebenso, wie mit der Gleichung (1.). Setzen wir:

$$F_h^{(k)} = \left(\frac{F_{h+2}^{(k-1)}}{F_2^{(k-1)}}\right)', \qquad \Phi_h^{(k)} = \left(\frac{\Phi_{h+2}^{(k-1)}}{\Phi_2^{(k-1)}}\right)',$$

so folgt aus der Gleichung (2.), wenn nicht der Ausnahmefall eintritt

$$(2,a) \qquad F_2^{(1)} = 0, \quad \Phi_2^{(1)} = 0,$$

$$(3.) \qquad F_1^{(2)}\Phi_2^{(2)} - F_2^{(2)}\Phi_1^{(2)} + \cdots + F_{2n-5}^{(2)}\Phi_{2n-4}^{(2)} - F_{2n-4}^{(2)}\Phi_{2n-5}^{(2)} = 0,$$

u. s. w.

Wir erhalten demnach schliesslich, vorausgesetzt dass keiner der n speciellen Fälle stattfinde

$$(1,a) \qquad F_2 = 0, \qquad \Phi_2 = 0;$$

$$(2,a) \qquad F_2^{(1)} = 0, \qquad \Phi_2^{(1)} = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(n,a) \qquad F_2^{(n-1)} = 0, \qquad \Phi_2^{(n-1)} = 0,$$

das folgende System Gleichungen, welchem Genüge zu leisten ist:

$$(\text{III.}) \quad \begin{cases} F_1\Phi_2 - F_2\Phi_1 + F_3\Phi_4 - F_4\Phi_3 + \cdots + F_{2n-1}\Phi_{2n} - F_{2n}\Phi_{2n-1} = 0, \\ F_1^{(1)}\Phi_2^{(1)} - F_2^{(1)}\Phi_1^{(1)} + \cdots + F_{2n-3}^{(1)}\Phi_{2n-2}^{(1)} - F_{2n-2}^{(1)}\Phi_{2n-3}^{(1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_1^{(n-1)}\Phi_2^{(n-1)} - F_2^{(n-1)}\Phi_1^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, da wir den Fall $F_2^{(n-1)} = 0$, $\Phi_2^{(n-1)} = 0$ ausgeschlossen haben:

$$\frac{F_1^{(n-1)}}{F_2^{(n-1)}} = \frac{\Phi_1^{(n-1)}}{\Phi_2^{(n-1)}},$$

d. h. es soll eine Function von $t+iu$ einer Function von $t-iu$ gleich sein; dies ist nur dann möglich, wenn beide Functionen derselben Constanten gleich sind: man überzeugt sich davon sofort durch Differentiation der Gleichungen nach t und nach u.

Wir haben demnach:

$$F_1^{(n-1)} = c\, F_2^{(n-1)},$$

$$\Phi_1^{(n-1)} = c\,\Phi_2^{(n-1)}.$$

Wir setzen nun für $F_1^{(n-1)}$ und $F_2^{(n-1)}$ ihre Werthe

$$F_1^{(n-1)} = \left(\frac{F_3^{(n-2)}}{F_2^{(n-2)}}\right)', \qquad F_2^{(n-1)} = \left(\frac{F_4^{(n-2)}}{F_2^{(n-2)}}\right)'$$

und ebenso für $\Phi_1^{(n-1)}$ und $\Phi_2^{(n-1)}$; dann ergiebt sich durch einmalige Integration:

$$F_3^{(n-2)} = c\,F_4^{(n-2)} + a_1\,F_2^{(n-2)},$$
$$\Phi_3^{(n-2)} = c\,\Phi_4^{(n-2)} + b_1\,\Phi_2^{(n-2)}.$$

Diese Werthe setzen wir in die vorletzte der Gleichungen (III.) ein und erhalten so die beiden neuen Gleichungen:

$$F_1^{(n-2)} = b_1 F_4^{(n-2)} + c^{(1)} F_2^{(n-2)},$$
$$\Phi_1^{(n-2)} = a_1 \Phi_4^{(n-2)} + c^{(1)} \Phi_2^{(n-2)}.$$

Wir integriren nun die vier Gleichungen noch einmal und erhalten:

$$F_5^{(n-3)} = c\,F_6^{(n-3)} + a_1\,F_4^{(n-3)} + a_2 F_2^{(n-3)},$$
$$\Phi_5^{(n-3)} = c\,\Phi_6^{(n-3)} + b_1\,\Phi_4^{(n-3)} + b_2 \Phi_2^{(n-3)},$$
$$F_3^{(n-3)} = b_1 F_6^{(n-3)} + c^{(1)} F_4^{(n-3)} + a_1^{(1)} F_2^{(n-3)},$$
$$\Phi_3^{(n-3)} = a_1 \Phi_6^{(n-3)} + c^{(1)} \Phi_4^{(n-3)} + b_1^{(1)} \Phi_2^{(n-3)};$$

die drittletzte der Gleichungen (III.) giebt dann noch:

$$F_1^{(n-3)} = b_2 F_6^{(n-3)} + b_1^{(1)} F_4^{(n-3)} + c^{(2)} F_2^{(n-3)},$$
$$\Phi_1^{(n-3)} = a_2 \Phi_6^{(n-3)} + a_1^{(1)} \Phi_4^{(n-3)} + c^{(2)} \Phi_2^{(n-3)}.$$

Wir integriren nun diese sechs Gleichungen einmal, u. s. w.

Schliesslich ergiebt sich das folgende System Gleichungen:

$$
\text{(IV.)}\quad
\left\{
\begin{array}{llllll}
F_{2n-1} = c\,F_{2n} & + a_1 F_{2n-2} & + a_2 F_{2n-4} & + \cdots + a_{n-2} F_4 & + a_{n-1} F_2, \\
\Phi_{2n-1} = c\,\Phi_{2n} & + b_1 \Phi_{2n-2} & + b_2 \Phi_{2n-4} & + \cdots + b_{n-2} \Phi_4 & + b_{n-1} \Phi_2, \\
F_{2n-3} = b_1 F_{2n} & + c^{(1)} F_{2n-2} & + a_1^{(1)} F_{2n-4} & + \cdots + a_{n-3}^{(1)} F_4 & + a_{n-2}^{(1)} F_2, \\
\Phi_{2n-3} = a_1 \Phi_{2n} & + c^{(1)} \Phi_{2n-2} & + b_1^{(1)} \Phi_{2n-4} & + \cdots + b_{n-3}^{(1)} \Phi_4 & + b_{n-2}^{(1)} \Phi_2, \\
F_{2n-5} = b_2 F_{2n} & + b_1^{(1)} F_{2n-2} & + c^{(2)} F_{2n-4} & + \cdots + a_{n-4}^{(2)} F_4 & + a_{n-3}^{(2)} F_2, \\
\Phi_{2n-5} = a_2 \Phi_{2n} & + a_1^{(1)} \Phi_{2n-2} & + c^{(2)} \Phi_{2n-4} & + \cdots + b_{n-4}^{(2)} \Phi_4 & + b_{n-3}^{(2)} \Phi_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
F_3 = b_{n-2} F_{2n} & + b_{n-3}^{(1)} F_{2n-2} & + b_{n-4}^{(2)} F_{2n-4} & + \cdots + c^{(n-2)} F_4 & + a_1^{(n-2)} F_2, \\
\Phi_3 = a_{n-2} \Phi_{2n} & + a_{n-3}^{(1)} \Phi_{2n-2} & + a_{n-4}^{(2)} \Phi_{2n-4} & + \cdots + c^{(n-2)} \Phi_4 & + b_1^{(n-2)} \Phi_2, \\
F_1 = b_{n-1} F_{2n} & + b_{n-2}^{(1)} F_{2n-2} & + b_{n-3}^{(2)} F_{2n-4} & + \cdots + b_1^{(n-2)} F_4 & + c^{(n-1)} F_2, \\
\Phi_1 = a_{n-1} \Phi_{2n} & + a_{n-2}^{(1)} \Phi_{2n-2} & + a_{n-3}^{(2)} \Phi_{2n-4} & + \cdots + a_1^{(n-2)} \Phi_4 & + c^{(n-1)} \Phi_2.
\end{array}
\right.
$$

Wir haben $2n$ Gleichungen, n zwischen den Grössen F und n zwischen den Grössen Φ, mit n^2 Constanten. Die Constanten c müssen reell, die Constanten a und b conjugirt imaginär sein.

Die Wahl, welchen Functionen F und Φ wir die geraden und welchen wir die ungeraden Indices geben, ist ganz frei; nur ist es vortheilhaft, die einfacheren Functionen, namentlich die, welche bloss niedrige Differentialquotienten von f und φ enthalten, als solche mit geraden Indices auszuwählen; nach den Gleichungen (IV.) werden dann die complicirteren Grössen F und Φ lineare Functionen der einfacheren.

Die speciellen Fälle (1,a), (2,a), ... (n,a) sind besonders zu behandeln. Mit einer dieser Gleichungen ist die Gleichung (1.) noch nicht erfüllt; es ergiebt sich vielmehr auch in diesen Fällen noch ein ganzes System Gleichungen. In der Regel wird jedoch die directe Behandlung der Gleichungen (h,a) am schnellsten zum Ziele führen, d. h. entweder die vollständige Integration derselben, die Bestimmung der Function f und φ durch t und u, oder auch die Bestimmung der Differentialquotienten von f und φ durch f und φ. In dem erstern Fall muss dann noch die Gleichung (1.) identisch in Bezug auf t und u, in dem letztern identisch in Bezug auf f und φ erfüllt sein.

Es kann aber auch, namentlich wenn die Functionen F und Φ mit geraden Indices complicirt sind und die Integration der Gleichungen (h,a) nicht allgemein möglich ist, das System Gleichungen für den besondern Fall vollständig aufgestellt und ebenso behandelt werden, wie in dem allgemeinen Fall.

Nehmen wir z. B. an, es sei

$$(1,\mathrm{a}) \qquad F_2 = 0, \quad \Phi_2 = 0,$$

so haben wir neben dieser Gleichung:

$$F_3\Phi_4 - F_4\Phi_3 + \cdots + F_{2n-1}\Phi_{2n} - F_{2n}\Phi_{2n-1} = 0,$$

und diese Gleichung ist ebenso weiter zu behandeln, wie die Gleichung (1.).

Ist aber

$$(2,\mathrm{a}) \qquad F_2^{(1)} = 0, \quad \Phi_2^{(1)} = 0,$$

also

$$F_4 = cF_2 + a_1, \qquad \Phi_4 = c\Phi_2 + b_1,$$

so haben wir noch die Gleichung:

$$F_3^{(1)}\Phi_4^{(1)} - F_4^{(1)}\Phi_3^{(1)} + \cdots + F_{2n-3}^{(1)}\Phi_{2n-2}^{(1)} - F_{2n-2}^{(1)}\Phi_{2n-3}^{(1)},$$

u. s. w.

Auch in diesen Fällen kann man wieder ebenso oft integriren, als man

differentiirt hat, so dass die Ordnung der Gleichungen die der Gleichung (1.) nie übersteigt.

In den verschiedenen Fällen muss untersucht werden, ob und wie den sämmtlichen Differentialgleichungen Genüge zu leisten sei. Gelingt die vollständige Integration einer der Differentialgleichungen, so ist die Aufgabe für den betreffenden Fall gelöst, d. h. auf eine rein algebraische zurückgeführt; es handelt sich nur noch darum, die Constanten so zu bestimmen, dass auch die übrigen Differentialgleichungen erfüllt werden. Ist eine solche Integration aber nicht möglich, so können oft aus den Differentialgleichungen selbst weitere Schlüsse gezogen werden, und es wird überhaupt ein solches Verfahren in manchen Fällen schneller zum Ziele führen.

Man sieht ein, dass in manchen Fällen die Aufgabe eine überbestimmte sein und gar keine Lösung haben kann, ferner dass es auch eine Anzahl ganz verschiedener Lösungen geben kann; jeder der Ausnahmefälle kann auf eine oder auch auf mehrere Gattungen neuer Lösungen führen.

Das Resultat der Untersuchung kann folgendermassen zusammengefasst werden:

Zwischen den $2n$ Functionen F und ebenso zwischen den $2n$ Functionen Φ müssen je n homogene lineare Gleichungen bestehen und zwischen den $2n(2n-1)$ Constanten dieser Gleichungen $2n(2n-1)-n^2$ Relationen. Aus diesen Gleichungen müssen die Functionen F und Φ mit ungeraden Indices nicht nothwendig durch die mit geraden Indices bestimmbar sein; es ergeben sich so die Ausnahmefälle (1,a), (2,a), ... (n,a), wo zwischen den Functionen mit geraden Indices allein lineare Gleichungen bestehen.

Die im Vorhergehenden befolgte Methode kann auch zur Anwendung gebracht werden, wenn zwischen den Grössen F und Φ lineare Gleichungen identisch stattfinden, wenn also in der Resultante Glieder von der Form $\pm i F_h \Phi_h$ vorkommen. Nur treten dann immer Ausnahmefälle ein, und es muss in Folge davon die Betrachtung modificirt werden.

Es soll die allgemeine Methode nun auf einige besondere Fälle angewandt werden.

1) Den Geraden $t = \text{const.}$ sollen Kreise entsprechen.

Die allgemeine Gleichung des Kreises ist:

$$C_1(T^2+U^2)+C_2T+C_3U = C_4,$$

oder, wenn wir T und U nach (I.) durch t und u ausdrücken und die Constanten etwas ändern:

$$C_1f\varphi+C_2f+C_3\varphi = C_4.$$

Demnach müssen die Functionen f und φ der folgenden Gleichung Genüge leisten:

$$0 = \begin{vmatrix} f'\varphi-f\varphi', & f', & -\varphi' \\ f''\varphi-2f'\varphi'+f\varphi'', & f'', & \varphi'' \\ f'''\varphi-3f''\varphi'+3f'\varphi''-f\varphi''', & f''', & -\varphi''' \end{vmatrix},$$

oder

$$0 = \begin{vmatrix} 0, & f', & -\varphi' \\ -2f'\varphi', & f'', & \varphi'' \\ -3(f''\varphi'-f'\varphi''), & f''', & -\varphi''' \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir die Determinante auflösen:

$$2f'\varphi'(f'''\varphi'-f'\varphi''')+3(f'^2\varphi''^2-f''^2\varphi'^2) = 0.$$

Dividiren wir durch $f'^2\varphi'^2$, welche Grösse nicht verschwinden kann, so entsteht:

$$2\frac{f'''}{f'}-3\frac{f''^2}{f'^2} = 2\frac{\varphi'''}{\varphi'}-3\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} = c.$$

Es ist dies die Gleichung, welche *Lagrange* in der oben angeführten Abhandlung weiter behandelt hat; setzen wir $c = -4k$, so findet vollständige Uebereinstimmung statt.

2) Den Geraden $t = \text{const.}$ soll ein System confocaler Kegelschnitte entsprechen.

Die Gleichung der confocalen Kegelschnitte sei:

$$\frac{T^2}{1+\lambda}+\frac{U^2}{\lambda} = 1.$$

Wir erhalten dann die Gleichung zwischen f und φ, indem wir λ aus den beiden Gleichungen eliminiren:

$$\frac{(f+\varphi)^2}{1+\lambda}-\frac{(f-\varphi)^2}{\lambda} = 4,$$

$$\frac{(f+\varphi)(f'-\varphi')}{1+\lambda}-\frac{(f-\varphi)(f'+\varphi')}{\lambda} = 0.$$

Es folgt hieraus:

$$\frac{1}{1+\lambda} = 2\frac{f'+\varphi'}{(f+\varphi)(f'\varphi+f\varphi')},$$
$$\frac{1}{\lambda} = 2\frac{f'-\varphi'}{(f-\varphi)(f'\varphi+f\varphi')},$$

also

$$2 = (f'\varphi+f\varphi')\left(\frac{f+\varphi}{f'+\varphi'}-\frac{f-\varphi}{f'-\varphi'}\right),$$

oder

$$f'^2-\varphi'^2 = f'^2\varphi^2-f^2\varphi'^2;$$

folglich

$$\frac{f'^2}{1-f^2} = \frac{\varphi'^2}{1-\varphi^2} = c^2.$$

Wir erhalten demnach:

$$f(t+iu) = \sin\{c(t+iu)+a\},$$
$$\varphi(t-iu) = \sin\{c(t-iu)+b\}.$$

Damit f und φ conjugirt imaginäre Functionen seien, muss entweder c reell sein und dann a und b conjugirt imaginär; oder es muss c rein imaginär sein, $b=\pi+b'$ und a und b' conjugirt imaginär. Im erstern Fall entspricht den Geraden $t=\text{const.}$ das System confocaler Hyperbeln, im letztern das System confocaler Ellipsen.

Setzen wir:

$$c=1,\quad a=0,\quad b=0,$$

wodurch wir den Anfangspunkt der Coordinaten in der abzubildenden Ebene und die Vergrösserung des Bildes bestimmen, Grössen, auf welche hier wenig ankommt, so ergiebt sich:

$$T = \frac{\sin(t+iu)+\sin(t-iu)}{2} = \sin t\frac{e^u+e^{-u}}{2},$$
$$U = \frac{\sin(t+iu)-\sin(t-iu)}{2i} = \cos t\frac{e^u-e^{-u}}{2}.$$

Durch Elimination von u und dann von t erhalten wir die Systeme von Curven, welche den Geraden $t=\text{const.}$ und den Geraden $u=\text{const.}$ entsprechen:

$$\frac{T^2}{1-\cos^2 t}-\frac{U^2}{\cos^2 t} = 1,$$
$$\frac{T^2}{1+\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2}+\frac{U^2}{\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2} = 1.$$

Setzen wir hingegen:

$$c = i, \quad a = 0, \quad b = \pi,$$

so entsteht:

$$T = \frac{\sin i(t+iu) - \sin i(t-iu)}{2} = -\sin u \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$U = \frac{\sin i(t+iu) + \sin i(t-iu)}{2i} = \cos u \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

und die beiden Systeme von Curven werden:

$$\frac{T^2}{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} + \frac{U^2}{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\frac{T^2}{1 - \cos^2 u} - \frac{U^2}{\cos^2 u} = 1.$$

3) Den Geraden $t = \text{const.}$ sollen Kegelschnitte entsprechen.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts kann, wenn T und U durch t und u ausgedrückt werden, auf die folgende Form gebracht werden:

$$C_1 f^2 + C_2 f\varphi + C_3 \varphi^2 + C_4 f + C_5 \varphi = C,$$

und es müssen demnach f und φ, damit den Geraden $t = \text{const.}$ Kegelschnitte entsprechen, der folgenden Gleichung Genüge leisten:

$$(1.) \quad 0 =$$

$$\begin{vmatrix} ff', & f'\varphi - f\varphi', & -\varphi\varphi', & f', & -\varphi' \\ ff'' + f'^2, & f''\varphi - 2f'\varphi' + f\varphi'', & \varphi\varphi'' + \varphi'^2, & f'', & \varphi'' \\ ff''' + 3f'f'', & f'''\varphi - 3f''\varphi' + 3f'\varphi'' - f\varphi''', & -\varphi\varphi''' - 3\varphi'\varphi'', & f''', & -\varphi''' \\ ff^{IV} + 4f'f''' + 3f''^2, & f^{IV}\varphi - 4f'''\varphi' + 6f''\varphi'' - 4f'\varphi''' + f\varphi^{IV}, & \varphi\varphi^{IV} + 4\varphi'\varphi''' + 3\varphi''^2, & f^{IV}, & \varphi^{IV} \\ ff^{V} + 5f'f^{IV} + 10f''f''', & f^{V}\varphi - 5f^{IV}\varphi' + 10f'''\varphi'' - 10f''\varphi''' + 5f'\varphi^{IV} - f\varphi^{V}, & -\varphi\varphi^{V} - 5\varphi'\varphi^{IV} - 10\varphi''\varphi''', & f^{V}, & -\varphi^{V} \end{vmatrix}$$

oder, nach einigen einfachen Reductionen:

$$0 = \left(\frac{f''}{f'} + \frac{\varphi''}{\varphi'}\right) \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & f', & -\varphi' \\ f'^2, & 0, & \varphi'^2, & f'', & \varphi'' \\ 3f'f'', & 0, & -3\varphi'\varphi'', & f''', & -\varphi''' \\ 4f'f''' + 3f''^2, & 3(f''\varphi' + f'\varphi''), & 4\varphi'\varphi''' + 3\varphi''^2, & f^{IV}, & \varphi^{IV} \\ 5f'f^{IV} + 10f''f''', & 10(f'''\varphi' - f'\varphi'''), & -5\varphi'\varphi^{IV} - 10\varphi''\varphi''', & f^{V}, & -\varphi^{V} \end{vmatrix}.$$

Wenn wir von dem speciellen Falle

$$\frac{f''}{f'} + \frac{\varphi''}{\varphi'} = 0$$

abstrahiren, dem wir unten wieder begegnen werden, so muss die Determinante Null sein; dies giebt die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = &- 9(f^{V}\varphi' - f'\varphi^{V})(f''\varphi'+f'\varphi'')^2 f'\varphi' \\
&+15(f'f^{IV}+2f''f''')(f''\varphi'+f'\varphi'')\{\varphi'^2(f'''\varphi'-f'\varphi''')+3\varphi'\varphi''(f''\varphi'+f'\varphi'')\} \\
&-10(f'''\varphi'-f'\varphi''')(4f'f'''+3f''^2)\{\varphi'^2(f'''\varphi'-f'\varphi''')+3\varphi'\varphi''(f''\varphi'+f'\varphi'')\} \\
&+10(f'''\varphi'-f'\varphi''')(4\varphi'\varphi'''+3\varphi''^2)\{f'^2(f'''\varphi'-f'\varphi''')-3f'f''(f''\varphi'+f'\varphi'')\} \\
&+15(\varphi'\varphi^{IV}+2\varphi''\varphi''')(f''\varphi'+f'\varphi'')\{f'^2(f'''\varphi'-f'\varphi''')-3f'f''(f''\varphi'+f'\varphi'')\} \\
&+30(f^{IV}\varphi'+f'\varphi^{IV})(f'''\varphi'-f'\varphi''')(f''\varphi'+f'\varphi'')f'\varphi',
\end{aligned}$$

oder, wenn wir mit $f'^4\varphi'^4$ dividiren und das Zeichen umkehren,

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = &\,9\left(\frac{f^{V}}{f'}-\frac{\varphi^{V}}{\varphi'}\right)\left(\frac{f''}{f'}+\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2-45\left(\frac{f^{IV}}{f'}+\frac{\varphi^{IV}}{\varphi'}\right)\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{\varphi'''}{\varphi'}\right)\left(\frac{f''}{f'}+\frac{\varphi''}{\varphi'}\right) \\
&-45\left(\frac{f^{IV}}{f'}\frac{\varphi''}{\varphi'}-\frac{f''}{f'}\frac{\varphi^{IV}}{\varphi'}\right)\left(\frac{f''}{f'}+\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2+40\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{\varphi'''}{\varphi'}\right)^3 \\
&+90\left(\frac{f'''}{f'}\frac{\varphi''}{\varphi'}+\frac{f''}{f'}\frac{\varphi'''}{\varphi'}\right)\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{\varphi'''}{\varphi'}\right)\left(\frac{f''}{f'}+\frac{\varphi''}{\varphi'}\right).
\end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun:

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{f''}{f'}=\mathfrak{X}_2,\quad \frac{f'''}{f'}=\mathfrak{X}_3,\quad \frac{f^{IV}}{f'}=\mathfrak{X}_4,\quad \frac{f^{V}}{f'}=\mathfrak{X}_5, \\
&\frac{\varphi''}{\varphi'}=\mathfrak{Y}_2,\quad \frac{\varphi'''}{\varphi'}=\mathfrak{Y}_3,\quad \frac{\varphi^{IV}}{\varphi'}=\mathfrak{Y}_4,\quad \frac{\varphi^{V}}{\varphi'}=\mathfrak{Y}_5,
\end{aligned}\right.$$

so können wir die Gleichung (2.) in der folgenden Form schreiben:

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = &\{9\mathfrak{X}_5\mathfrak{X}_2^2-45\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_2+40\mathfrak{X}_3^3\}-\{9\mathfrak{Y}_5\mathfrak{Y}_2^2-45\mathfrak{Y}_4\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Y}_2+40\mathfrak{Y}_3^3\} \\
&+9\{2\mathfrak{X}_5\mathfrak{X}_2-5\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_3-5\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_2^2+10\mathfrak{X}_3^2\mathfrak{X}_2\}\mathfrak{Y}_2-9\{2\mathfrak{Y}_5\mathfrak{Y}_2-5\mathfrak{Y}_4\mathfrak{Y}_3-5\mathfrak{Y}_4\mathfrak{Y}_2^2+10\mathfrak{Y}_3^2\mathfrak{Y}_2\}\mathfrak{X}_2 \\
&+9\{\mathfrak{X}_5-10\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_2+10\mathfrak{X}_3^2\}\mathfrak{Y}_2^2-9\{\mathfrak{Y}_5-10\mathfrak{Y}_4\mathfrak{Y}_2+10\mathfrak{Y}_3^2\}\mathfrak{X}_2^2 \\
&+15\{3\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_2-8\mathfrak{X}_3^2+6\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_2^2\}\mathfrak{Y}_3-15\{3\mathfrak{Y}_4\mathfrak{Y}_2-8\mathfrak{Y}_3^2+6\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Y}_2^2\}\mathfrak{X}_3 \\
&+45\mathfrak{X}_4(\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_2^3)-45\mathfrak{Y}_4(\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_2^3).
\end{aligned}\right.$$

Setzen wir endlich zur Abkürzung:

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= 9\mathfrak{X}_5\mathfrak{X}_2^2-45\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_2+40\mathfrak{X}_3^3, \\
X_1 &= 2\mathfrak{X}_5\mathfrak{X}_2-5\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_3-5\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_2^2+10\mathfrak{X}_3^2\mathfrak{X}_2, \\
X_2 &= \mathfrak{X}_5-10\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_2+10\mathfrak{X}_3^2, \\
X_3 &= 3\mathfrak{X}_4\mathfrak{X}_2-8\mathfrak{X}_3^2+6\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_2^2, \\
X_4 &= \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_2^3,
\end{aligned}\right.$$

und bezeichnen wir mit Y, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 die entsprechenden Ausdrücke, welche wir durch Vertauschung von $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{Y}$ erhalten, so nimmt die Gleichung (4.) die Form an:

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & X - Y + 9X_1\mathfrak{Y}_2 - 9Y_1\mathfrak{X}_2 + 9X_2\mathfrak{Y}_2^2 - 9Y_2\mathfrak{X}_2^2 \\ & + 15X_3\mathfrak{Y}_3 - 15Y_3\mathfrak{X}_3 + 45\mathfrak{X}_4 Y_4 - 45\mathfrak{Y}_4 X_4. \end{aligned}\right.$$

Die Grössen $\mathfrak{X}$ und X sind Functionen von $t+iu$, die $\mathfrak{Y}$ und Y Functionen von $t-iu$.

Wir haben mithin, wenn wir die entwickelte Theorie auf diesen Fall anwenden, die allgemeine Lösung:

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned} 45\,\mathfrak{X}_4 &= c\,X_4 + a_1\,\mathfrak{X}_3 + a_2\,\mathfrak{X}_2^2 + a_3\,\mathfrak{X}_2 + a_4, \\ 45\,\mathfrak{Y}_4 &= c\,Y_4 + b_1\,\mathfrak{Y}_3 + b_2\,\mathfrak{Y}_2^2 + b_3\,\mathfrak{Y}_2 + b_4, \\ 15\,X_3 &= b_1 X_4 + c^{(1)}\,\mathfrak{X}_3 + a_1^{(1)}\,\mathfrak{X}_2^2 + a_2^{(1)}\,\mathfrak{X}_2 + a_3^{(1)}, \\ 15\,Y_3 &= a_1 Y_4 + c^{(1)}\,\mathfrak{Y}_3 + b_1^{(1)}\,\mathfrak{Y}_2^2 + b_2^{(1)}\,\mathfrak{Y}_2 + b_3^{(1)}, \\ 9\,X_2 &= b_2 X_4 + b_1^{(1)}\,\mathfrak{X}_3 + c^{(2)}\,\mathfrak{X}_2^2 + a_1^{(2)}\,\mathfrak{X}_2 + a_2^{(2)}, \\ 9\,Y_2 &= a_2 Y_4 + a_1^{(1)}\,\mathfrak{Y}_3 + c^{(2)}\,\mathfrak{Y}_2^2 + b_1^{(2)}\,\mathfrak{Y}_2 + b_2^{(2)}, \\ 9\,X_1 &= b_3 X_4 + b_2^{(1)}\,\mathfrak{X}_3 + b_1^{(2)}\,\mathfrak{X}_2^2 + c^{(3)}\,\mathfrak{X}_2 + a_1^{(3)}, \\ 9\,Y_1 &= a_3 Y_4 + a_2^{(1)}\,\mathfrak{Y}_3 + a_1^{(2)}\,\mathfrak{Y}_2^2 + c^{(3)}\,\mathfrak{Y}_2 + b_1^{(3)}, \\ X &= b_4 X_4 + b_3^{(1)}\,\mathfrak{X}_3 + b_2^{(2)}\,\mathfrak{X}_2^2 + b_1^{(3)}\,\mathfrak{X}_2 + c^{(4)}, \\ Y &= a_4 Y_4 + a_3^{(1)}\,\mathfrak{Y}_3 + a_2^{(2)}\,\mathfrak{Y}_2^2 + a_1^{(3)}\,\mathfrak{Y}_2 + c^{(4)}. \end{aligned}\right.$$

Die besonderen Lösungen aber werden:

$$(8.)\quad \mathfrak{X}_2 = \alpha, \qquad \mathfrak{Y}_2 = \beta,$$

$$(9.)\quad \mathfrak{X}_2^2 = \alpha\mathfrak{X}_2 + \alpha_1, \qquad \mathfrak{Y}_2^2 = \beta\mathfrak{Y}_2 + \beta_1,$$

$$(10.)\quad \mathfrak{X}_3 = \alpha\mathfrak{X}_2^2 + \alpha_1\mathfrak{X}_2 + \alpha_2, \qquad \mathfrak{Y}_3 = \beta\mathfrak{Y}_2^2 + \beta_1\mathfrak{Y}_2 + \beta_2,$$

$$(11.)\quad X_4 = \alpha\mathfrak{X}_3 + \alpha_1\mathfrak{X}_2^2 + \alpha_2\mathfrak{X}_2 + \alpha_3, \qquad Y_4 = \beta\mathfrak{Y}_3 + \beta_1\mathfrak{Y}_2^2 + \beta_2\mathfrak{Y}_2 + \beta_3.$$

In den Fällen (8.), (9.), (10.) ist es am einfachsten, ganz direkt die Constanten so zu bestimmen, dass der Gleichung (4.) Genüge geleistet wird.

In dem Falle (11.) aber wird das System Gleichungen, welchem noch Genüge zu leisten ist:

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned} 15\,X_3 &= 45\beta\,\mathfrak{X}_4 + c\,\mathfrak{X}_3 + a_1\,\mathfrak{X}_2^2 + a_2\,\mathfrak{X}_2 + a_3, \\ 15\,Y_3 &= 45\alpha\,\mathfrak{Y}_4 + c\,\mathfrak{Y}_3 + b_1\,\mathfrak{Y}_2^2 + b_2\,\mathfrak{Y}_2 + b_3, \\ 9\,X_2 &= 45\beta_1\mathfrak{X}_4 + b_1\mathfrak{X}_3 + c^{(1)}\mathfrak{X}_2^2 + a_1^{(1)}\mathfrak{X}_2 + a_2^{(1)}, \\ 9\,Y_2 &= 45\alpha_1\mathfrak{Y}_4 + a_1\mathfrak{Y}_3 + c^{(1)}\mathfrak{Y}_2^2 + b_1^{(1)}\mathfrak{Y}_2 + b_2^{(1)}, \\ 9\,X_1 &= 45\beta_2\mathfrak{X}_4 + b_2\mathfrak{X}_3 + b_1^{(1)}\,\mathfrak{X}_2^2 + c^{(2)}\mathfrak{X}_2 + a_1^{(2)}, \\ 9\,Y_1 &= 45\alpha_2\mathfrak{Y}_4 + a_2\mathfrak{Y}_3 + a_1^{(1)}\,\mathfrak{Y}_2^2 + c^{(2)}\mathfrak{Y}_2 + b_1^{(2)}, \\ X &= 45\beta_3\mathfrak{X}_4 + b_3\mathfrak{X}_3 + b_2^{(1)}\mathfrak{X}_2^2 + b_1^{(2)}\,\mathfrak{X}_2 + c^{(3)}, \\ Y &= 45\,\alpha_3\mathfrak{Y}_4 + a_3\mathfrak{Y}_3 + a_2^{(1)}\,\mathfrak{Y}_2^2 + a_1^{(2)}\,\mathfrak{Y}_2 + c^{(3)}. \end{aligned}\right.$$

Wir beginnen mit der weitern Behandlung der besondern Fälle, indem diese am einfachsten ist und wir nachher zeigen werden, dass die allgemeine Lösung (7.) kein neues Resultat liefert.

Die Fälle (8.) und (9.) sind identisch, indem wir uns die Gleichungen (9.) nach $\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{Y}_2$ können aufgelöst denken. Der Fall (8.) ist auch nur ein besonderer Fall von (10.); wir wollen nichtsdestoweniger denselben für sich behandeln, um ihn aus den folgenden Betrachtungen immer ausschliessen zu können.

Es folgt aus (8.):

$$\mathfrak{X}_2 = \alpha,\quad \mathfrak{X}_3 = \alpha^2,\quad \mathfrak{X}_4 = \alpha^3,\quad \mathfrak{X}_5 = \alpha^4,$$
$$\mathfrak{Y}_2 = \beta,\quad \mathfrak{Y}_3 = \beta^2,\quad \mathfrak{Y}_4 = \beta^3,\quad \mathfrak{Y}_5 = \beta^4.$$

Demnach führt die Gleichung (4.) auf die folgende Gleichung zwischen α und β:

$$\begin{aligned}0 = {} & 9(\alpha^4-\beta^4)(\alpha+\beta)^2-45(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)\\ & -45(\alpha^3\beta-\alpha\beta^3)(\alpha+\beta)^2+40(\alpha^2-\beta^2)^3+90(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

oder

$$0 = 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta).$$

Nur die Bedingungen

$$\alpha = \beta \quad\text{und}\quad \alpha = -\beta$$

geben Lösungen, wo f und φ conjugirt imaginäre Functionen sind; denn wir erhalten durch Integration der Gleichungen (8.):

$$f(t+iu) = Ae^{\alpha(t+iu)}+A_1,$$
$$\varphi(t-iu) = Be^{\beta(t-iu)}+B_1.$$

Ist $\alpha = \beta$, so muss α reell sein, hingegen rein imaginär, wenn $\alpha = -\beta$ ist; die Constanten A und B müssen conjugirt imaginär sein, ebenso A_1 und B_1. — Wir gehen nun zu dem zweiten Fall über:

$$(10.)\quad \begin{cases}\mathfrak{X}_3 = \alpha\mathfrak{X}_2^2+\alpha_1\mathfrak{X}_2+\alpha_2,\\ \mathfrak{Y}_3 = \beta\mathfrak{Y}_2^2+\beta_1\mathfrak{Y}_2+\beta_2.\end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_4 = {} & \alpha(2\alpha-1)\mathfrak{X}_2^3+3\alpha\alpha_1\mathfrak{X}_2^2+(2\alpha\alpha_2+\alpha_1^2+\alpha_2)\mathfrak{X}_2+\alpha_1\alpha_2,\\ \mathfrak{X}_5 = {} & \alpha(6\alpha^2-7\alpha+2)\mathfrak{X}_2^4+6\alpha\alpha_1(2\alpha-1)\mathfrak{X}_2^3+\alpha(8\alpha\alpha_2+7\alpha_1^2-2\alpha_2)\mathfrak{X}_2^2\\ & +\alpha_1(8\alpha\alpha_2+\alpha_1^2+2\alpha_2)\mathfrak{X}_2+\alpha_1(2\alpha\alpha_2+\alpha_1^2+\alpha_2),\end{aligned}$$

und $\mathfrak{Y}_4$ und $\mathfrak{Y}_5$ erhalten ganz entsprechende Werthe.

Wir setzen diese Werthe in die Gleichung (4.) ein; dann muss diese entweder identisch erfüllt sein in Bezug auf $\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{Y}_2$, oder sie führt auf

den schon behandelten Fall

$$\mathfrak{X}_2 = \text{const.}, \quad \mathfrak{Y}_2 = \text{const.};$$

nur in dem erstern Fall erhalten wir also neue Lösungen der Aufgabe.

Nun giebt erstens die Bedingung, dass das constante Glied verschwinde:

$$(a.) \qquad \alpha_2 = \beta_2;$$

ferner die Bedingung, dass der Coefficient von $\mathfrak{X}_2^3\mathfrak{Y}_2^3$ verschwinde:

$$\alpha(2\alpha-1)(\beta-1) = \beta(2\beta-1)(\alpha-1),$$

oder

$$(b.) \qquad (\alpha-\beta)\{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\} = 0;$$

endlich die Bedingungen, dass die Coefficienten von $\mathfrak{X}_2^6, \mathfrak{X}_2^5, \mathfrak{X}_2^4$ und $\mathfrak{Y}_2^6, \mathfrak{Y}_2^5, \mathfrak{Y}_2^4$ verschwinden:

$$(c.) \qquad \begin{cases} \alpha(2\alpha-3)(\alpha-3) = 0, \\ \beta(2\beta-3)(\beta-3) = 0, \end{cases}$$

$$(d.) \qquad \begin{cases} \alpha\alpha_1(\alpha-3) = 0, \\ \beta\beta_1(\beta-3) = 0, \end{cases}$$

$$(e.) \qquad \begin{cases} 3\alpha\{(2\alpha_2-5\beta_2)(2\alpha-3)+\alpha_1^2\} = 0, \\ 3\beta\{(2\beta_2-5\alpha_2)(2\beta-3)+\beta_1^2\} = 0. \end{cases}$$

Wir haben mithin erstens wegen (*a.*):

$$\alpha_2 = \beta_2 = c;$$

ferner folgt aus (*b.*) und (*c.*):

$$\alpha = \beta;$$

endlich geben die Gleichungen (*c.*), (*d.*), (*e.*) entweder:

$$\alpha = \beta = 0,$$

oder:

$$\alpha = \beta = \tfrac{3}{2}, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0,$$

oder:

$$\alpha = \beta = 3, \quad \alpha_1^2 = \beta_1^2 = 9c.$$

Wir haben also entweder:

$$(13.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_3 = \alpha_1\mathfrak{X}_2+c, \\ \mathfrak{Y}_3 = \beta_1\mathfrak{Y}_2+c, \\ \mathfrak{X}_4 = (\alpha_1^2+c)\mathfrak{X}_2+\alpha_1 c, \\ \mathfrak{Y}_4 = (\beta_1^2+c)\mathfrak{Y}_2+\beta_1 c, \\ \mathfrak{X}_5 = \alpha_1(\alpha_1^2+2c)\mathfrak{X}_2+(\alpha_1^2+c)c, \\ \mathfrak{Y}_5 = \beta_1(\beta_1^2+2c)\mathfrak{Y}_2+(\beta_1^2+c)c, \end{cases}$$

oder

$$(14.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_3 = \frac{3}{2}\mathfrak{X}_2^2+c, \\ \mathfrak{Y}_3 = \frac{3}{2}\mathfrak{Y}_2^2+c, \\ \mathfrak{X}_4 = 3\mathfrak{X}_2^3+4c\mathfrak{X}_2, \\ \mathfrak{Y}_4 = 3\mathfrak{Y}_2^3+4c\mathfrak{Y}_2, \\ \mathfrak{X}_5 = \frac{15}{2}\mathfrak{X}_2^4+15c\mathfrak{X}_2^2+4c^2, \\ \mathfrak{Y}_5 = \frac{15}{2}\mathfrak{Y}_2^4+15c\mathfrak{Y}_2^2+4c^2, \end{cases}$$

oder

$$(15.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_3 = 3\mathfrak{X}_2^2+3c_1\mathfrak{X}_2+c_1^2, \\ \mathfrak{Y}_3 = 3\mathfrak{Y}_2^2+3c_2\mathfrak{Y}_2+c_2^2, \\ \mathfrak{X}_4 = 15\mathfrak{X}_2^3+27c_1\mathfrak{X}_2^2+16c_1^2\mathfrak{X}_2+3c_1^3, \\ \mathfrak{Y}_4 = 15\mathfrak{Y}_2^3+27c_2\mathfrak{Y}_2^2+16c_2^2\mathfrak{Y}_2+3c_2^3, \\ \mathfrak{X}_5 = 105\mathfrak{X}_2^4+270c_1\mathfrak{X}_2^3+255c_1^2\mathfrak{X}_2^2+105c_1^3\mathfrak{X}_2+16c_1^4, \\ \mathfrak{Y}_5 = 105\mathfrak{Y}_2^4+270c_2\mathfrak{Y}_2^3+255c_2^2\mathfrak{Y}_2^2+105c_2^3\mathfrak{Y}_2+16c_2^4, \end{cases}$$

wo zwischen c_1 und c_2 die Bedingung stattfindet:

$$c_1^2 = c_2^2.$$

Die Werthe (14.) leisten der Gleichung (4.) Genüge. Setzen wir aber die Werthe (15.) ein, so ergiebt sich

$$c_1+c_2 = 0,$$

folglich

$$c_2 = -c_1 = \gamma.$$

Setzen wir endlich die Werthe (13.) ein, so ergeben sich zwischen den Constanten noch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\beta_1 &= 0, \\ \alpha_1(2\alpha_1^2+9c) &= 0, \\ \beta_1(2\beta_1^2+9c) &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben also entweder

$$(16.)\quad \alpha_1 = \beta_1 = 0$$

oder

$$(17.)\quad \alpha_1 = -\beta_1 = 3\gamma, \quad c = -2\gamma^2.$$

Mithin erhalten wir, wenn wir für $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{Y}_3$ ihre Werthe in f und φ setzen, die folgenden vier Lösungen:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{f'''}{f'} = \frac{3}{2}\dfrac{f''^2}{f'^2}+c, \\ \dfrac{\varphi'''}{\varphi'} = \frac{3}{2}\dfrac{\varphi''^2}{\varphi'^2}+c, \end{cases}$$

$$(19.)\quad \begin{cases} f'f''' = 3f''^2-3\gamma f'f''+\gamma^2 f'^2, \\ \varphi'\varphi''' = 3\varphi''^2+3\gamma\varphi'\varphi''+\gamma^2\varphi'^2, \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} f''' = cf', \\ \varphi''' = c\varphi', \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} f''' = 3\gamma f''-2\gamma^2 f', \\ \varphi''' = -3\gamma\varphi''-2\gamma^2\varphi'. \end{cases}$$

Die Gleichungen (18.) sind die von *Lagrange*, welche auf die Systeme von Kreisen führen. Wir erhalten durch Integration:

$$(22.)\quad \begin{cases} f(t+iu) = A\dfrac{1+e^{\sqrt{-2c}\,(t+iu)+a}}{1-e^{\sqrt{-2c}\,(t+iu)+a}}+A_1, \\ \varphi(t-iu) = B\dfrac{1+e^{\sqrt{-2c}\,(t-iu)+b}}{1-e^{\sqrt{-2c}\,(t-iu)+b}}+B_1. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen (19.) durch Integration:

$$(23.)\quad \begin{cases} f(t+iu) = A\sqrt{1-e^{\gamma(t+iu)+a}}+A_1, \\ \varphi(t-iu) = B\sqrt{1-e^{-\gamma(t-iu)+b}}+B_1. \end{cases}$$

Rein imaginär muss γ sein, a und b, A und B, A_1 und B_1 conjugirt imaginär.

Die Curven $u = \text{const.}$ bilden ein System confocaler Lemniscaten, welche von einem System gleichseitiger Hyperbeln, die alle durch die Brennpunkte der Lemniscaten gehen, orthogonal geschnitten werden. Setzen wir:

$$\gamma = i,\quad A = B = 1,\quad a = b = 0,\quad A_1 = B_1 = 0,$$

so wird:

$$f^2 = 1-e^{i(t+iu)} = (T+iU)^2,$$
$$\varphi^2 = 1-e^{-i(t-iu)} = (T-iU)^2,$$

und es werden die Gleichungen der Lemniscaten:

$$\{(T-1)^2+U^2\}\{(T+1)^2+U^2\} = e^{-2u}$$

und die Gleichungen der Hyperbeln:

$$T^2-U^2-2TU\operatorname{ctg} t = 1,$$

oder

$$(T\cos\tfrac{1}{2}t+U\sin\tfrac{1}{2}t)(T\sin\tfrac{1}{2}t-U\cos\tfrac{1}{2}t) = \tfrac{1}{2}\sin t.$$

Besonders hervorzuheben ist noch der Fall

$$\gamma = 0.$$

Wir haben dann:

$$(19, a) \quad \begin{cases} f' f''' = 3 f''^2, \\ \varphi' \varphi''' = 3 \varphi''^2, \end{cases}$$

also

$$(23, a) \quad \begin{cases} f(t+iu) = \sqrt{a(t+iu)+a_1} + A, \\ \varphi(t-iu) = \sqrt{b(t-iu)+b_1} + B, \end{cases}$$

a und b, a_1 und b_1, A und B müssen conjugirt imaginär sein. Es sind dies Systeme concentrischer gleichseitiger Hyperbeln; die Axen des einen Systems sind die Asymptoten des andern.

Setzen wir:

$$a = b = 1, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad A = B = 0,$$

so ergiebt sich:

$$f^2 = t + iu = (T + iU)^2,$$
$$\varphi^2 = t - iu = (T - iU)^2,$$

und die Gleichungen der Hyperbeln werden:

$$T^2 - U^2 = t,$$
$$2TU = u.$$

Als dritte Lösung ergiebt sich aus den Gleichungen (20.):

$$(24.) \quad \begin{cases} f(t+iu) = A e^{\sqrt{c}(t+iu)} + A_1 e^{-\sqrt{c}(t+iu)} + A_2, \\ \varphi(t-iu) = B e^{\sqrt{c}(t-iu)} + B_1 e^{-\sqrt{c}(t-iu)} + B_2. \end{cases}$$

Es sind dies die Systeme confocaler Kegelschnitte.

In dem besondern Falle $c = 0$ ergeben sich die Systeme confocaler Parabeln:

$$(24, a) \quad \begin{cases} f(t+iu) = a(t+iu)^2 + a_1(t+iu) + A, \\ \varphi(t-iu) = b(t-iu)^2 + b_1(t-iu) + B. \end{cases}$$

Es müssen a und b, a_1 und b_1, A und B conjugirt imaginär sein. Setzen wir:

$$a = b = 1, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad A = B = 0,$$

so erhalten wir:

$$T + iU = (t + iu)^2,$$
$$T - iU = (t - iu)^2,$$

und die Gleichungen der Parabeln werden:

$$U^2 = -4 t^2 (T - t^2),$$
$$U^2 = 4 u^2 (T + u^2).$$

Wir haben endlich noch den vierten Fall zu betrachten:

$$(21.)\quad \begin{cases} f''' = 3\gamma f''-2\gamma^2 f', \\ \varphi''' = -3\gamma\varphi''-2\gamma^2\varphi'; \end{cases}$$

folglich

$$(25.)\quad \begin{cases} f(t+iu) = Ae^{2\gamma(t+iu)}+A_1e^{\gamma(t+iu)}+A_2, \\ \varphi(t-iu) = Be^{-2\gamma(t-iu)}+B_1e^{-\gamma(t-iu)}+B_2. \end{cases}$$

Damit $f+\varphi$ reell und $f-\varphi$ rein imaginär sei, müssen wir γ rein imaginär annehmen; ferner müssen A und B, A_1 und B_1, A_2 und B_2 conjugirt imaginär sein.

Setzen wir:

$$\gamma=-i,\quad A=B=1,\quad A_1=B_1=1,\quad A_2=B_2=0,$$

so erhalten wir:

$$T+iU = e^{2(u-it)}+e^{(u-it)},$$
$$T-iU = e^{2(u+it)}+e^{(u+it)},$$

also

$$(T\sin 2t+U\cos 2t)^2+\sin t(T\sin t+U\cos t) = 0,$$
$$(e^{4u}-T^2-U^2)^2-e^{2u}\{(e^{2u}+T)^2+U^2\} = 0.$$

Wir erhalten ein System Parabeln, welche von Curven vierter Ordnung rechtwinklig geschnitten werden.

Die Coordinaten der Scheitel der Parabeln sind:

$$T_0 = -\frac{\cos^2 t(1+2\sin^2 t)}{4},$$

$$U_0 = \frac{\sin^3 t\cos t}{2},$$

ihre Parameter:

$$\sin^2 t;$$

ihre Axen bilden mit der T-axe den Winkel

$$-2t,$$

und sie gehen sämmtlich durch den Anfangspunkt der Coordinaten T, U.

In dem besondern Falle $A_1=B_1=0$ erhalten wir ein System concentrischer Kreise, welche von geraden Linien, die durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Kreise gehen, orthogonal geschnitten werden, und in dem besondern Falle $\gamma=0$ die Systeme confocaler Parabeln.

Wir werden nun nachweisen, dass der vierte besondere Fall (11.) und ebenso der allgemeine Fall (7.) auf keine neuen Lösungen führen. Demnach sind die vier oben gefundenen Lösungen (22.), (23.), (24.), (25.) die einzigen; wir können nur auf diese vier Arten das System von Geraden $t=\text{const.}$ durch ein System von Kegelschnitten abbilden.

Die Gleichungen (11.) sind:

$$(11.)\quad \begin{cases} X_4 = \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_2^3 = \alpha\mathfrak{X}_3 + \alpha_1\mathfrak{X}_2^2 + \alpha_2\mathfrak{X}_2 + \alpha_3, \\ Y_4 = \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{Y}_2^3 = \beta\mathfrak{Y}_3 + \beta_1\mathfrak{Y}_2^2 + \beta_2\mathfrak{Y}_2 + \beta_3; \end{cases}$$

ferner muss den Gleichungen (12.) Genüge geleistet werden; die beiden ersten derselben geben, wenn wir die Werthe von X_3 und Y_3 einsetzen:

$$(12.)\quad \begin{cases} 15(3\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 - 8\mathfrak{X}_3^2 + 6\mathfrak{X}_2^2\mathfrak{X}_3) = 45\beta\mathfrak{X}_4 + c\mathfrak{X}_3 + a_1\mathfrak{X}_2^2 + a_2\mathfrak{X}_2 + a_3, \\ 15(3\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_4 - 8\mathfrak{Y}_3^2 + 6\mathfrak{Y}_2^2\mathfrak{Y}_3) = 45\alpha\mathfrak{Y}_4 + c\mathfrak{Y}_3 + b_1\mathfrak{Y}_2^2 + b_2\mathfrak{Y}_2 + b_3. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (11.) folgt:

$$\mathfrak{X}_3 = \frac{\mathfrak{X}_2^3 + \alpha_1\mathfrak{X}_2^2 + \alpha_2\mathfrak{X}_2 + \alpha_3}{\mathfrak{X}_2 - \alpha},$$

folglich

$$\mathfrak{X}_4 = \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 + \frac{d\mathfrak{X}_3}{d\mathfrak{X}_2}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_2^2) = \frac{\mathfrak{X}_2^6 + A_5\mathfrak{X}_2^5 + \cdots + A_1\mathfrak{X}_2 + A}{(\mathfrak{X}_2 - \alpha)^3},$$

wo die A Constanten sind. Entsprechende Werthe erhalten wir für $\mathfrak{Y}_3$ und $\mathfrak{Y}_4$. Die Gleichungen (12.) hingegen geben:

$$\mathfrak{X}_4 = \frac{30\mathfrak{X}_2^6 + B_5\mathfrak{X}_2^5 + \cdots + B_1\mathfrak{X}_2 + B}{45(\mathfrak{X}_2 - \beta)(\mathfrak{X}_2 - \alpha)^2},$$

wo die B Constanten sind, und ganz ähnlich $\mathfrak{Y}_4$.

Folglich haben wir entweder

$$\mathfrak{X}_2 = \text{const.},$$

der schon behandelte Fall (8.), oder es muss die folgende Gleichung in Bezug auf $\mathfrak{X}_2$ identisch erfüllt sein:

$$45(\mathfrak{X}_2 - \beta)\{\mathfrak{X}_2^6 + A_5\mathfrak{X}_2^5 + \cdots + A_1\mathfrak{X}_2 + A\} = (\mathfrak{X}_2 - \alpha)\{30\mathfrak{X}_2^6 + B_5\mathfrak{X}_2^5 + \cdots + B_1\mathfrak{X}_2 + B\}.$$

Dies ist aber nicht möglich; denn die Vergleichung der höchsten Coefficienten giebt:

$$45\mathfrak{X}_2^7 = 30\mathfrak{X}_2^7.$$

Folglich liefert der specielle Fall (11.) keine neue Lösung. Wir bemerken, dass der vorhergehende Fall (10.) in diesem nicht mit enthalten ist; denn er war:

$$\mathfrak{X}_3 = \alpha\mathfrak{X}_2^2 + \alpha_1\mathfrak{X}_2 + \alpha_2;$$

bringen wir die Gleichung (11.) auf dieselbe Form, so wird $\alpha = 1$. Wir haben aber nur Lösungen erhalten für α gleich 0, $\frac{3}{2}$, 3. —

Ebenso wenig liefert der allgemeine Fall (7.) eine neue Lösung. Wir brauchen, um dies zu zeigen, bloss die beiden ersten Gleichungen zu betrachten, welche wir auf die folgende Form bringen können, wenn wir den Werth von $\mathfrak{X}_4$ aus der ersten Gleichung in die zweite einsetzen:

$$\mathfrak{X}_4 = (A_1\mathfrak{X}_2 + A)\mathfrak{X}_3 + (B_3\mathfrak{X}_2^3 + B_2\mathfrak{X}_2^2 + B_1\mathfrak{X}_2 + B),$$

$$0 = \mathfrak{X}_3^2 + (C_2\mathfrak{X}_2^2 + C_1\mathfrak{X}_2 + C)\mathfrak{X}_3 + (D_4\mathfrak{X}_2^4 + D_3\mathfrak{X}_2^3 + D_2\mathfrak{X}_2^2 + D_1\mathfrak{X}_2 + D),$$

oder, wenn wir mit X_n einen ganzen rationalen Ausdruck n^{ten} Grades von $\mathfrak{X}_2$ bezeichnen:

$$\mathfrak{X}_4 = X_1\mathfrak{X}_3 + X_3$$

$$0 = \mathfrak{X}_3^2 + X_2\mathfrak{X}_3 + X_4.$$

Aus der letztern Gleichung folgt nun:

$$\mathfrak{X}_3 = -\tfrac{1}{2}\{X_2 \pm \sqrt{X_2^2 - 4X_4}\}$$

und durch Differentiation:

$$\mathfrak{X}_4 = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{X}_2\{X_2 \pm \sqrt{X_2^2 - 4X_4}\} + \tfrac{1}{4}\left\{X_2' \pm \frac{X_2X_2' - 2X_4'}{\sqrt{X_2^2 - 4X_4}}\right\}\{X_2 \pm \sqrt{X_2^2 - 4X_4} + 2\mathfrak{X}_2^2\},$$

aus der erstern hingegen:

$$\mathfrak{X}_4 = -\tfrac{1}{2}X_1\{X_2 \pm \sqrt{X_2^2 - 4X_4}\} + X_3.$$

Folglich muss, wenn nicht $\mathfrak{X}_2$ constant sein soll, die folgende Gleichung in Bezug auf $\mathfrak{X}_2$ identisch erfüllt sein:

$$\{X_2X_2' - 2X_4' - 2(\mathfrak{X}_2 - X_1)X_2 + X_2'(X_2 + 2\mathfrak{X}_2^2) - 4X_3\}^2(X_2^2 - 4X_4)$$
$$= \{(2\mathfrak{X}_2 - X_2' - 2X_1)(X_2^2 - 4X_4) - (X_2X_2' - 2X_4')(X_2 + 2\mathfrak{X}_2^2)\}^2.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn entweder

$$X_2^2 - 4X_4$$

ein vollständiges Quadrat ist, oder wenn die beiden Gleichungen in Bezug auf $\mathfrak{X}_2$ identisch erfüllt sind:

$$X_2X_2' - 2X_4' = 2(\mathfrak{X}_2 - X_1)X_2 - X_2'(X_2 + 2\mathfrak{X}_2^2) + 4X_3,$$

$$(2\mathfrak{X}_2 - X_2' - 2X_1)(X_2^2 - 4X_4) = (X_2 + 2\mathfrak{X}_2^2)(X_2X_2' - 2X_4').$$

Berechnen wir aber die höchsten Glieder der Ausdrücke, so finden wir:

$$\begin{aligned}
X_1 &= c\mathfrak{X}_2 + A, \\
X_2 &= -\tfrac{3}{8}(2+c)\mathfrak{X}_2^2 + B_1\mathfrak{X}_2 + B, \\
X_3 &= -c\mathfrak{X}_2^3 + C_2\mathfrak{X}_2^2 + C_1\mathfrak{X}_2 + C, \\
X_4 &= \tfrac{3}{8}c\mathfrak{X}_2^4 + D_3\mathfrak{X}_2^3 + D_2\mathfrak{X}_2^2 + D_1\mathfrak{X}_2 + D, \\
X_2^2 - 4X_4 &= (\tfrac{3}{8})^2(c-6)(c-\tfrac{2}{3})\mathfrak{X}_2^4 + E_3\mathfrak{X}_2^3 + E_2\mathfrak{X}_2^2 + E_1\mathfrak{X}_2 + E.
\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen werden demnach

$$2\left(\tfrac{3}{8}\right)^2(c-6)\left(c-\tfrac{2}{3}\right)\mathfrak{X}_2^3+\cdots$$

$$=\left\{-2\tfrac{3}{8}(2+c)(1-c)+2\tfrac{3}{8}(2+c)\left[2-\tfrac{3}{8}(2+c)\right]-4c\right\}\mathfrak{X}_2^3+\cdots,$$

$$\left\{\left(\tfrac{3}{8}\right)^3(c-6)\left(c-\tfrac{2}{3}\right)\mathfrak{X}_2^4+E_3\mathfrak{X}_2^3+E_2\mathfrak{X}_2^2+E_1\mathfrak{X}_2+E\right\}\left\{\frac{14-5c}{4}\mathfrak{X}_2+F\right\}$$

$$=\left\{2\left(\tfrac{3}{8}\right)^2(c-6)\left(c-\tfrac{2}{3}\right)\mathfrak{X}_2^3+\tfrac{3}{2}E_3\mathfrak{X}_2^2+E_2\mathfrak{X}_2+\tfrac{1}{2}E_1\right\}\left\{\frac{10-3c}{8}\mathfrak{X}_2^2+B_1\mathfrak{X}_2+B\right\}.$$

Die Vergleichung der höchsten Glieder der ersten Gleichung giebt:

$$(c-6)\left(c+\tfrac{2}{3}\right)=0,$$

der zweiten:

$$(c-6)\left(c-\tfrac{2}{3}\right)(c-2)=0.$$

Wir haben also

$$c=6,$$

und die zweite Gleichung nimmt die Form an:

$$(E_3\mathfrak{X}_2^3+E_2\mathfrak{X}_2^2+E_1\mathfrak{X}_2+E)(-4\mathfrak{X}_2+F)=\tfrac{1}{2}(3E_3\mathfrak{X}_2^2+2E_2\mathfrak{X}_2+E_1)(-\mathfrak{X}_2^2+B_1\mathfrak{X}_2+B).$$

Hieraus folgt aber:

$$E_3=0,\quad E_2=0,\quad E_1=0.$$

Es giebt also nur die eine Lösung, dass

$$X_2^2-4X_4$$

ein vollständiges Quadrat sei; dann wird aber

$$\mathfrak{X}_3=\alpha\mathfrak{X}_2^2+\alpha_1\mathfrak{X}_2+\alpha_2,$$

ein Fall, den wir schon allgemein behandelt haben.

Leipzig, im Juni 1868.

Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders.

(Von Herrn *F. Mertens* zu Krakau.)

Obgleich der Ausdruck des Potentials eines homogenen Polyeders bereits von Herrn *Mehler* (Bd. 66 dieses Journals) aufgestellt worden ist, so will ich dennoch hier eine etwas abweichende mir noch vor dem Erscheinen der Arbeit des Herrn *Mehler* bekannte Ableitung dieses Ausdrucks in Kürze mittheilen. Dieselbe beruht auf zwei allgemeinen Sätzen, deren einer von *Gauss* herrührt; der andere bildet das Analogon dieses Satzes für die Ebene.

Gauss hat gezeigt, wie man jedes über ein gegebenes Volumen V auszudehnende Integral $\int f(r)dV$, worin $f(r)$ irgend eine Function der Entfernung r des Volumenelementes dV von einem gegebenen Punkte M bedeutet, in ein über die Oberfläche des Körpers V sich erstreckendes Integral verwandeln kann. Setzt man nämlich

$$\int f(r)r^2dr = F(r),$$

so wird

$$(1.)\qquad \int f(r)dV = \int F(r)\frac{\cos\widehat{Nr}\,d\Omega}{r^2},$$

wo $d\Omega$ ein unbestimmtes Oberflächenelement, r dessen Entfernung von M und $\widehat{Nr}$ der Winkel ist, den die auf dem Elemente $d\Omega$ nach der Aussenseite des Körpers V errichtete Normale mit dem Leitstrahl r bildet.

Ganz ebenso lässt sich jedes über eine von einer ebenen Curve begrenzte Fläche $\mathfrak{F}$ auszudehnende Integral von der Form $\int\varphi(\varrho)df$, worin $\varphi(\varrho)$ eine beliebige Function der Entfernung ϱ des Flächenelementes df von einem in der Ebene von $\mathfrak{F}$ gegebenen Punkte N bedeutet, in ein über den Umfang von $\mathfrak{F}$ sich erstreckendes Integral umformen. In der That ist, wenn man

$$\int\varrho\varphi(\varrho)d\varrho = \psi(\varrho)$$

setzt,

$$(2.)\qquad \int\varphi(\varrho)df = \int\frac{\psi(\varrho)}{\varrho}\cos\widehat{\nu\varrho}\,ds,$$

wo ds ein unbestimmtes Element der Begrenzung von f, ϱ dessen Entfernung von N und $\widehat{\nu\varrho}$ der Winkel ist, den die auf dem Elemente ds nach Aussen von $\mathfrak{F}$ errichtete Normale mit dem Leitstrahle ϱ bildet.

Vermöge dieser beiden Formeln lässt sich leicht der Ausdruck des Potentials P eines beliebigen homogenen Polyeders finden.

Bedeutet nämlich r die Entfernung des Volumenelementes dV vom angezogenen Punkte, so ist bekanntlich

$$P = \int \frac{dV}{r}.$$

Weil $\int r^2 \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} r^2$ ist, so hat man aus (1.)

$$P = \tfrac{1}{2} \int \cos \widehat{Nr}\, d\Omega.$$

Um $\cos \widehat{Nr}$ zu bestimmen, denke man sich vom Punkte M auf alle Seitenflächen $\mathfrak{F}$ des gegebenen Polyeders Lothe p gefällt und lege ihnen das positive oder negative Zeichen bei, jenachdem der Punkt M mit dem von der Fläche $\mathfrak{F}$ unmittelbar begrenzten Theile des Polyeders auf derselben oder entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{F}$ liegt. Es ist dann auf der Seitenfläche $\mathfrak{F}$

$$\cos \widehat{Nr} = \frac{p}{r}$$

und

$$P = \tfrac{1}{2} \Sigma p \int \frac{d\Omega}{r},$$

wo sich die Summe auf alle den einzelnen Seitenflächen $\mathfrak{F}$ entsprechenden Integrale bezieht.

Man betrachte jetzt eines dieser Integrale, welches der Seitenfläche $\mathfrak{F}$ entsprechen möge. Bezeichnet man die Entfernung des Elementes $d\Omega$ von dem Fusspunkte N des Lothes p (auf $\mathfrak{F}$) mit ϱ, so ist

$$r^2 = p^2 + \varrho^2,$$

$$\int \frac{d\Omega}{r} = \int \frac{d\Omega}{\sqrt{p^2+\varrho^2}}$$

und folglich nach (2.)

$$\int \frac{d\Omega}{r} = \int \sqrt{p^2+\varrho^2}\, \frac{\cos \widehat{\nu\varrho}\, ds}{\varrho}.$$

Um $\cos \widehat{\nu\varrho}$ zu bestimmen, denke man sich von dem Punkte N auf alle Seiten $\mathfrak{S}$ des Polygons $\mathfrak{F}$ Lothe q gefällt, welche man ebenfalls als positiv oder negativ betrachte, jenachdem der Punkt N mit dem von der Seite $\mathfrak{S}$ begrenzten Theile von $\mathfrak{F}$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{S}$

liegt. Es ist dann

$$\cos \widehat{\nu\varrho} = \frac{q}{\varrho}$$

und somit

$$\int \frac{d\Omega}{r} = \Sigma q \int \sqrt{p^2+\varrho^2}\, \frac{ds}{\varrho^2},$$

wo sich die Summe auf alle Seiten des Polygons $\mathfrak{F}$ bezieht.

Beachtet man nun, dass $\varrho^2 = q^2 + s^2$, wenn s von dem Punkte an gezählt wird, in welchem das Loth q die entsprechende Polygonseite $\mathfrak{S}$ trifft, und bezeichnet man die beiden den Endpunkten von $\mathfrak{S}$ entsprechenden Werthe von s mit s' und s'', so ergiebt sich

$$\int \sqrt{p^2+\varrho^2}\, \frac{ds}{\varrho^2} = \int \frac{\sqrt{p^2+q^2+s^2}}{q^2+s^2}\, ds$$

$$= \log \frac{s''+\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{s'+\sqrt{p^2+q^2+s'^2}} + \frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{ps''}{q\sqrt{p^2+q^2+s''^2}} - \frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{ps'}{q\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Ausdrücke für $\int \frac{d\Omega}{r}$ und P, so erhält man das Endresultat

$$P = \tfrac{1}{2} \Sigma p \Sigma q \log \frac{s''+\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{s'+\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma p^2 \Sigma \operatorname{arctg} \frac{ps''}{q\sqrt{p^2+q^2+s''^2}} - \tfrac{1}{2} \Sigma p^2 \Sigma \operatorname{arctg} \frac{ps'}{q\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}.$$

Die in diesen Ausdruck eingehenden Grössen $\sqrt{p^2+q^2+s''^2}$, $\sqrt{p^2+q^2+s'^2}$, s'', s' lassen sich leicht geometrisch interpretiren; die ersten beiden stellen die Entfernungen r'', r' des angezogenen Punktes von den Endpunkten der bezüglichen Kante, s'', s' aber die Projectionen dieser Entfernungen auf die nämliche Kante vor.

Man kann daher auch schreiben

$$P = \tfrac{1}{2} \Sigma p \Sigma \left[q \log \frac{r''+s''}{r'+s'} + p \operatorname{arctg} \frac{ps''}{qr''} - p \operatorname{arctg} \frac{ps'}{qr'} \right].$$

Krakau, im October 1868.

Zur Theorie der symmetrischen Functionen.

(Von Herrn *F. Mertens* zu Krakau.)

Es sei

$$ft = (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)$$

und $F(t_1, t_2, \dots t_n)$ irgend eine ganze rationale Function der n Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$.

Durch successive algebraische Divisionen denke man sich $F(t_1, t_2, \dots t_n)$ in die Form gebracht:

$$F = F_1 ft_1 + F_2 ft_2 + \dots + F_n ft_n + R(t_1, t_2, \dots t_n),$$

wo $F_1, F_2, \dots F_n, R$ lauter ganze rationale Functionen von $t_1, t_2, \dots t_n$ sind, von denen überdies die letzte in Bezug auf keine der Variabeln $t_1, t_2, \dots t_n$ den Grad $n-1$ übersteigt.

Dies vorausgesetzt, zerlege man den Bruch $\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}$ in Partialbrüche, wie folgt:

$$\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n} = \Sigma \frac{R(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)}{f'x_\alpha f'x_\beta \dots f'x_\nu} \frac{1}{t_1 - x_\alpha} \frac{1}{t_2 - x_\beta} \dots \frac{1}{t_n - x_\nu},$$

wo die Indices $\alpha, \beta, \dots \nu$ unabhängig von einander alle Werthe $1, 2, 3, \dots n$ durchlaufen, entwickle beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von $t_1, t_2, \dots t_n$ und vergleiche die Coefficienten von $(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}$. Dies giebt

$$\left[\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{R(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)}{f'x_\alpha f'x_\beta \dots f'x_\nu}$$

oder

$$\left[\frac{F}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{F(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)}{f'x_\alpha f'x_\beta \dots f'x_\nu},$$

da $R(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu) = F(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)$ und

$$\left[\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}} = \left[\frac{F}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}}$$

ist.

Um nun aus der Summe alle Terme zu eliminiren, in denen nicht alle Indices $\alpha, \beta, \dots \nu$ untereinander verschieden sind, nehme man

$$F = \Delta . V,$$

wo

$$\begin{array}{llll} \Delta = & * & (t_1-t_2)\ (t_1-t_3) \ldots\ldots & (t_1-t_n)\times \\ & (t_2-t_1) & * \quad (t_2-t_3) \ldots\ldots & (t_2-t_n)\times \\ & \vdots & \vdots & \\ & (t_n-t_1) & (t_n-t_2) \ldots\ldots\ (t_n-t_{n-1}) & * \end{array}$$

und V eine ganze rationale Function von $t_1, t_2, \ldots t_n$ ist.

Es ist dann

$$\Delta(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu) = f'x_\alpha f'x_\beta \ldots f'x_\nu$$
$$\text{oder} = 0,$$

jenachdem die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ alle untereinander verschieden sind oder nicht, und somit

$$\Sigma V(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu) = \left[\frac{\Delta V}{ft_1 ft_2 \ldots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \ldots t_n)^{-1}},$$

wo jetzt die Summe alle Werthe umfasst, welche V durch Permutation der $x_1, x_2, \ldots x_n$ annehmen kann.

Ist nun V eine symmetrische Function, so sind alle diese Werthe einander gleich, und man hat

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\Delta V}{ft_1 ft_2 \ldots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \ldots t_n)^{-1}}.$$

Da der Entwickelungscoefficient auf der rechten Seite nur von den in ft und V vorkommenden Coefficienten abhängt, so stellt derselbe somit einen independenten Ausdruck der Function V durch die Coefficienten der Gleichung $ft = 0$ vor.

Krakau, im October 1868.

Preisfrage

der physikalisch-mathematischen Klasse

der

Königlich Preussischen

Akademie der Wissenschaften

für das Jahr 1870.

Bekannt gemacht in der öffentlichen Sitzung am *Leibnitz*ischen Jahrestage,
den 2. Juli 1868.

(Aus dem von *Steiner* gestifteten Legate für Preisfragen in dem Gebiete
der synthetischen Geometrie.)

Die von *Steiner* und anderen Geometern über die *Oberflächen dritten Grades* angestellten Untersuchungen haben bereits zu einer Reihe wichtiger Eigenschaften derselben geführt. Aber die Theorie der *Krümmung* dieser Oberflächen ist von den bisherigen Untersuchungen fast unberührt geblieben. Die Akademie wünscht daher eine speciell hierauf gerichtete Behandlung der in Rede stehenden Oberflächen. Es würde sich dabei zunächst um geometrische Constructionen für die *beiden Hauptkrümmungs-Richtungen und Radien* in jedem Punkt der Oberfläche handeln. Als zu lösende Hauptaufgabe bezeichnet aber die Akademie

> *die Angabe aller Oberflächen dritten Grades, deren Krümmungslinien algebraisch sind, sowie die Bestimmung und Discussion dieser Krümmungslinien.*

Es wird verlangt, dass die zur Verification der Resultate dienenden analytischen Erläuterungen der Lösung hinzugefügt seien.

Die Arbeiten können in deutscher, französischer, lateinischer oder englischer Sprache abgefasst werden.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der dieser Frage gewidmeten Preisschriften ist der 1. März des Jahres 1870. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen, und dieses auf dem Aeusseren des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 600 Thalern erfolgt in der öffentlichen Sitzung am *Leibnitz*ischen Jahrestage im Juli 1870.

Ueber Kegelschnitte.

(Von Herrn *G. Bauer* in München.)

Ich stelle hier einige Sätze über Kegelschnitte zusammen, welche ich mit Hülfe quadratischer Transformation erhalten habe, und welche mir von einigem Interesse zu sein scheinen. Das Princip der Transformation, von dem ich ausgegangen bin, ist in den bekannten *Steiner*schen Sätzen enthalten, welche mittelst der *Plücker*schen Bezeichnung von „Pol und Polare in Bezug auf ein Dreieck" lauten: „Dreht sich die Polare um einen Punkt, so beschreibt der Pol einen dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt. Bewegt sich der Pol auf einer Geraden, so umhüllt die Polare einen dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt". *Steiner* selbst hat in seiner „Entwicklung geometrischer Gestalten", wo er allgemeine Beziehungssysteme quadratischer Transformation entwickelte, auf diese Sätze hingewiesen. Das schon von Herrn *Salmon* und andern betrachtete besondere Beziehungssystem, welches durch sie festgestellt wird, ist von der Art, wie das von *Steiner* a. a. O. S. 283 unter β) skizzirte, wenn daselbst die zwei Ebenen und die zwei Hauptdreiecke mit ihren entsprechenden Ecken zusammenfallen.

1. Je nachdem wir nun den Punkt oder die Gerade als Element eines geometrischen Gebildes annehmen, erhalten wir zwei Uebertragungssysteme. Im ersten Falle entspricht einem Punkt seine Polare; einer Geraden L ein dem Fundamentaldreieck ABC eingeschriebener Kegelschnitt $L^{(2)}$. Die Gerade L, Ort der Pole aller Tangenten von $L^{(2)}$, nenne ich der Kürze halber die Pollinie von $L^{(2)}$. Geht dieselbe durch eine Ecke C des Dreiecks, so zerfällt $L^{(2)}$ in zwei Punkte, nämlich den Punkt C und einen Punkt auf AB; fällt L mit einer Dreiecksseite AB zusammen, so zerfällt $L^{(2)}$ in die zwei Punkte A, B. Im zweiten Falle entspricht einer Geraden ihr Pol; einem Punkt P, als Spitze eines Strahlenbüschels, ein umschriebener Kegelschnitt $P^{(2)}$. Der Punkt P, durch welchen die Polaren aller Punkte von $P^{(2)}$ gehen, heisse der Polarpunkt von $P^{(2)}$. Liegt derselbe auf einer Seite AB des Dreiecks, so zerfällt $P^{(2)}$ in zwei Gerade, nämlich die Seite AB und eine durch C gehende Gerade; fällt P in eine Ecke C des Dreiecks, so zerfällt $P^{(2)}$ in die zwei Seiten AC, BC.

Vermöge der besondern gegenseitigen Lage von Pol und Polare ist der Schwerpunkt G des Dreiecks der Pol der unendlich entfernten Geraden,

während dieser, als Pollinie betrachtet, diejenige eingeschriebene Ellipse E entspricht, welche die Seiten des Dreiecks in der Mitte berührt und den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat. Dem Schwerpunkt endlich, als Polarpunkt betrachtet, entspricht die umschriebene Ellipse E, welche mit E concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend ist, und deren Tangenten an den Ecken des Dreiecks den gegenüberstehenden Seiten parallel sind.

2. Da den zwei von einem Punkt P an den eingeschriebenen Kegelschnitt $L^{(2)}$ gezogenen Tangenten als Pole die zwei Durchschnittspunkte der Geraden L mit dem umschriebenen Kegelschnitt $P^{(2)}$ entsprechen, so folgt, dass $P^{(2)}$ die Gerade L schneidet, berührt oder nicht schneidet, jenachdem der Punkt P ausserhalb, auf oder innerhalb von $L^{(2)}$ liegt. Also insbesondere: Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt ausserhalb, auf oder innerhalb eines eingeschriebenen Kegelschnitts, jenachdem die Pollinie desselben die Ellipse E schneidet, berührt oder nicht trifft; und ein umschriebener Kegelschnitt ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem sein Polarpunkt ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipse E liegt. Zu diesem letztern bekannten Satze lässt sich noch Folgendes ergänzend beifügen. Da der Pol einer Geraden innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegt, jenachdem die Gerade das Dreieck nicht schneidet oder schneidet, so folgt: Liegt der Polarpunkt ausserhalb der Ellipse E, aber innerhalb des Dreiecks, so entspricht ihm eine umschriebene Hyperbel, von welcher ein und derselbe Ast durch die drei Ecken geht, und zwar öffnet sich derselbe in dem Raum jenseits BC, wenn der Polarpunkt zwischen der Ellipse E und der Ecke A liegt. Liegt aber der Polarpunkt ausserhalb des Dreiecks, so entspricht ihm eine umschriebene Hyperbel, von welcher ein Ast durch zwei Ecken des Dreiecks geht, der andere durch die dritte Ecke, und zwar geht der eine Ast durch B und C, der andere durch A, wenn der Polarpunkt in dem Winkel BAC oder seinem Scheitelwinkel liegt.

3. Betrachtet man irgend eine Gerade L und einen Punkt P in Bezug auf ihre Lage zum Dreieck ABC, so ergiebt sich folgender allgemeiner Satz: Liegt ein Punkt P in dem von L und den Dreiecksseiten gebildeten Viereck oder in einem der an die Ecken desselben anstossenden Räume, so schneidet die Polare von P den Kegelschnitt $L^{(2)}$, und der Pol von L liegt ausserhalb $P^{(2)}$; liegt aber P in einem der sechs andern von L und den Dreiecksseiten gebildeten Räume, so wird $L^{(2)}$ von der Polaren von P nicht getroffen, und der Pol von L liegt innerhalb $P^{(2)}$.

Rückt die Gerade L in das Unendliche, so folgt: Liegt ein Punkt P

ausserhalb des Dreiecks in einem von den drei Seiten desselben begrenzten Raum, so schneidet seine Polare die Ellipse E, und der Schwerpunkt des Dreiecks liegt ausserhalb $P^{(2)}$ (Hyperbel); liegt aber P in einem Scheitelraum des Dreiecks, so wird E von seiner Polaren nicht geschnitten, und $P^{(2)}$ (Hyperbel) schliesst den Schwerpunkt des Dreiecks ein. — Fällt aber P in den Schwerpunkt, so folgt aus obigem Satze: Wenn eine Gerade L das Dreieck schneidet, so ist $L^{(2)}$ eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, jenachdem der Schwerpunkt des Dreiecks in dem durch die Gerade L abgeschnittenen Viereck oder in dem abgeschnittenen Dreieck oder auf L selbst liegt. Schneidet L das Dreieck nicht, so ist $L^{(2)}$ immer eine in das Dreieck beschriebene Ellipse.

Das Vorhergehende reicht hin, um sich eine Vorstellung zu machen von der Lage und der Natur eines um- oder eingeschriebenen Kegelschnitts, der einem Punkt oder einer Geraden entspricht.

4. Seien A, B, C, M vier Punkte, durch welche zwei Parabeln gehen. Betrachtet man ABC als das Fundamentaldreieck, so sind die Polarpunkte dieser zwei Parabeln die zwei Durchschnittspunkte o, o' einer Geraden m, Polaren von M, mit der dem Dreieck ABC eingeschriebenen Ellipse E (Fig. 1). Verbindet man M mit einem beliebigen fünften Punkt N durch eine Gerade L, so berührt der eingeschriebene Kegelschnitt $L^{(2)}$ die Gerade m. Die zwei andern von o und o' an $L^{(2)}$ gezogenen Tangenten sind die Polaren der Punkte O, O', in welchen die zwei Parabeln die Gerade L zum zweiten Male schneiden. Durchläuft nun der Punkt N die Gerade L, so durchläuft der Polarpunkt P des Kegelschnitts $ABCMN$ die Gerade m, so dass die von P an $L^{(2)}$ gezogene zweite Tangente immer Polare von N ist. Geht N von O bis O', so durchläuft P das Innere des Kegelschnitts E von o bis o'; geht aber N von O' durch den unendlich entfernten Punkt von L nach O zurück, so durchläuft P den ausserhalb E gelegenen Theil von m von o' bis o. Dass sich die von N und von P durchlaufenen Strecken OO' und oo' in dieser Weise entsprechen, erkennt man daraus, dass, wenn N in den unendlich entfernten Punkt von L fällt, seine Polare die vierte gemeinschaftliche Tangente von $L^{(2)}$ und E ist, und mithin ihr Durchschnittspunkt P mit der Geraden m ausserhalb E liegt. Wenn also der fünfte Punkt N auf der Strecke OO' liegt, d. h. innerhalb der einen Parabel und ausserhalb der andern, so ist der Kegelschnitt $ABCMN$ eine Ellipse; liegt aber N ausserhalb der Strecke OO', d. h. ausserhalb oder innerhalb beider Parabeln, so ist der Kegelschnitt $ABCMN$ eine Hyperbel.

Dies ist ein bekannter, von *Moebius* in seinem barycentrischen Calcul gegebener Satz.

Man sieht indessen, dass dieser Satz nur ein specieller Fall eines allgemeinern ist, welchen man erhält, wenn an die Stelle der Ellipse E irgend ein anderer dem Dreieck ABC eingeschriebener Kegelschnitt $K^{(2)}$ tritt. Derselbe lautet:

Sind durch vier Punkte A, B, C, M die zwei Kegelschnitte gelegt, welche eine gegebene Gerade berühren, so wird der Kegelschnitt, der durch diese vier Punkte und einen beliebigen fünften Punkt N geht, die Gerade schneiden, wenn N innerhalb oder ausserhalb beider Kegelschnitte liegt; hingegen nicht schneiden, wenn N innerhalb des einen und ausserhalb des andern liegt.

Auf ähnliche Weise beweist man den reciproken Satz:

Wenn zwei Kegelschnitte vier Gerade berühren und durch einen Punkt P gehen, so wird, jenachdem eine fünfte Gerade nur einen dieser beiden Kegelschnitte schneidet oder nicht einen (nämlich beide oder keinen von beiden), der Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts liegen, der die fünf Geraden berührt.

Ist die fünfte Gerade die unendlich entfernte Gerade, so folgt: *Die zwei Kegelschnitte, welche vier Gerade berühren und durch einen Punkt P gehen, sind, wenn reell, beide Ellipsen oder beide Hyperbeln, wenn der Punkt P ausserhalb der Parabel liegt, welche die vier Geraden berührt; hingegen ist einer der Kegelschnitte eine Ellipse, der andere eine Hyperbel, wenn der Punkt P innerhalb dieser Parabel liegt.*

Ist aber eine der vier ersten Geraden unendlich entfernt, so folgt: Wenn zwei Parabeln drei Gerade berühren und durch einen Punkt P gehen, so wird, jenachdem eine vierte Gerade nur eine dieser Parabeln schneidet oder nicht eine (nämlich beide oder keine von beiden), der Punkt P innerhalb oder ausserhalb der Parabel liegen, welche die vier Geraden berührt.

Aus den beiden letzten Sätzen lässt sich noch weiter schliessen: Wenn die zwei Parabeln Σ, Σ', welche drei Gerade berühren und durch einen Punkt P gehen, beide von einer vierten Geraden geschnitten werden, oder wenn keine von beiden von ihr geschnitten wird, so sind die zwei Kegelschnitte S, S', welche die vier Geraden berühren und durch den Punkt P gehen, wenn reell, beide Ellipsen oder beide Hyperbeln; wenn aber die vierte Gerade nur eine der Parabeln Σ, Σ' schneidet, so ist einer der Kegelschnitte S, S' eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

5. Dreht sich die Polare als Tangente um einen Kegelschnitt S, welcher dem Dreieck ABC nicht eingeschrieben ist, so bewegt sich der Pol, wie bei den allgemeinern *Steiner*schen Beziehungssystemen dieser Art, auf einer Curve vierter Ordnung, für welche die Ecken des Dreiecks Doppelpunkte sind. Die Curve hat ferner so viele unendlich entfernte Punkte, als S gemeinsame Tangenten mit der Ellipse E hat. Liegt z. B. S ganz innerhalb E, so ist die Polcurve eine geschlossene Curve, welche sich zweimal um das Dreieck herumschlingt. Berührt S eine Dreiecksseite BC, so reducirt sich der Ort des Pols auf eine Curve dritter Ordnung, für welche die Ecke A Doppelpunkt, B und C aber einfache Punkte sind. Ausserdem schneidet die Curve die Seite BC in dem Punkte, der zu dem Berührungspunkte von S in Bezug auf die Ecken B, C der zugeordnete harmonische Punkt ist.

Berührt endlich S zwei Seiten des Dreiecks ABC, nämlich BC und AC, so wird der Ort des Pols ein Kegelschnitt S', welcher durch die zwei Ecken A, B des Dreiecks geht und die zwei Seiten BC, AC zum zweiten Male in den Punkten schneidet, welche zu den Berührungspunkten von S harmonisch liegen. Der Kegelschnitt S' ist Hyperbel, Ellipse oder Parabel, jenachdem S mit der Ellipse E ausser den zwei Dreiecksseiten noch zwei gemeinsame Tangenten hat oder keine oder dieselbe berührt. Jedem Punkt P von S, als Polarpunkt betrachtet, entspricht ein dem Dreieck ABC umschriebener Kegelschnitt, welcher die Polcurve berührt; der Berührungspunkt entspricht der Tangente von S im Punkte P.

Da in dem Folgenden nur Kegelschnitte betrachtet werden, so wird von diesen Sätzen nur der letzte zur Anwendung kommen und der reciproke Satz, nämlich: Beschreibt der Pol einen Kegelschnitt S', welcher durch zwei Ecken A, B des Dreiecks geht, so beschreibt die Polare einen Kegelschnitt S, der die beiden Seiten AC, BC berührt. Die zweiten von A und B an S gezogenen Tangenten sind harmonisch zu den Tangenten von S' in diesen Punkten. Der Kegelschnitt S ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem der Schwerpunkt des Dreiecks innerhalb, auf oder ausserhalb S' liegt.

Die beiden letzten Sätze ergänzen sich in der Weise, dass, wenn von den beiden Kegelschnitten S, S' einer gegeben ist, der andere vollkommen durch sie bestimmt ist.

6. Das anharmonische Verhältniss überträgt sich nach folgenden leicht zu beweisenden Sätzen:

Vier Tangenten auf einem Kegelschnitt S, der zwei Seiten des Fun-

damentaldreiecks berührt, haben dasselbe anharmonische Verhältniss, wie ihre Pole auf dem entsprechenden Kegelschnitt S', der durch zwei Ecken des Dreiecks geht; vier Polarpunkte auf S (vier Pollinien, welche S' berühren) dasselbe, wie die Berührungs-Punkte (-Tangenten) der ihnen entsprechenden umschriebenen (eingeschriebenen) Kegelschnitte auf $S'(S)$.

Vier Gerade, welche durch einen Punkt P gehen, haben dasselbe anharmonische Verhältniss, wie ihre Pole auf dem umschriebenen $P^{(2)}$; vier Punkte auf einer Geraden L dasselbe, wie ihre Polaren auf dem eingeschriebenen $L^{(2)}$.

Wenn vier umschriebene Kegelschnitte eine Gerade L berühren, so haben ihre Berührungspunkte dasselbe anharmonische Verhältniss, wie ihre Polarpunkte auf $L^{(2)}$; und wenn vier eingeschriebene Kegelschnitte durch einen Punkt P gehen, so haben ihre Tangenten in P dasselbe anharmonische Verhältniss, wie ihre Pollinien auf $P^{(2)}$.

Wenn vier Kegelschnitte einem Viereck eingeschrieben (umschrieben) sind, so haben ihre Berührungspunkte auf jeder Seite (ihre Tangenten an jeder Ecke) des Vierecks dasselbe anharmonische Verhältniss, wie ihre Pollinien (Polarpunkte) in Bezug auf irgend ein von drei Seiten (Ecken) des Vierecks gebildetes Dreieck.

Aus der projectivischen Eigenschaft des anharmonischen Verhältnisses folgt sodann: Wenn vier Kegelschnitte einem Viereck umschrieben sind, so bestimmen dieselben auf jedem Kegelschnitt V, der durch irgend drei der Ecken geht, vier Durchschnittspunkte von constantem anharmonischem Verhältniss, dasselbe ist nämlich gleich dem, in welchem sich die vier ersten Kegelschnitte schneiden.

Und: Wenn vier Kegelschnitte einem Vierseit eingeschrieben sind, so haben die Tangenten, welche ein beliebiger irgend drei Seiten des Vierseits berührender Kegelschnitt V mit den vier Kegelschnitten gemein hat, auf diesem Kegelschnitt V constantes anharmonisches Verhältniss; dasselbe ist nämlich gleich dem der Berührungspunkte der vier Kegelschnitte auf den Seiten des Vierseits. —

7. Uebertragen wir nun den Satz vom anharmonischen Verhältniss von vier Punkten auf einem Kegelschnitt, so folgt, wenn man den Kegelschnitt als dem Fundamentaldreieck ABC eingeschrieben annimmt und die Punkte auf demselben als Polarpunkte betrachtet:

Wenn vier Kegelschnitte einem Dreieck ABC umschrieben sind und eine Gerade L berühren, so haben die Durchschnittspunkte dieser Kegelschnitte

mit irgend einem fünften umschriebenen Kegelschnitt, der dieselbe Gerade berührt, auf diesem ein constantes anharmonisches Verhältniss; dasselbe ist nämlich immer gleich dem der Berührungspunkte der vier Kegelschnitte auf der Geraden L.

Dasselbe gilt, wenn an die Stelle der Geraden L ein Kegelschnitt tritt, der durch zwei Ecken des Dreiecks ABC geht.

Fällt der fünfte Kegelschnitt mit einem der vier festen Kegelschnitte zusammen, so fällt der Durchschnittspunkt mit dem Berührungspunkt zusammen; folglich haben auf jedem der vier Kegelschnitte der Berührungspunkt und die Durchschnittspunkte mit den drei andern Kegelschnitten dasselbe anharmonische Verhältniss, wie die vier Berührungspunkte.

Da vier Tangenten eines Kegelschnitts dasselbe anharmonische Verhältniss haben, wie ihre Berührungspunkte, so folgt: Wenn vier Parabeln einem Dreieck umschrieben sind, und man zieht zu einer dieser Parabeln an den Durchschnittspunkten mit den drei andern Parabeln Tangenten, so schneiden dieselben auf irgend einer vierten Tangente zwei Stücke ab, deren Verhältniss gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der Richtungen der vier Axen der Parabeln.

Eine Dreiecksseite und die durch die gegenüberliegende Ecke gezogene Parallele bilden zusammen einen speciellen Fall einer umschriebenen Parabel. Also: Wenn durch die Ecken eines in eine Parabel eingeschriebenen Dreiecks Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, so werden auf jeder dieser Parallelen von den beiden andern und dem zweiten Durchschnittspunkt mit der Parabel Stücke begrenzt, deren Verhältniss gleich ist dem anharmonischen Verhältniss, welches die Richtungen der drei Seiten des Dreiecks mit der Axe der Parabel bilden.

8. Ist L eine Gerade, welche die Seiten BC, AC, AB des Dreiecks ABC in den Punkten a, b, c schneidet, so sind die Paare von Geraden $BC, Aa; AC, Bb; AB, Cc$ als specielle Fälle umschriebener Kegelschnitte zu betrachten, welche L berühren (Fig. 2). Ist nun a' der Durchschnittspunkt von Cc und Bb; b' der von Cc und Aa; c' der von Bb und Aa, und ist dem Dreieck ausserdem ein Kegelschnitt umschrieben, der L in dem Punkte s berührt und die Geraden Aa, Bb, Cc in den Punkten α, β, γ schneidet, so sind die anharmonischen Verhältnisse $(ac'b'\alpha)$, $(c'ba'\beta)$, $(b'a'c\gamma)$, sowie das der Punkte α, β, γ, s auf dem Kegelschnitte, sämmtlich gleich $(abcs)$. Hieraus folgt, dass $s\alpha$ durch den Durchschnittspunkt von $c'b$ und $b'c$, d. i. durch a' geht; und ebenso geht $s\beta$ durch b', $s\gamma$ durch c'. Also:

Wenn man von den Ecken eines Dreiecks ABC nach den Durchschnittspunkten a, b, c der gegenüberliegenden Seiten mit einer Geraden L die Geraden Aa, Bb, Cc zieht, so treffen die von irgend einem Punkt s der Geraden L nach den Durchschnittspunkten je zweier dieser Geraden Aa, Bb, Cc gezogenen Geraden die jedesmalige dritte in Punkten, welche auf einem Kegelschnitt liegen, der ABC umschrieben ist und L im Punkte s berührt.

Sind von einem Kegelschnitt vier Punkte und die Tangente an einem dieser Punkte gegeben, so giebt dieser Satz drei weitere Punkte des Kegelschnitts. Den reciproken Satz, den ich hier nicht beisetze, erhält man auf ähnliche Weise; nur ist hierbei zu beachten, dass zu den einem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitten, welche durch einen Punkt M gehen, drei Punktepaare zu rechnen sind; nämlich jede Ecke des Dreiecks und der Punkt der gegenüberliegenden Seite, wo dieselbe von der durch die Ecke und den Punkt M gezogenen Geraden geschnitten wird, bilden ein solches Punktepaar.

9. Betrachtet man in dem vorigen Satze ABC als das Fundamentaldreieck, so liefert die Uebertragung den von Herrn *Chasles* gegebenen Satz *): „Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt S eingeschrieben ist, so berühren die Tangenten an den vier Ecken und je ein Paar Gegenseiten des Vierecks einen andern Kegelschnitt Σ." Hieraus erhalten wir durch Rück-Uebertragung, indem wir nur zwei Seiten des bisherigen Fundamentaldreiecks beibehalten, die dritte aber beliebig lassen, folgenden allgemeinern Satz, der obigen als speciellen Fall in sich begreift:

Gehen durch zwei Punkte A, B eines Kegelschnitts Σ und einen beliebigen dritten Punkt C zwei Kegelschnitte S, S', welche Σ in den Punkten M, M' berühren, und ist D der vierte Durchschnittspunkt von S und S', so geht der durch die Punkte A, B, M, M', D gelegte Kegelschnitt durch einen dritten festen Punkt γ. Dieser Punkt γ ist der Durchschnitt der Diagonalen des Vierecks, welches die Durchschnittspunkte der beiden Geraden CA, CB mit Σ bilden (Fig. 3).

Dieser Satz bleibt auch richtig, wenn A, B imaginäre Durchschnittspunkte des Kegelschnitts Σ mit der Geraden AB sind. Der Punkt γ bleibt reell und zu C conjugirt in Bezug auf Σ. Ist AB die unendlich entfernte Gerade, so erhält man sodann folgenden Satz von Kreisen, welcher aber auch allgemein für ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte gilt:

*) Sect. con. n° 213.

Wenn zwei Kreise S, S' einen dritten Kreis Σ berühren, so geht der durch die zwei Berührungspunkte und einen Durchschnittspunkt von S und S' gehende Kreis durch die Mitte der Sehne von Σ, welche auf der Polaren des andern Durchschnittspunkts von S und S' liegt.

10. Zerfällt Σ in die Gerade AB und eine andere Gerade L, so folgt weiter aus obigem Satze:

Ist ein Viereck $ABCD$ und eine Gerade L gegeben, und zieht man von einer Ecke C Gerade nach den andern Ecken A, B, D des Vierecks, welche L in den Punkten a, b, d schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte von Ab, Ba; Bd, Db; Ad, Da auf einem durch die Punkte A, B, D gehenden Kegelschnitt (folgt auch aus dem Satz von *Pascal*); *und die Durchschnittspunkte dieses Kegelschnitts mit L sind die Berührungspunkte von L mit den zwei Kegelschnitten, welche dem Viereck umschrieben sind und die Gerade L berühren.*

Wird L die unendlich entfernte Gerade, so folgt, dass, wenn man durch je zwei Ecken eines Dreiecks ABD Parallelen zieht zu den Geraden, welche diese Ecken mit einem vierten Punkt C verbinden, der Durchschnittspunkt derselben auf demjenigen dem Dreieck ABD umschriebenen Kegelschnitt liegt, dessen Asymptoten parallel zu den Axen der zwei Parabeln sind, welche dem Viereck $ABCD$ umschrieben werden können. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, wenn das Viereck nur ausspringende Ecken hat, in welchem Falle die zwei Parabeln reell sind; im entgegengesetzten Falle aber Ellipse.

Eine andere Beziehung zwischen den zwei Parabeln und der Hyperbel s. (28.).

11. Wenn in (9.) der Kegelschnitt Σ die Geraden CA, CB in A und B berührt, oder mit anderen Worten, wenn die Kegelschnitte S, S' durch den Pol der gemeinschaftlichen Sehne AB in Bezug auf Σ gehen, so fällt der Punkt γ auf AB; in diesem Falle liegt also auch der vierte Durchschnittspunkt D von S und S' auf der Geraden, welche die zwei Berührungspunkte M, M' verbindet.

Hieraus folgt insbesondere: Legt man durch den Mittelpunkt eines Kegelschnitts Σ zwei Kegelschnitte, die ihm ähnlich und ähnlich liegend sind und ihn berühren, so liegen die zwei Berührungspunkte und der zweite Durchschnittspunkt derselben auf einer Geraden.

12. Die involutorischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks übertragen sich in folgender Weise. Der Satz, dass jede Transversale die Seiten und die Diagonalen eines Vierecks in sechs Punkten schneidet, welche in In-

volution sind, giebt, wenn man die Punkte als Pole, die Geraden als Pollinien auffasst:

a) Wenn vier Gerade gegeben sind und man beschreibt die sechs einem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitte, welche je zwei dieser Geraden berühren, so sind die Tangenten, welche diese sechs Kegelschnitte mit irgend einem andern dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt Σ gemein haben, auf diesem in Involution.

Da ferner jede Dreiecksseite in der ursprünglichen Figur in Punkten geschnitten wird, welche in Involution sind, so folgt, dass die Berührungspunkte der sechs Kegelschnitte auf jeder Dreiecksseite ebenfalls in Involution sind. — Betrachtet man aber in dem Satze, von dem wir ausgegangen, die Geraden als Polare, die Punkte als Polarpunkte, so ergiebt sich:

b) Wenn vier einem Dreieck umschriebene Kegelschnitte gegeben sind, und man legt durch den (vierten) Durchschnittspunkt je zweier derselben und einen beliebigen andern Punkt M umschriebene Kegelschnitte, so schneiden sich diese sechs Kegelschnitte in Involution. — Die sechs Geraden, welche von einer Ecke des Dreiecks nach den Durchschnittspunkten der vier Kegelschnitte gehen, bilden ebenfalls eine Involution. —

Geht man von dem reciproken Satze aus: „Die sechs Geraden, welche von einem Punkte nach den vier Ecken und den zwei Durchschnittspunkten der Gegenseiten eines Vierecks gezogen sind, sind in Involution", so erhält man die zu *a)* und *b)* reciproken Sätze.

13. In dem Satze *a)* und dem reciproken Satze ist das Theorem von *Desargues* und das reciproke Theorem als specielle Fälle enthalten (14,2). Durch Uebertragung dieses Theorems erhalten wir noch folgende Ergänzungen zu den vorigen Sätzen:

a) Wenn in dem Satze (12,*a*) die vier Geraden Tangenten sind eines Kegelschnitts S, der zwei Seiten des Dreiecks ABC berührt, so sind die zwei andern gemeinsamen Tangenten von S und Σ auch ein Paar derselben Involution. Die Gerade L, auf welcher sich die Tangentenpaare der Involution schneiden (14,1), geht mithin durch den Durchschnittspunkt dieser zwei Tangenten.

Gehen in demselben Satze die vier Geraden durch einen Punkt M, so geht die Gerade L durch denselben Punkt M.

b) Wenn in dem Satze (12,*b*) die vier dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte irgend einen Kegelschnitt S, der durch zwei Ecken des Dreiecks geht, (oder eine beliebige Gerade L) berühren, so bilden die zwei umschrie-

benen Kegelschnitte, welche durch den Punkt M gehen und S (oder L) berühren, auch ein Paar des involutorischen Kegelschnittbüschels.

14. 1) Wenn in dem Satze (12, a) drei der vier Geraden durch die Ecken des Dreiecks ABC gehen, so verwandelt sich derselbe in den fundamentalen Satz: „Drei Tangentenpaare eines Kegelschnitts, welche sich auf einer Geraden schneiden, sind auf dem Kegelschnitt in Involution."

Ebenso folgt aus dem zu (12, a) reciproken Satze, wenn drei der vier Punkte auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen: „Die Endpunkte dreier Sehnen eines Kegelschnitts, welche durch einen Punkt gehen, sind in Involution."

2) Wenn aber in demselben Satze nur zwei der vier Punkte auf Seiten des Dreiecks liegen, nämlich auf AC, BC, die beiden andern Punkte M, M' aber beliebig, so erhält man den bekannten Satz: „Wenn ein Kegelschnitt V durch zwei gegenüberliegende Ecken A, B eines Vierecks $AMBM'$ geht, so wird derselbe von den gegenüberliegenden Seiten des Vierecks und irgend einem dem Viereck umschriebenen Kegelschnitt in Punktepaaren geschnitten, welche in Involution sind", woraus weiter folgt, dass überhaupt drei Kegelschnitte, welche einem Viereck umschrieben sind, einen Kegelschnitt V, der durch zwei Ecken des Vierecks geht, in Punkten schneiden, welche in Involution sind.

3) Liegt endlich nur einer der vier Punkte auf einer Seite des Dreiecks, so geht der Satz in folgenden über:

Wenn drei Kegelschnitte einem Dreieck ABC umschrieben sind, so schneiden sich in jeder Ecke des Dreiecks die drei Kegelschnitte und die drei von dieser Ecke ausgehenden Durchschnittssehnen in Involution; und jeder andere dem Dreieck umschriebene Kegelschnitt V wird von den drei Kegelschnitten und den drei Sehnen in Punkten geschnitten, welche auf ihm in Involution sind. — Die Sehnen von V, welche die Punktepaare der Involution verbinden, schneiden sich nach obigem Satze in einem Punkte μ; liegen die drei vierten Durchschnittspunkte der drei Kegelschnitte in einer Geraden, so liegt der Punkt μ auf dieser Geraden vermöge des zu (13, a) reciproken Satzes.

15. Es ist aus analytischen Gründen klar, dass, wenn die Sätze (12.) Statt haben für ein reelles Dreieck ABC, sie auch gelten, wenn zwei Ecken A, B als Durchschnittspunkte eines Kegelschnitts mit einer Geraden betrachtet werden, in welchem Falle sie auch conjugirt imaginäre Punkte sein können. Nimmt man für A, B die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, so

erhält man folgende Sätze von Kreisen, welche aber auch für ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte überhaupt Gültigkeit haben.

Wenn durch je zwei von vier Punkten Kreise gelegt werden, die sich in einem Punkte C schneiden, so schneiden sich diese sechs Kreise in Involution. Ihre Durchschnittspunkte mit irgend einem andern durch C gehenden Kreise Σ sind auf demselben in Involution. Liegen die vier Punkte auf einer Geraden L, so schneiden sich die Verbindungslinien der Punktepaare der Involution auf L; liegen die vier Punkte auf einem Kreise S, so schneiden sich diese Verbindungslinien auf der gemeinsamen Sehne von S und Σ. —

Drei Kreise, welche durch einen Punkt C gehen, und ihre drei Durchschnittssehnen schneiden sich in Involution und bestimmen auf jedem durch C gehenden Kreise sechs Punkte in Involution. Liegen die drei zweiten Durchschnittspunkte der Kreise auf einer Geraden, so schneiden sich die Verbindungslinien der involutorischen Punktepaare auf derselben Geraden. —

Gehen vier Kreise durch einen Punkt C, so sind ihre sechs Durchschnittssehnen in Involution. Die durch ihre zweiten Durchschnittspunkte, den Punkt C und einen beliebigen Punkt M gehenden sechs Kreise schneiden sich in Involution; berühren die vier Kreise eine Gerade L oder einen Kreis S, so bilden die zwei durch C und M gehenden Kreise, welche L oder S berühren, auch ein Paar der Involution. —

16. Kegelschnitte, welche einen Brennpunkt und eine Tangente gemein haben, sind einem Dreieck eingeschrieben. Hiernach ergeben sich entsprechende Sätze über Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt. So folgt aus dem zu (12, *b*) reciproken Satze:

Die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von vier Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt und eine Tangente gemein haben, bestimmen auf dieser Tangente eine Involution u. s. f. — Also speziell: Die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von vier Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt haben die Richtung von sechs Geraden in Involution.

Ebenso folgt aus dem zu (14, 3) reciproken Satze: Wenn drei Kegelschnitte einen Brennpunkt und eine Tangente L gemein haben, so sind auf letzterer die Berührungspunkte und die Durchschnittspunkte der andern gemeinsamen Tangenten je zweier Kegelschnitte in Involution. — Und insbesondere: Die gemeinsamen Tangenten je zweier von drei Parabeln mit demselben Brennpunkt und die Axen derselben haben die Richtung von sechs Geraden in Involution.

17. Seien S, S' zwei dem Dreieck ABC eingeschriebene Kegelschnitte, s ein Kegelschnitt, der die zwei Seiten AC, BC des Dreiecks berührt. Seien ferner t, t_1 die zwei andern gemeinschaftlichen Tangenten von s und S, und t', t_1' die von s und S'. Beschreibt man nun einen eingeschriebenen Kegelschnitt Σ, der zwei der vier Geraden t, t_1, t', t_1', nämlich t, t' berührt, und einen eingeschriebenen Kegelschnitt Σ', der die zwei andern Geraden t_1, t_1' berührt, so sind die (vierten) Tangenten, welche irgend ein anderer eingeschriebener Kegelschnitt $\mathfrak{S}$ mit S, S', Σ, Σ' gemein hat, in Involution mit den zwei Tangenten, welche $\mathfrak{S}$ mit s gemein hat (13, a). Seien T, T' diese (vierten) Tangenten, welche $\mathfrak{S}$ mit S und S' gemein hat, und T, T' die Tangenten, welche $\mathfrak{S}$ mit Σ und Σ' gemein hat; sei ferner s' ein Kegelschnitt, der, wie s, die zwei Seiten AC, BC des Dreiecks berührt und ausserdem die zwei Geraden T, T'; so sind nach dem Vorigen die beiden Tangenten T, T' auf $\mathfrak{S}$ in Involution mit den Tangentenpaaren, welche $\mathfrak{S}$ mit s und mit s' gemein hat, und da $\mathfrak{S}$ zwei Seiten des Vierecks berührt, welches den beiden Kegelschnitten s, s' umschrieben ist, nämlich die Seiten AC, BC, so folgt aus dem zu (14, 2) reciproken Satze, dass die beiden Geraden T, T' einen Kegelschnitt σ berühren, der demselben Viereck eingeschrieben ist, welchem s und s' eingeschrieben sind. — Der Kegelschnitt s' hat aber mit jedem der Kegelschnitte S, S' noch eine Tangente gemein. Sind T_1, T_1' diese Tangenten und $\mathfrak{S}'$ der eingeschriebene Kegelschnitt, der sie berührt, so folgt ebenso, dass die zwei (vierten) Tangenten T_1, T_1', welche $\mathfrak{S}'$ mit Σ und Σ' gemein hat, einen Kegelschnitt σ' berühren, der demselben Viereck eingeschrieben ist, welchem s und s' eingeschrieben sind. Die beiden Kegelschnitte σ und σ' fallen aber zusammen. Denn geht man, statt von dem Kegelschnitt s, von s' aus, so vertauschen die Kegelschnittpaare Σ, Σ' und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ ihre Rollen, und es ergiebt sich, dass die Tangenten T, T_1, welche Σ mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ gemein hat, auch einen Kegelschnitt, der demselben Viereck eingeschrieben ist, berühren. Da nun ein solcher Kegelschnitt durch eine Tangente T schon bestimmt ist, so folgt, dass σ und σ' zusammenfallen. Also:

Sind S, S' zwei dem Dreieck ABC eingeschriebene Kegelschnitte; s, s' zwei Kegelschnitte, welche zwei Seiten AC, BC des Dreiecks berühren; t, t_1, t', t_1' die gemeinsamen Tangenten von s mit S und S'; T, T', T_1, T_1' *die gemeinsamen Tangenten von s' mit S und S'; sind ferner Σ, Σ' zwei andere eingeschriebene Kegelschnitte, welche die Tangenten t, t', t_1, t_1' paarweise berühren, und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ zwei eingeschriebene Kegelschnitte, welche die Tangenten*

T, T', T_1, T'_1 paarweise berühren, so berühren die (vierten) Tangenten, welche jeder der Kegelschnitte Σ, Σ' mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ gemein haben, und die vier gemeinsamen Tangenten von s und s' einen und denselben Kegelschnitt.

18. In dem vorhergehenden Satze kann einer der Kegelschnitte S, S' in Punktepaare zerfallen, nämlich in eine Ecke des Dreiecks ABC und einen Punkt auf der gegenüberliegenden Seite; in diesem Falle zerfällt wenigstens je einer der Kegelschnitte Σ, Σ' und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ ebenfalls in ein solches Punktepaar.

Es kann ferner S' mit S zusammenfallen, in welchem Falle je zwei der Tangenten t auf s und je zwei der Tangenten T auf s' zusammenfallen; dann berühren Σ, Σ' den Kegelschnitt s, ebenso wie $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ den Kegelschnitt s', in den Berührungspunkten dieser Tangenten.

Endlich kann auch einer der Kegelschnitte s, s' in ein Punktepaar zerfallen, oder beide. Zerfällt z. B. s' in die Ecke C und einen beliebigen Punkt M, so sind als die vier gemeinsamen Tangenten von s, s' die zwei Dreiecksseiten CA, CB und die von M an s gezogenen Tangenten zu betrachten. Zerfällt aber zugleich auch s auf dieselbe Weise in die Ecke C und einen beliebigen andern Punkt N, dann treten in obigem Satze die Punkte M, N an die Stelle von s, s', und er ändert sich in folgenden ab:

Sind M, N zwei beliebige Punkte; S, S' zwei einem Dreieck ABC eingeschriebene Kegelschnitte; t, t_1, t', t'_1 die vom Punkte M, dagegen T, T_1, T', T'_1 die von N an S und S' gezogenen Tangenten, und sind Σ, Σ', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ zwei andere dem Dreieck eingeschriebene Kegelschnittpaare, von denen das erstere die Geraden t, das letztere die Geraden T paarweise berührt, so schneiden sich die (vierten) Tangenten, welche jeder der Kegelschnitte Σ, Σ' mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ gemein hat, in einem und demselben Punkte μ auf der Geraden MN.

19. Fallen in dem letzten Satze S und S' zusammen, so wird derselbe:

Wenn von zwei Punkten M, N an einen dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt S Tangenten gezogen werden und Σ, Σ' die eingeschriebenen Kegelschnitte sind, welche die von M ausgehenden Tangenten in M selbst berühren; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ eingeschriebene Kegelschnitte, welche die von N ausgehenden Tangenten in N selbst berühren, so schneiden sich die vierten Tangenten, welche Σ und Σ' mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ gemein haben, in demselben Punkt μ auf der Geraden MN.

Zusatz. Zerfällt S in zwei Punkte, nämlich die Ecke C und einen Punkt C' auf AB, so zerfällt auch ein Σ und ein $\mathfrak{S}$ in ähnlicher Weise in

Punktepaare, und es treten an die Stelle dieser Kegelschnitte im vorigen Satze diejenigen Punkte d, d' von AB, welche mit MC und NC in gerader Linie liegen. Auf den hieraus sich ergebenden Satz werde ich später zurückkommen (21.).

20. Fällt in (18.) der Punkt M in einen der Durchschnittspunkte der Kegelschnitte S, S', so fallen die zwei Tangenten t, t_1 zusammen, ebenso die zwei Tangenten t', t'_1 und folglich auch die zwei Kegelschnitte Σ, Σ'. Dann fallen aber auch auf $\mathfrak{S}$ die Tangenten T, T' zusammen, welche dieser Kegelschnitt mit Σ und Σ' gemein hat, und ebenso auf $\mathfrak{S}'$ die Tangenten T_1, T'_1, welche $\mathfrak{S}'$ mit Σ und Σ' gemein hat. Der Punkt μ also auf MN, in welchem sich die Tangenten T, T', T_1, T'_1 schneiden, liegt sowohl auf $\mathfrak{S}$ als auf $\mathfrak{S}'$ und ist mithin ein Durchschnittspunkt von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$. Ein Durchschnittspunkt μ also von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ und ein Durchschnittspunkt M von S und S' liegen in gerader Linie mit N, und die an den Punkten μ, M an diese Kegelschnitte gezogenen Tangenten berühren Σ. Die von N an S und S' gezogenen Tangenten können aber auf drei verschiedene Weisen paarweise zusammengefasst werden. Ist σ, σ' dass dritte Kegelschnittpaar, welches diese Tangenten berührt, so können wir in dem Vorigen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ durch σ, σ' ersetzen. Ein Durchschnittspunkt von σ und σ' liegt also auf derselben Geraden MN. Also:

Sind T, T_1, T', T'_1 vier durch einen Punkt N gehende Gerade, so liegen die Durchschnittspunkte jedes der drei Paare von Kegelschnitten S, S', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, σ, σ', welche einem Dreiecke ABC eingeschrieben sind und diese Geraden paarweise berühren, auf denselben vier durch N gehenden Geraden L, L', L'', L'''. Auf jeder dieser Geraden liegen nämlich drei Durchschnittspunkte, den drei verschiedenen Kegelschnittpaaren angehörig, und die sechs Tangenten der Kegelschnitte in den drei, auf derselben Geraden L liegenden Durchschnittspunkten berühren einen und denselben dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt Σ (und sind auf demselben in Involution). S. auch (22.).

21. Geht eine der Geraden T durch eine Ecke C des Dreiecks ABC, so zerfällt je ein Kegelschnitt von den drei Paaren S, S', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, σ, σ' in zwei Punkte, nämlich den Punkt C und denjenigen Punkt auf AB, in welchem die andere Gerade T, welche der Kegelschnitt berührt, sie schneidet. Dann geht der Satz in folgenden über:

Sind T, T', T'' drei durch einen Punkt N gehende Gerade; S, S', S'' drei einem Dreieck ABC eingeschriebene Kegelschnitte, welche je zwei dieser Geraden berühren, nämlich nach der Reihe T', T''; T'', T; T, T', und man

zieht von einer Ecke C des Dreiecks Gerade nach den Punkten d, d', d'', in welchen die Geraden T, T', T'' die gegenüberliegende Seite AB treffen, so liegen die Durchschnittspunkte von S mit Cd, von S' mit Cd' und von S'' mit Cd'' auf zwei durch N gehenden Geraden L, L'.

Der Kegelschnitt Σ berührt in diesem Falle die Geraden Cd, Cd', Cd''. Er zerfällt also in den Punkt C und einen Punkt n auf AB. Also: Die Tangenten der drei Kegelschnitte S, S', S'' in den Durchschnittspunkten, welche auf derselben Geraden $L(L')$ liegen, schneiden sich in einem Punkt $n(n')$ der Seite AB.

Betrachtet man nur zwei der drei Kegelschnitte, so lässt sich der Satz in anderer Form aussprechen:

Sind S, S' zwei einem Vierseit $ABFG$ eingeschriebene Kegelschnitte, und man zieht von irgend einem Punkt N einer Seite die andern Tangenten von S, S', welche eine zweite Seite AB resp. in d und d' treffen, und ist C der Durchschnittspunkt der dritten und vierten Seite des Vierseits, so liegen die Durchschnittspunkte α, β von Cd' mit S und die Durchschnittspunkte α', β' von Cd mit S' paarweise auf zwei durch N gehenden Geraden L, L', und die Tangenten von S und S' an den auf derselben Geraden $L(L')$ liegenden Punkten schneiden sich in einem Punkt $n(n')$ der Seite AB. (Fig. 4).

Der umgekehrte Satz ergiebt sich unmittelbar aus (19. Zus.) und lautet: *Zieht man von einem Punkt n auf einer Seite AB des Vierseits Tangenten an S und S', durch die Berührungspunkte α auf S und α' auf S' Gerade nach dem Durchschnittspunkt C zweier andern Seiten und von den Punkten d', d, wo diese Geraden die Seite AB treffen, Tangenten resp. an S' und S, so schneiden sich diese Tangenten in einem Punkt N der vierten Seite des Vierseits zugleich mit der Geraden $\alpha\alpha'$.* — Nach dem erstern Satze ersieht man aber, dass dann auch *die zweiten Durchschnittspunkte β, β', welche Cd' mit S und Cd mit S' bilden, in einer Geraden mit dem Punkt N liegen, und dass die Tangenten in diesen Punkten β, β' sich in einem Punkt n' auf AB schneiden.*

Jedem Punkt N auf einer Seite des Vierseits entsprechen mithin zwei Punkte n, n' auf der andern Seite, während jedem Punkt n nur ein Punkt N entspricht. Die Punktepaare n, n', welche den Punkten N der ersten Seite entsprechen, sind also in Involution. Fällt N in den Durchschnittspunkt mit AC oder BC, so fallen n und n' resp. in A oder B zusammen. A und B sind also die Doppelpunkte der Involution, und *n und n' liegen harmonisch zu den Punkten A, B.*

Zusatz 1. Aus diesen Sätzen ergeben sich spezielle Fälle, wenn N oder n in den Berührungspunkt eines der Kegelschnitte fällt; andere, wenn N oder n in den Durchschnittspunkt E von AB und FG fällt. Rückt der Punkt N auf FG nach E, so werden die Punkte d, d' die Berührungspunkte von S und S' auf AB; rückt aber ein Punkt n auf FG nach E, so fallen die Punkte α, α' mit diesen Berührungspunkten zusammen. Also:

Sind S, S' dem Vierseit $ABFG$ eingeschrieben; d, d' ihre Berührungspunkte auf einer Seite AB; C und E die Durchschnittspunkte der Gegenseiten, so liegen die Durchschnittspunkte α, β, α', β' von Cd' mit S und von Cd mit S' paarweise in gerader Linie mit E, und die Tangenten in diesen Punktepaaren, welche mit E in einer Geraden liegen, schneiden sich auf AB in zwei zu A und B harmonischen Punkten n, n'; sind ferner γ, γ' die Punkte, in welchen Cd das S, und Cd' das S' zum zweiten Male trifft, und δ, δ' die Durchschnittspunkte von Cd und Cd' mit FG, so schneiden sich die von δ' an S und von δ an S' gezogenen Tangenten ebenfalls auf AB in einem Punkt ν, der in gerader Linie liegt mit γ und γ', und die Tangenten in γ und γ' schneiden sich auf FG in einem Punkt ε, der zu E harmonisch liegt in Bezug auf F, G. (Fig. 5.)

Zusatz 2. Fallen die beiden Seiten AC, BC zusammen, so dass sich die beiden Kegelschnitte in C berühren, so tritt keine wesentliche Modification obiger Sätze ein. Fallen aber die beiden Geraden AB und FG zusammen, so dass E Berührungspunkt von S und S' wird,. so fallen auch die beiden Geraden Cd, Cd' zusammen und es folgt:

Berühren sich S und S' in E und ist AB Tangente im Berührungspunkt, CA und CB die zwei andern gemeinsamen Tangenten von S und S', und man zieht durch C irgend eine Gerade, welche S in den Punkten α, β, S' in den Punkten α', β' schneidet, so schneiden sich die Tangenten in α, α', β, β' paarweise auf AB in Punkten n, n', welche zu A und B harmonisch liegen.

22. Fällt in dem Satze (20.) der Punkt N in einen Durchschnittspunkt der Kegelschnitte S, S', so fallen die Tangenten T, T_1 und ebenso die Tangenten T', T'_1 zusammen und mithin auch die Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, und drei ihrer Durchschnittspunkte fallen mit den Berührungspunkten von $\mathfrak{S}$ auf den Dreiecksseiten zusammen. Hieraus folgt:

Sind S, S' zwei einem Dreieck eingeschriebene Kegelschnitte; T, T' ihre Tangenten in einem ihrer Durchschnittspunkte N, und ist $\mathfrak{S}$ der eingeschriebene Kegelschnitt, der T und T' berührt, so liegen die Berührungspunkte

von $\mathfrak{S}$ mit den Dreiecksseiten auf den von N ausgehenden gemeinsamen Sehnen von S und S'.

Aus diesem Satze ersieht man, dass in dem Satze (20.) in jedem der drei Kegelschnittpaare S, S', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, σ, σ' die drei gemeinsamen Sehnen, welche von dem auf derselben Geraden L liegenden Durchschnittspunkt ausgehen, durch die Berührungspunkte des Kegelschnitts Σ auf den Seiten des Dreiecks gehen. *Die sechs gemeinsamen Sehnen jedes dieser Kegelschnittpaare gehen also durch dieselben sechs Punkte auf den Seiten des Dreiecks ABC. In jedem dieser sechs Punkte berühren zwei der vier Kegelschnitte Σ, welche zu den vier Geraden L, L', L'', L''' gehören.*

23. Die Sätze (17.—22.) lassen sich anwenden auf Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt. Nimmt man in dem allgemeinen Satze (17.) für CA, CB die nach den unendlich entfernten Kreispunkten gehenden Geraden, so wird C der gemeinsame Brennpunkt sämmtlicher Kegelschnitte; S, S', Σ, Σ', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ berühren ausserdem die Gerade AB. Der Satz sagt sodann aus, dass die zweiten gemeinsamen Tangenten jedes der Kegelschnitte Σ, Σ' mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und die zwei gemeinsamen Tangenten von s, s' einen Kegelschnitt berühren, welcher denselben Brennpunkt C hat.

Wenn man in demselben Satze (17.) S und S' in Punktepaare A, A' und B, B' zerfallen lässt, wo A', B' beliebige Punkte auf BC, AC resp. sind, so kann man für Σ den Kegelschnitt nehmen, der die von diesen Punkten A', B' an s gezogenen Tangenten berührt, und für $\mathfrak{S}$ den Kegelschnitt, welcher die von denselben Punkten an s' gezogenen Tangenten berührt, während Σ' und $\mathfrak{S}'$ in die Punktepaare A, B zerfallen. Dann erhält man den speciellen Satz, dass, wenn zwei Vierecke drei Ecken gemein haben, und in jedes ein Kegelschnittpaar s, Σ und $s', \mathfrak{S}$ eingeschrieben ist, die gemeinsamen Tangenten von s und s' und die von Σ und $\mathfrak{S}$ einen andern Kegelschnitt σ berühren. Hieraus kann man folgern:

Die gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte s, s', welche einen Brennpunkt gemein haben, und die zwei gemeinsamen Tangenten zweier zu diesen confocalen Kegelschnitte Σ, $\mathfrak{S}$ berühren einen Kegelschnitt σ mit demselben Brennpunkt.

Da, wenn zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemein haben, sich ihre gemeinsamen Tangenten auf der Geraden schneiden, welche die zwei andern Brennpunkte verbindet, so folgt, dass der zweite Brennpunkt von σ auf der Geraden liegt, welche die zweiten Brennpunkte von s und s' verbindet. Als

specieller Fall ergiebt sich aus dem vorigen Satze: Haben zwei Kegelschnitte s, s' einen gemeinsamen Brennpunkt C, so berühren die vom zweiten Brennpunkt jedes dieser Kegelschnitte an den andern Kegelschnitt gezogenen Tangenten einen Kegelschnitt mit demselben Brennpunkt C. —

Andere einfache Sätze über zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt ergeben sich aus (21.), wenn man daselbst C als gemeinsamen Brennpunkt der zwei Kegelschnitte S und S' betrachtet. Nur ist hiebei zu bemerken, dass die Geraden Cn, Cn', welche harmonisch sind zu den nach den unendlich entfernten Kreispunkten laufenden Geraden CA, CB, auf einander senkrecht stehen. Dasselbe gilt von den Geraden $C\varepsilon$, CE in dem Zus. 1. Hierin ist der Satz enthalten, dass die Tangenten an den Endpunkten einer Focalsehne irgend eine andere Tangente des Kegelschnitts in zwei Punkten n, n' schneiden, welche vom Brennpunkt unter einem rechten Winkel gesehen werden. Beispielsweise führe ich den speciellen Satz an, der sich aus dem dortigen Zus. 1. für zwei confocale Parabeln ergiebt, wenn man von den Berührungspunkten auf der unendlich entfernten Geraden ausgeht:

Seien S, S' die zwei Parabeln, C ihr gemeinsamer Brennpunkt. Die Punkte, in welchen die Axe von S das S' schneidet, und die Punkte, in welchen die Axe von S' das S schneidet, liegen paarweise auf Parallelen zur gemeinsamen Tangente von S und S', und die Tangenten an den zwei auf derselben Parallele liegenden Punkten sind parallel (die Richtungen der parallelen Tangentenpaare aber senkrecht zu einander); und sind δ, δ' die Punkte, in welchen die Axen von S und S' die gemeinsame Tangente treffen, so sind die von δ an S' und von δ' an S gezogenen Tangenten parallel zu der Geraden, welche die Scheitel der zwei Parabeln verbindet, und die Tangenten an diesen Scheiteln schneiden sich auf der gemeinsamen Tangente in dem Punkte, wo das vom Brennpunkt auf dieselbe gefällte Loth sie trifft.

Ebenso schliesst man aus (22.): Haben die drei Kegelschnitte S, S', $\mathfrak{S}$ einen gemeinsamen Brennpunkt und eine gemeinsame Tangente AB, und berührt $\mathfrak{S}$ die an S und S' an einem ihrer Durchschnittspunkte, N, gezogenen Tangenten, so berührt $\mathfrak{S}$ die gemeinsame Tangente AB in dem Punkte, wo die gemeinsame Sehne von S und S' sie schneidet. — Also insbesondere: Die Axe derjenigen Parabel, welche mit zwei confocalen Parabeln S, S' denselben Brennpunkt hat und die an S und S' in einem ihrer Durchschnittspunkte gezogenen Tangenten berührt, ist parallel zu der Durchschnittssehne der zwei Parabeln S, S'.

24. Der zu (17.) reciproke Satz lautet: *Sind S, S' zwei einem Dreieck ABC umschriebene Kegelschnitte; s, s' zwei Kegelschnitte, welche durch zwei Ecken A, B desselben gehen; Σ, Σ' zwei umschriebene Kegelschnitte, welche durch die Durchschnittspunkte a, b, a', b' von s mit S und S', paarweise genommen, gehen; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ zwei umschriebene Kegelschnitte, welche durch die Durchschnittspunkte α, β, α', β' von s' mit S und S', paarweise genommen, gehen, so liegen die vierten Durchschnittspunkte von jedem der Kegelschnitte Σ, Σ' mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ auf einem Kegelschnitt, der durch die vier Durchschnittspunkte von s und s' geht.*

25. Treten an die Stelle der beiden Kegelschnitte s, s' zwei Gerade M, N, so ändert sich der vorige Satz dahin ab, dass *die vierten Durchschnittspunkte von jedem der Kegelschnitte Σ, Σ' mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ auf einer Geraden L liegen, welche durch den Durchschnittspunkt von M und N geht.*

Die zwei Kegelschnitte S, S' können zusammenfallen, dann berühren Σ und Σ' die Gerade M; $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ die Gerade N in den Punkten, wo diese Geraden den umschriebenen Kegelschnitt S schneiden.

26. Ist in dem vorigen Satze die Gerade M gemeinsame Tangente von S und S', so erhält man den zu (20.) reciproken Satz, nämlich:

Sind α, β, α', β' vier Punkte auf einer Geraden N und S, S', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, σ, σ' drei Paare von Kegelschnitten, welche einem Dreieck ABC umschrieben sind und durch diese Punkte, paarweise genommen, gehen, so treffen die gemeinsamen Tangenten von jedem dieser Kegelschnittpaare die Gerade N in denselben vier Punkten m, m', m'', m'''; und die sechs Berührungspunkte der sich in demselben Punkt m schneidenden drei Tangenten liegen auf einem dem Dreieck ABC umschriebenen Kegelschnitt Σ (und sind folglich auf diesem in Involution). S. hiezu (28.).

Ist insbesondere N die unendlich entfernte Gerade, so folgt: Sind S, S', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, σ, σ' drei Paare einem Dreieck umschriebener Hyperbeln, deren Asymptoten parallel sind zu vier gegebenen Geraden, paarweise genommen, so haben die gemeinsamen Tangenten jedes dieser Paare dieselben Richtungen, und die sechs Berührungspunkte der drei Tangenten, welche dieselbe Richtung haben, liegen auf einem dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt Σ.

27. Liegt einer der Punkte α, β, α', β' auf der Dreiecksseite AB, so zerfällt ein S, ein $\mathfrak{S}$ und ein σ in eben diese Seite und eine durch C gehende Gerade. In gleicher Weise zerfällt Σ; denn drei der sechs Berührungspunkte,

durch welche Σ geht, liegen auf AB. Zieht man von den drei übrig bleibenden Kegelschnitten nur zwei in Betracht, so ergiebt sich folgender Satz, reciprok zu (21.):

Sind A, B, C, D die vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte S, S', und zieht man durch einen derselben, D, eine beliebige Gerade N, welche S in α, S' in α' trifft; zieht sodann $C\alpha$, $C\alpha'$, welche die gemeinsame Sehne AB in m und m' treffen, so schneiden sich die von m an S' und von m' an S gezogenen Tangenten zu zweien auf der Geraden N, und die Berührungspunkte der zwei sich auf N schneidenden Tangentenpaare liegen auf zwei Geraden n, n', welche durch C gehen und AB harmonisch theilen. (Fig. 6.)

Der umgekehrte Satz gilt ebenfalls, nämlich: Zieht man durch einen Durchschnittspunkt C eine Gerade n und in den Punkten, wo sie S und S' schneidet, Tangenten u. s. w.

Zusatz. Lässt man in diesen Sätzen zuerst N, dann n mit der Sehne CD zusammenfallen, so folgt: Sind m, m' die Punkte, in welchen die Tangenten von S und S' an einem ihrer Durchschnittspunkte, C, eine gemeinsame Sehne AB treffen, so schneiden sich die von m an S' und von m' an S gezogenen Tangenten zu zweien auf der andern gemeinsamen Sehne CD, und ihre Berührungspunkte liegen auf zwei Geraden n, n', welche durch C gehen und AB harmonisch theilen; ferner: die Punkte α, α', in welchen S von $m'D$ und S' von mD geschnitten wird, liegen in einer durch C gehenden Geraden ν; auf dieser Geraden schneiden sich die zweiten von m' an S' und von m an S gezogenen Tangenten, und die Berührungspunkte γ, γ' dieser Tangenten liegen auf einer durch D gehenden Geraden, welche zu DA, DB, DC die vierte harmonische ist. (Fig. 7.)

28. Fallen in (26.) α, β zusammen und ebenso α', β', d. h. berührt die Gerade N die Kegelschnitte S, S' in α und α', so fallen auch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zusammen, und drei der gemeinsamen Tangenten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ gehen in die Tangenten von $\mathfrak{S}$ in den Ecken des Dreiecks ABC über. Also:

Sind S, S' zwei dem Dreieck ABC umschriebene Kegelschnitte, welche eine Gerade N berühren, und ist $\mathfrak{S}$ der umschriebene Kegelschnitt, welcher durch die Berührungspunkte α, α' geht, so gehen die Tangenten von $\mathfrak{S}$ in den Ecken A, B, C durch die Punkte n, n', n'', in welchen die Gerade N von den drei andern gemeinsamen Tangenten von S und S' geschnitten wird.

Ist insbesondere N die unendlich entfernte Gerade, so folgt: Sind einem Dreieck zwei Parabeln umschrieben und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten

parallel sind zu den Axen der Parabeln, so sind die Tangenten der Hyperbel an den Ecken des Dreiecks parallel den drei gemeinsamen Tangenten der zwei Parabeln.

Aus dem ersten dieser Sätze ergiebt sich, dass in dem Satze (26.) für jedes der Kegelschnittpaare S, S', $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, σ, σ' die drei Durchschnittspunkte der durch denselben Punkt m gehenden gemeinsamen Tangente mit den andern gemeinsamen Tangenten auf den drei Tangenten des Kegelschnitts Σ in den Ecken A, B, C liegen. Also: Die sechs Durchschnittspunkte der gemeinsamen Tangenten von jedem der drei Kegelschnittpaare S, S', $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, σ, σ' liegen auf denselben sechs durch die Ecken des Dreiecks ABC gehenden Geraden. Jede dieser sechs Geraden ist Tangente zu zweien der vier Kegelschnitte Σ, welche zu den vier Punkten m, m', m'', m''' gehören. —

29. Die Sätze (24.—28.) geben entsprechende Sätze über Systeme von Kreisen oder ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten überhaupt. So giebt (24.): Sind s, s' zwei beliebige Kreise, S und S' zwei Kreise, welche durch einen Punkt C gehen; Σ, Σ' Kreise, welche durch C und je einen Durchschnittspunkt von s mit S und von s mit S' gehen; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ Kreise, welche durch C und je einen Durchschnittspunkt von s' mit S und von s' mit S' gehen, so liegen die zweiten Durchschnittspunkte von jedem der Kreise Σ, Σ' mit jedem der Kreise $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ auf einem und demselben Kreis σ, der mit s und s' dieselbe Radikalaxe hat. (Fig. 8.)

Gehen die Kreise s und s' zugleich in Gerade über, so verwandelt sich auch der Kreis σ in eine Gerade, welche durch den Durchschnitt von s und s' geht. —

Ebenso folgt aus (26.): Gehen drei Paare von Kreisen S, S', $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, σ, σ' durch einen Punkt C und zugleich durch vier Punkte einer Geraden N (die Punkte auf verschiedene Art paarweise zusammengenommen), so schneiden die zwei gemeinsamen Tangenten jedes Paars die Gerade N in denselben zwei Punkten m, m', und die sechs Berührungspunkte der drei durch denselben Punkt $m(m')$ gehenden Tangenten liegen auf einem durch C gehenden Kreis $\Sigma(\Sigma')$; und aus (28.): die zwei Kreise Σ, Σ' haben in C eine gemeinsame Tangente; auf dieser Tangente schneiden sich die zwei gemeinsamen Tangenten von jedem der drei Kreispaare. (Fig. 9.)

30. In dem Satze (24.) kann der Fall eintreten, dass die vier Durchschnittspunkte der Kegelschnitte Σ, Σ' mit den Kegelschnitten $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, welche auf einem durch die Durchschnittspunkte von s, s' gehenden Kegelschnitt liegen, in einen Punkt zusammenfallen. Dieser Fall tritt ein, wenn die Kegelschnitte

S, S' zusammenfallen, und zugleich S durch die vierten Durchschnittspunkte zweier dem Dreieck ABC umschriebener Kegelschnittpaare geht, welche s und s' zugleich berühren.

Ebenso schneiden sich in dem Satze (25.) die Kegelschnitte Σ, Σ', $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ in einem vierten gemeinsamen Punkte, wenn S und S' zusammenfallen, und S durch die vierten Durchschnittspunkte zweier dem Dreieck ABC umschriebener Kegelschnittpaare geht, welche die Geraden M, N zugleich berühren.

Dies ergiebt sich aus Folgendem. Ist S ein dem Dreieck umschriebener Kegelschnitt, m irgend ein Punkt auf demselben, V, V_1 das dem Dreieck umschriebene Kegelschnittpaar, welches durch den Punkt m geht und eine gegebene Gerade M berührt, und V derjenige umschriebene Kegelschnitt, welcher S im Punkte m harmonisch schneidet in Bezug auf V, V_1, so geht dieser Kegelschnitt V durch einen festen Punkt P, welches auch der Punkt m auf S sein mag. Es entsprechen nämlich die Kegelschnitte S, V zweien conjugirten Punkten σ, v eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts μ, dessen Pollinie M ist, und der Punkt P entspricht der Polaren von σ in Bezug auf μ. Den Punkten, in welchen diese Polare μ schneidet, entsprechen die zwei dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte Σ, Σ', welche M in den Punkten berühren, in welchen der Kegelschnitt S diese Gerade schneidet. Diese beiden Kegelschnitte Σ, Σ' gehen mithin, wie V, durch den Punkt P.

Ist nun noch eine zweite Gerade N gegeben, und sind V, V_1, V_2, V_3 die vier dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte, welche M und N zugleich berühren; m, wie vorhin, der vierte Durchschnittspunkt von V, V_1, m' der von V_2 und V_3, und geht S durch m und m', so ist der Punkt P der vierte Durchschnittspunkt von V mit dem umschriebenen Kegelschnitt V$'$, der S in m' harmonisch schneidet in Bezug auf das Kegelschnittpaar V_2, V_3. In diesem Punkte P schneiden sich aber sowohl die zwei Kegelschnitte Σ, Σ', als auch die zwei Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, welche dem Dreieck umschrieben sind und die Gerade N in den Punkten berühren, in welchen dieselbe von S geschnitten wird.

Treten an die Stelle der Geraden M, N zwei Kegelschnitte s, s', welche durch zwei Ecken des Dreiecks gehen, so ändert sich an dem vorigen Beweise nichts, als dass statt des eingeschriebenen Kegelschnitts μ ein Kegelschnitt zu setzen ist, der zwei Seiten des Dreiecks berührt.

31. Nehmen wir den letztern allgemeinern Fall an, und legen wir durch den Punkt P und je einen der Punkte m, m' umschriebene Kegelschnitte V, V$'$, so bilden dieselben mit den zwei Paaren Σ, Σ' und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ einen

involutorischen Büschel (13. *b.*). Jeder andere dem Dreieck umschriebene Kegelschnitt wird also (6.) von diesen sechs Kegelschnitten in Punkten geschnitten, welche auf ihm in Involution sind, mithin auch der Kegelschnitt S selbst: d. h. das Punktepaar m, m' und die Punktepaare, in welchen S die Kegelschnitte s und s' schneidet, sind auf S in Involution. Folglich (14, 2) liegen die Punkte m, m' auf einem Kegelschnitt, der durch die Durchschnittspunkte von s und s' geht. Also: *Sind s, s' zwei Kegelschnitte; A, B zwei Durchschnittspunkte derselben, so können durch A, B und einen beliebigen dritten Punkt C vier Kegelschnitte gelegt werden, welche s und s' zugleich berühren. Der vierte Durchschnittspunkt zweier derselben und der vierte Durchschnittspunkt der zwei andern liegen auf einem Kegelschnitt, der durch die vier Durchschnittspunkte von s und s' geht.*

So giebt es vier Kreise, welche durch einen Punkt C gehen und zwei gegebene Kreise s, s' berühren. Der zweite (reelle) Durchschnittspunkt des einen Kreispaars und der des andern Paars liegen auf einem Kreise, welcher mit s und s' dieselbe Radikalaxe hat.

32. Berühren die vier Kegelschnitte nicht die zwei Kegelschnitte s, s', sondern zwei Gerade M, N, so folgt aus dem Umstande, dass das Punktepaar m, m' auf S in Involution ist mit den Punktepaaren, in welchen S von M und N geschnitten wird, dass die Gerade mm' durch den Durchschnittspunkt von M und N geht. Also geht in diesem Falle der vorige Satz in folgenden über:

Die sechs Durchschnittspunkte der vier Kegelschnitte, welche einem Dreieck umschrieben zwei Gerade M, N zugleich berühren, liegen paarweise auf Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der zwei Geraden M, N gehen.

Zusatz. Die vier Parabeln, welche einem Dreieck umschrieben eine gegebene Gerade berühren, haben ihre Durchschnittspunkte paarweise auf Geraden, welche zur gegebenen Geraden parallel sind.

33. Sind, wie soeben, V, V_1 und V_2, V_3 zwei dem Dreieck ABC umschriebene Kegelschnittpaare, welche die zwei Geraden M, N berühren, m und m' ihre vierten Durchschnittspunkte und P irgend ein Punkt, so bilden die umschriebenen Kegelschnitte, welche durch die Punktepaare P, m und P, m' gehen, mit den Kegelschnittpaaren, welche dem Viereck $ABCP$ umschrieben die Gerade M und die Gerade N resp. berühren, einen involutorischen Büschel. Ist nun l der Durchschnittspunkt von M und N, und fällt P mit l zusammen, so fallen die zwei letztern Kegelschnittpaare in je einen Kegelschnitt zusammen, nämlich denjenigen Kegelschnitt, welcher M in l berührt, und den-

jenigen, welcher N in l berührt. Diese zwei Kegelschnitte schneiden sich also in l harmonisch mit den Kegelschnitten, welche durch die Punktepaare l, m und l, m' gehen. Sind also μ und μ' die Tangenten dieser zwei letztern Kegelschnitte im Punkte l, so sind μ und μ' harmonisch zu den Geraden M und N.

Zieht man nun von m Gerade durch die Ecken A, B, C des Dreiecks ABC, welche die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten a, b, c treffen, so ist (Fig. 10) das Dreieck abc in Bezug auf beide Kegelschnitte V, V_1 conjugirt. Der Durchschnittspunkt l von M und N liegt auf einer Seite dieses Dreiecks. Sei ac diese Seite, so ist, da b der Pol der Geraden acl ist in Bezug auf alle dem Viereck $ABCm$ umschriebenen Kegelschnitte, bl die Tangente des Kegelschnitts $ABCml$ im Punkte l, d. h. bl ist die Gerade μ, und da acl zu bl, M und N die vierte harmonische ist, so ist acl die Gerade μ'. Macht man also von m' aus dieselbe Construction, wie vorhin von m aus, und treten dabei die Punkte a', b', c' an die Stelle von a, b, c, so vertauschen die Geraden μ, μ' nur ihre Rollen, nämlich die Punkte a', c' fallen auf μ, und b' auf μ'.

Sind also m, m' die vierten Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittpaare V, V_1 und V_2, V_3, welche dem Dreieck ABC umschrieben sind und zwei Gerade M, N berühren, und man zieht von ihnen Gerade durch die Ecken des Dreiecks, so liegen die sechs Punkte, in welchen diese Geraden die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks schneiden, zu dreien auf zwei Geraden μ, μ', welche durch den Durchschnittspunkt l von M und N gehen. Diese Geraden liegen harmonisch zu M und N und sind Tangenten der umschriebenen Kegelschnitte, welche resp. durch die Punktepaare m, l und m', l gehen.

Man könnte den Satz auch so aussprechen: *In den zwei Vierecken $ABCm$ und $ABCm'$ liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und der der Diagonalen auf denselben zwei durch l gehenden Geraden μ, μ'.*

Ist einer der Punkte m, m' gegeben, so ist hiedurch der andere auch bestimmt und leicht zu construiren.

34. Die zu (31.—33.) reciproken Sätze lauten:

Sind s und s' zwei Kegelschnitte, welche zwei Seiten eines Dreiecks ABC berühren, so giebt es vier Kegelschnitte, welche dem Dreieck eingeschrieben s und s' zugleich berühren. Die vierte gemeinsame Tangente zweier derselben und die vierte gemeinsame Tangente der beiden andern berühren einen Kegelschnitt, der dem um s und s' beschriebenen Vierseit eingeschrieben ist.

An die Stelle der Kegelschnitte s, s' können beliebige Punkte M, N treten, dann wird der Satz:

Es giebt vier einem Dreieck ABC eingeschriebene Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte M, N gehen. Die vierte gemeinsame Tangente zweier derselben und die der zwei andern schneiden sich auf der Geraden MN.

35. Ist T die vierte gemeinsame Tangente eines Paares, T' die des andern Paares, *so gehen die sechs Diagonalen der zwei Vierseite, welche T und T' mit den Dreiecksseiten bilden, zu dreien durch zwei Punkte* μ, μ' *auf MN, welche harmonisch zu den Punkten M, N liegen.* Durch jeden dieser Punkte μ, μ' gehen nämlich zwei Diagonalen des einen Vierseits und eine des andern Vierseits. Diese Punkte sind zugleich die Berührungspunkte der zwei Kegelschnitte, welche diesen Vierseiten eingeschrieben sind und die Gerade MN berühren.

36. Liegen die Punkte M, N im Unendlichen, so werden die vier eingeschriebenen Kegelschnitte ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln. Es erhellt übrigens, dass der Satz auch noch Gültigkeit haben muss, wenn M und N conjugirt imaginäre Punkte sind und nur die Gerade MN reell ist. Daher giebt derselbe für ähnliche Kegelschnitte überhaupt:

Sind vier ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte (z. B. Kreise) einem Dreieck eingeschrieben, so ist die vierte gemeinsame Tangente zweier derselben der vierten gemeinsamen Tangente der zwei andern parallel.

Und: *Die sechs Geraden, welche von den Ecken des Dreiecks nach den Durchschnittspunkten dieser parallelen Tangenten auf den gegenüberliegenden Seiten gehen, sind zu dreien parallel und haben die Richtungen von zwei conjugirten Durchmessern der Kegelschnitte.*

Wie in (34.) die Punkte M, N, so können wir in (32.) und (33.) die Geraden M, N als conjugirt imaginär annehmen, in welchem Falle ihr Durchschnittspunkt l reell bleibt. Sind dann M und N Gerade, welche nach den unendlich entfernten Kreispunkten gehen, so erhalten wir folgenden Satz, der als der reciproke des vorigen Satzes von den eingeschriebenen Kreisen zu betrachten ist:

Es giebt vier Kegelschnitte, welche einem Dreieck umschrieben einen gegebenen Brennpunkt gemein haben. *Der vierte Durchschnittspunkt zweier derselben und der der zwei andern liegen auf einer durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Geraden.*

München, Juli 1867.

Ein Determinantensatz.

(Von Herrn *O. Hesse* zu München.)

Die Determinante A:

$$(1.)\qquad A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n$$

ist eine lineare Function einer beliebigen Verticalreihe und eine lineare Function einer beliebigen Horizontalreihe ihrer Elemente; sie ist in Rücksicht auf beide Elementenreihen, die wir als Variable betrachten wollen, von der zweiten Ordnung, wie sich dieses in der Entwicklung der Determinante A zeigt:

$$A = \frac{\partial A}{\partial a_p^q} a_p^q + \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 A}{\partial a_\varkappa^q \partial a_p^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda = \frac{\partial A}{\partial a_p^q} a_p^q - \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 A}{\partial a_p^q \partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Wenn wir nun B definiren durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad B = \frac{\partial A}{\partial a_p^q},$$

so lässt sich die Determinante A durch B und die variabeln Elemente so ausdrücken:

$$A = B a_p^q - \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Um dem rechten Theile dieser Gleichung eine andere Form zu geben, definiren wir das Product P aus zwei in Rücksicht auf die variabeln Elemente linearen Factoren wie folgt:

$$(3.)\qquad P = \sum_\varkappa \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\beta} a_\varkappa^q . \sum_\lambda \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\lambda} a_p^\lambda,$$

indem wir unter α und β, wie vorhin unter p und q, irgend welche, selbst gleiche, Zahlen verstehen aus der Reihe 0, 1, ... n.

Man hat also:

$$P = \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\beta} \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Es ist nun ein bekannter Determinantensatz:

$$\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\beta}\frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\lambda} - \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta}\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} = B \frac{\partial^2 B}{\partial a_\varkappa^\beta \partial a_\alpha^\lambda} = -B \frac{\partial^2 B}{\partial a_\alpha^\beta \partial a_\varkappa^\lambda}.$$

Multipicirt man diese Gleichung mit $a_\varkappa^q a_p^\lambda$ und addirt die Summe der Gleichungen, rücksichtlich $\varkappa$ und λ genommen, zu der vorhergehenden, so erhält man:

$$P - \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda = -B \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 B}{\partial a_\alpha^\beta \partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Addirt man endlich diese Gleichung zu der mit $\frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta}$ multiplicirten Gleichung, welche die letzte Entwicklung der Determinante A darstellte, so erhält man:

$$(4.)\qquad A\frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} + P = B\frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} a_p^q - B\sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 B}{\partial a_\alpha^\beta \partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda,$$

eine Gleichung, welche auf Grund der Definition (1.), (2.), (3.) besteht.

Diese Determinantengleichung scheint mir wichtig besonders wegen der Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen. Denn wenn B verschwindet, so hat man

$$(5.)\qquad A\frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} = -P.$$

Es beweiset dieses den Satz:

(6.) *Wenn eine Determinante* $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$ *gegeben ist, deren Unterdeterminante* $\frac{\partial A}{\partial a_p^q}$ *verschwindet, so zerfällt die gegebene Determinante in zwei Factoren von der Form:*

$$A = (\lambda_0 a_0^q + \lambda_1 a_1^q + \cdots + \lambda_n a_n^q)(\lambda^0 a_p^0 + \lambda^1 a_p^1 + \cdots + \lambda^n a_p^n).$$

Um zu specialisiren, wollen wir annehmen, dass $p = q = n$ und $\alpha = \beta = (n-1)$ seien. Alsdann wird $B = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}$, und die ausführlich hingeschriebene Gleichung (5.) ist:

$$(7.)\qquad -A\frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} = \left\{\frac{\partial B}{\partial a_0^{n-1}} a_0^n + \frac{\partial B}{\partial a_1^{n-1}} a_1^n + \cdots + \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} a_{n-1}^n\right\}$$
$$\times \left\{\frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^0} a_n^0 + \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^1} a_n^1 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} a_n^{n-1}\right\}.$$

Man wird bemerken, dass jeder der beiden Factoren des rechten Theiles der Gleichung sich wieder als eine Determinante darstellen lässt.

Nimmt man ferner an, dass B eine symmetrische Determinante sei, dass nämlich sämmtliche Elemente in ihr $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$ seien, so ist auch $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} = \frac{\partial B}{\partial a_\lambda^\varkappa}$. In diesem Falle werden die Coefficienten in dem einen Factor den correspondirenden Coefficienten des anderen Factors gleich.

Nimmt man endlich an, dass die Determinante A eine symmetrische sei, worauf hin auch die Determinante B symmetrisch sein wird, so wird der rechte Theil der Gleichung (7.) ein Quadrat, und man hat zu (6.) den Zusatz:

(8.) *Wenn eine Determinante* $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n$ *symmetrisch ist, und wenn die Unterdeterminante* $B = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_{n-1}^{n-1}$ *verschwindet, so ist die Determinante* A *das Quadrat einer linearen homogenen Function der* n *Variabeln* $a_0^n = a_n^0,\ a_1^n = a_n^1,\ \dots\ a_{n-1}^n = a_n^{n-1}$ *).

Ich will nicht unterlassen, auf ein Paradoxon aufmerksam zu machen, welches sich mir bei Prüfung der dargelegten Determinantensätze aufdrängte.

Wenn ich weiter keine Voraussetzungen mache, als dass in der Determinante A sei $a_n^n = 0$, und dass $B = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_{n-1}^{n-1}$, so ist die Entwickelung der Determinante:

$$A = -\sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^n a_n^\lambda,$$

und die n^2 Unterdeterminanten $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda}$ von B, welche als Coefficienten in der Entwickelung auftreten, sind eben so willkürlich als die n^2 Elemente, aus welchen die Determinante B besteht. Ich kann daher eine jede Summe von der angegebenen Form, welche Werthe auch die Coefficienten $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda}$ haben, im Allgemeinen als eine Determinante A darstellen.

Wenn ich nun, um von der Gleichung (7.) Gebrauch zu machen, die unter der Voraussetzung $B = 0$ besteht, bemerke, dass:

$$B^{n-1} = \Sigma \pm \frac{\partial B}{\partial a_0^0} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1^1} \cdots \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}},$$

so sehe ich, dass es nur der einzigen Bedingung bedarf:

$$\Sigma \pm \frac{\partial B}{\partial a_0^0} \frac{\partial B}{\partial a_1^1} \cdots \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} = 0,$$

um die angegebene Summe in zwei Factoren zu zerlegen, wozu doch bekanntlich mehrere Bedingungen erforderlich sind.

---

*) Den Satz (8.) findet man von Herrn *Weierstrass* bewiesen in dem Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 4. März 1858, p. 211. Denn seine von einem Factor abgelöste Function $\vartheta_\mu = \Sigma_{\alpha\beta} f(s_\mu)_{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta$, welche er als das Quadrat einer linearen Function darstellt, ist, wenn man $a_0^n = \Phi_0,\ a_1^n = \Phi_1,\ \dots\ a_{n-1}^n = \Phi_{n-1}$ und $a_n^n = 0$ setzt, gerade die symmetrische Determinante A, deren Unterdeterminante $B = f(s_\mu)$ verschwindet.

Um dieses Paradoxon aufzuklären, sage ich mir, dass die bezeichnete Summe sich immer als eine Determinante darstellen lässt, ausgenommen in dem Falle, wenn die Coefficienten $\frac{\partial B}{\partial a_x^\lambda}$ in ihr der einzigen Bedingungsgleichung

$$\Sigma \pm \frac{\partial B}{\partial a_0^0} \frac{\partial B}{\partial a_1^1} \cdots \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} = 0$$

genügen. In diesem Falle giebt es keinen Determinantenausdruck für die Summe. Sie lässt sich aber wieder als eine Determinante darstellen, wenn noch andere Bedingungen hinzutreten, auf Grund deren sie in zwei Factoren von der angegebenen Form zerfällt.

Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist.

(Von Herrn *Gordan* in Giessen.)

Im 146sten Bande der Philosophical Transactions pag. 101 hat Herr *Cayley* sich mit der Frage beschäftigt, ob alle aus einer binären Form entstehenden Covarianten und Invarianten als ganze Functionen einer begrenzten Anzahl von Formen mit numerischen Coefficienten darstellbar seien; er hat gezeigt, dass bei Formen zweiten, dritten und vierten Grades sich alles in der verlangten Weise ausdrücken lässt. Im Folgenden gebe ich für binäre Formen n^{ten} Grades ein endliches System von Covarianten und Invarianten an, von denen ich zeige, dass und wie alle aus der Form abgeleitete Formen sich als ganze rationale Functionen derselben mit numerischen Coefficienten darstellen lassen. Dieses für den allgemeinen Fall gegebene System ist immer zu gross und lässt sich in jedem besonderen Falle reduciren; für Formen fünften und sechsten Grades habe ich auch diese Reduction ausgeführt und ein möglichst kleines System von Grundformen geliefert. Bezeichnet man durch f eine gegebene binäre Form n^{ten} Grades, dann werde ich im Folgenden ein System von Formen ϑ aufstellen, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

I. Die Anzahl der ϑ ist endlich.

II. Jede Covariante und Invariante J von f, oder wie ich mich kurz ausdrücken will, jede Form J von f ist eine ganze Function der Formen ϑ mit numerischen Coefficienten.

Ich werde eine ganze Function mit numerischen Coefficienten durch F bezeichnen, so dass ich zu zeigen habe, wie jede Form in der Gestalt $J=F(\vartheta)$ darstellbar ist. Dabei setze ich immer voraus, dass für Formen der niederen Ordnungen solche Systeme aufgestellt seien.

§. 1.

Entstehung symbolischer Formen.

Bezeichnet man die gegebene Form f symbolisch durch

$$(a_1x_1+a_2x_2)^n = (b_1x_1+b_2x_2)\ldots = a_x^n = b_x^n,$$

so hat Herr *Clebsch* im 59sten Bande dieses Journals bewiesen, dass jede aus f entstehende Form eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von „symbolischen Producten":

$$P = a_x^\alpha b_x^\beta \ldots (ab)^{\alpha_1}(ac)^{\beta_1}\ldots$$

ist, in denen das Symbol (ab) die Determinante

$$(ab) = a_1b_2 - b_1a_2$$

bedeutet.

Die Summe der Exponenten von a_x, b_x, ... nenne ich den Grad von P, ihren Grad in den Coefficienten oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Buchstaben $a, b, c, \ldots$, die in P vorkommen, die Ordnung von P.

Ich stelle mir vorerst die Frage, in welcher Weise man die Formen P aus Formen niederer Ordnung ϑ entstehen lassen kann. Zu dem Ende lasse ich in P den (symbolischen) Factor a_x^α weg und ersetze dann den Buchstaben a der Art durch x, dass a_2 in x_1, a_1 in $-x_2$ übergeht, mithin (ba), (ca), ... in b_x, c_x, ... Die Form, die ich in dieser Weise erhalte, will ich durch ϑ bezeichnen. Umgekehrt erzeuge ich P aus ϑ dadurch, dass ich eine Anzahl Male etwa k Male die Symbole b_x, c_x, ... durch (ba), (ca), ... ersetze und das Resultat mit a_x^{n-k} multiplicire. Ich werde dieses Verfahren so bezeichnen: „Die Form P entsteht aus der Form ϑ durch Anwendung der k^{ten} Combination mit f."

Durch Anwendung der 0ten Combination von ϑ mit f entsteht das Product $f\vartheta$. Alle symbolischen Producte P von der m^{ten} Ordnung entstehen aus symbolischen Producten von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung durch Combination mit f.

Es sei φ irgend eine Covariante von f, welcher ich, wenn ihr Grad μ ist, stets die Form geben will:

$$\varphi = (\varphi_1x_1+\varphi_2x_2)^\mu = \varphi_x^\mu.$$

Ersetze ich in einem symbolischen Producte ϑ dann $\varkappa$ Male x in der oben beschriebenen Weise durch das Symbol φ und multiplicire ich danach mit $\varphi_x^{\mu-\varkappa}$, so erhalte ich eine Form Φ, von der ich sage: *„Die Form Φ entsteht aus ϑ mittelst der $\varkappa^{\text{ten}}$ Combination mit φ."* In diesem symbolischen Producte Φ kommt ausser den in ϑ vorkommenden Symbolen noch das Symbol φ vor, sie ist eine lineare homogene Function der Coefficienten von φ, oder wie ich sagen will: *„Die Form Φ enthält das Symbol φ linear."*

Enthält eine Form ϑ ein Symbol φ, so enthalten es alle aus ϑ entstehenden Formen (symbolische Producte). —

Im Folgenden werde ich insbesondere das bekannte Verfahren benutzen, welches dazu dient, aus zwei bekannten Covarianten von f, etwa φ und ψ, die ich symbolisch durch φ_x^μ und ψ_x^ν bezeichne, die einfachsten neuen Covarianten und Invarianten zu bilden, nämlich die Formen:

$$(\varphi\psi)^0 = \varphi.\psi,$$
$$(\varphi\psi)^1 = \varphi_x^{\mu-1}\psi_x^{\nu-1}(\varphi\psi),$$
$$(\varphi\psi)^2 = \varphi_x^{\mu-2}\psi_x^{\nu-2}(\varphi\psi)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Von diesen Formen will ich sagen, „*sie seien durch die* 0[te], 1[te], 2[te],... *Uebereinanderschiebung von φ und ψ entstanden.* Ich werde in den folgenden Paragraphen nachweisen, *dass alle Formen von f lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von Formen sind, die mittelst wiederholter Uebereinanderschiebung aus f entstehen.*

§. 2.

Beweis, dass alle Covarianten und Invarianten durch wiederholte Uebereinanderschiebungen entstehen.

Es sei ϑ irgend ein symbolisches Product:

$$\text{(I.)} \qquad \vartheta = \vartheta_x^\mu = a_x^\alpha b_x^\beta r_x^\varrho s_x^\sigma \ldots (ab)(ar)(cs)\ldots,$$

das irgend welche Symbole enthält, sei es die Symbole a, b, c, aus denen sich die Coefficienten von f zusammensetzen, sei es die Symbole r, s..., aus denen sich die Coefficienten der entsprechenden Covarianten r, s... zusammensetzen lassen. Dann kann ich aus ϑ eine Form θ dadurch bilden, dass ich im symbolischen Ausdrucke (I.) irgend $\varkappa$ der Factoren a_x, b_x..., r_x, s_x... durch a_y, b_y ... r_y, s_y ersetze; diese Form θ enthält dann zwei Reihen von Veränderlichen x_1, x_2 und y_1, y_2. Die Differenz: $\theta - \vartheta_x^{\mu-\varkappa}\vartheta_y^\varkappa$ verschwindet zugleich mit der Determinante: $y_1x_2 - x_1y_2$, die ich durch (yx) bezeichnen will, hat also diese Determinante als Factor. Nennt man den andern Factor θ_1, so erhält man die Indentität:

$$\text{(II}^a.) \qquad \theta = \vartheta_x^{\mu-\varkappa}\vartheta_y^\varkappa + (yx)\theta_1.$$

Die Form θ_1 ist eine Form vom $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grade in den Veränderlichen y, vom $(\mu-\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grade in den Veränderlichen x; setzt man in θ_1:

$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, so erhält man eine Form $\vartheta_1 = \vartheta_{\underset{x}{1}}^{\mu-2}$ vom $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Grade, welche dieselben symbolischen Buchstaben wie ϑ enthält. Die Differenz: $\theta_1 - \vartheta_{\underset{x}{1}}^{\mu-\varkappa-1} \vartheta_{\underset{y}{1}}^{\varkappa-1}$ verschwindet zugleich mit der Determinante (yx), enthält sie daher als Factor, so dass man setzen kann:

$$(\text{II}^b.) \qquad \theta_1 = \vartheta_{\underset{x}{1}}^{\mu-\varkappa-1} \vartheta_{\underset{y}{1}}^{\varkappa-1} + (yx)\theta_2,$$

wo θ_2 vom $(\varkappa-2)^{\text{ten}}$ Grade in den y, vom $(\mu-\varkappa-2)^{\text{ten}}$ Grade in den x ist. Für $y = x$ gehe nun θ_2 in die Form $\vartheta_2 = \vartheta_{\underset{x}{2}}^{\mu-2}$ über, u. s. w. Man kann sich dann eine Reihe von Gleichungen wie die Formeln $(\text{II}^a.)$ und $(\text{II}^b.)$ bilden, sie seien:

$$\theta_2 = \vartheta_{\underset{x}{2}}^{\mu-\varkappa-2} \vartheta_{\underset{y}{2}}^{\varkappa-2} + (yx)\theta_3,$$

$$\theta_3 = \vartheta_{\underset{x}{3}}^{\mu-\varkappa-3} \vartheta_{\underset{y}{3}}^{\varkappa-3} + (yx)\theta_4,$$

$$\theta_4 = \vartheta_{\underset{x}{4}}^{\mu-\varkappa-4} \vartheta_{\underset{y}{4}}^{\varkappa-4} + (yx)\theta_5,$$

. . . .

. . . .

Die darin auftretenden Formen ϑ, ϑ_1, ϑ_2 ... haben die Grade μ, $\mu-2$, $\mu-4$, $\mu-6$ .... Durch Combination unserer Formeln erhält man die Gleichung:

$$(\text{III.}) \quad \theta = \vartheta_x^{\mu-\varkappa} \vartheta_y^{\varkappa} + \vartheta_{\underset{x}{1}}^{\mu-\varkappa-1} \vartheta_{\underset{y}{1}}^{\varkappa-1}(yx) + \vartheta_{\underset{x}{2}}^{\mu-\varkappa-2} \vartheta_{\underset{y}{2}}^{\varkappa-2}(yx)^2 + \vartheta_{\underset{x}{3}}^{\mu-\varkappa-3} \vartheta_{\underset{y}{3}}^{\varkappa-3}(yx)^3 \ldots;$$

die darin auftretenden Formen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 enthalten dieselben Symbole, wie ϑ.

Ersetzt man in θ die Veränderlichen y der Art durch das Symbol φ einer Covariante $\varphi = \varphi_x^{\mu}$, dass y_1 in φ_2, y_2 in $-\varphi_1$ übergeht, mithin a_y, b_y, ... in $(a\varphi)$, $(b\varphi)$ ..., und multiplicirt man dann mit $\varphi_x^{\mu-\varkappa}$, so erhält man eine Form Φ, die aus ϑ durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit φ entsteht. Wendet man dasselbe Verfahren auch auf die übrigen Glieder der Formel (III.) an, so ergiebt sich die Indentität:

$$\Phi = \vartheta_x^{\mu-\varkappa} \varphi_x^{\nu-\varkappa} (\vartheta\varphi)^{\varkappa} + \vartheta_{\underset{x}{1}}^{\mu-\varkappa-1} \varphi_x^{\nu-\varkappa+1} (\vartheta_1\varphi)^{\varkappa-1} + \vartheta_{\underset{x}{2}}^{\mu-\varkappa-2} \varphi_x^{\nu-\varkappa+2} (\vartheta_2\varphi)^{\varkappa-2} \ldots,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$(\text{IV.}) \qquad \Phi = (\vartheta\varphi)^{\varkappa} + (\vartheta_1\varphi)^{\varkappa-1} + (\vartheta_2\varphi)^{\varkappa-2} \ldots .$$

Die verschiedenen Glieder dieser Formel enthalten sämmtlich dieselben Buchstaben.

Hieran knüpfen sich folgende später zu verwerthende Bemerkungen.

Enthält eine Form Φ das Symbol φ und den Factor $\varphi_x^{\nu-r}$, so kann

man sie in die Form bringen:

$$\Phi = \Sigma_i (\vartheta_i \varphi)^{r-i},$$

worin die ϑ Formen bedeuten, welche alle symbolischen Buchstaben von Φ ausser φ enthalten. —

Bezeichne ich eine Form, die eines der Symbole: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ enthält, oder eine Summe solcher Formen durch: $P_\varphi = p_x^\mu$, so ist jede das Symbol p enthaltende Form ebenfalls eine Form P_φ. — Ist ϑ ein Product von Covarianten: $\vartheta = m_1 m_2 m_3 \ldots$, und ist der Grad s von m_1 gleich oder grösser als x, so existirt eine Identität der Form:

$$\text{(VI.)} \qquad (\vartheta\varphi)^x = (m_1\varphi)^x m_2 m_3 \cdots + (\vartheta_1\varphi)^{x-1} + (\vartheta_2\varphi)^{x-2} \ldots .$$

Ist dieser Grad s jedoch kleiner als x (das selbstverständlich kleiner oder gleich ν ist), so giebt es eine Relation der Form:

$$\text{(VII.)} \qquad (\vartheta\varphi)^x = ((m_1\varphi)^s, m_2 m_3 \ldots)^{x-s} + (\vartheta_1\varphi)^{x-1} + \cdots .$$

Hat ϑ die Form:

$$\vartheta = (\varphi\psi)^x = \varphi_x^{\mu-x} \psi_x^{\nu-x} (\varphi\psi)^x,$$

und ist $\chi = \chi_x^s$ irgend eine Covariante von f, dann existirt eine Relation der Form:

$$\varphi_x^{\mu-x-\lambda_1} \psi_x^{\nu-x-\lambda_2} (\varphi\psi)^x \chi_x^{s-\lambda_1-\lambda_2} (\varphi\chi)^{\lambda_1} (\psi\chi)^{\lambda_2} = (\vartheta\chi)^{\lambda_1+\lambda_2} + (\vartheta_1\chi)^{\lambda_1+\lambda_2-1} + (\vartheta_2\chi)^{\lambda_1+\lambda_2-2} \ldots .$$

Die in derselben auftretenden Formen ϑ enthalten nur die Symbole φ und ψ und haben die Grade: $\mu+\nu-2x$, $\mu+\nu-2x-2$, $\mu+\nu-2x-4$, ...; sie sind daher:

$$\vartheta_i = c_i (\varphi\psi)^{x+i},$$

so dass man hat:

$$\text{(VIII.)} \quad \begin{cases} \varphi_x^{\mu-x-\lambda_1} \psi_x^{\nu-x-\lambda_2} (\varphi\psi)^x \chi_x^{s-\lambda_1-\lambda_2} (\varphi\chi)^{\lambda_1} (\psi\chi)^{\lambda_2} \\ = ((\varphi\psi)^x, \chi)^{\lambda_1+\lambda_2} + c_1 ((\varphi\psi)^{x+1}, \chi)^{\lambda_1+\lambda_2-1} + c_2 ((\varphi\psi)^{x+2}, \chi)^{\lambda_1+\lambda_2-2} \ldots , \end{cases}$$

worin die c numerische Constanten bedeuten. —

Ersetzt man in Gleichung (IV.) die Form φ durch f, so erhält man die Gleichung:

$$\text{(IX.)} \qquad \Phi = (\vartheta f)^x + (\vartheta_1 f)^{x-1} + (\vartheta_2 f)^{x-2} \ldots ,$$

worin Φ eine Form bedeutet, die aus der Form ϑ durch die x^{te} Combination mit f entseht. Ist ϑ ein symbolisches Product $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist Φ ein symbolisches Product der m^{ten} Ordnung. Man sieht aus dieser Formel, *dass alle symbolischen Producte m^{ter} Ordnung und daher auch alle Formen dieser Ordnung lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von Formen sind, die mittelst Uebereinanderschiebung von Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit f gebildet sind.*

Die Formen zweiter Ordnung sind daher lineare Combinationen von Formen S_2, die durch Uebereinanderschiebung von f mit sich selbst gebildet sind. Die Formen dritter Ordnung sind lineare Combinationen von Formen S_3, die mittelst Uebereinanderschiebung von den Formen S_2 mit f gebildet sind u. s. w., so dass die Richtigkeit des am Ende des §. 1 behaupteten Satzes erhellt: *Jede Form von f ist eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von Formen, die durch wiederholte Uebereinanderschiebung aus f entstanden sind.*

§. 3.

Bildung der Formen durch Uebereinanderschiebung.

Ich gehe nun dazu über, die durch Uebereinanderschiebung entstehenden Formen zu bilden, und beginne mit den Formen zweiter Ordnung; dieselben ordne ich folgendermassen: $(ff)^0$, $(ff)^1$, $(ff)^2$, ... $(ff)^n$ und bezeichne sie in *dieser Reihenfolge* durch: k_{21}, k_{22}, k_{23}, ...

Die Formen dritter Ordnung ordne ich in ähnlicher Weise:

$$\begin{array}{ccccc} (k_{21}f)^0 & (k_{22}f)^0 & (k_{23}f)^0 & (k_{24}f)^0 & \dots \\ (k_{21}f)^1 & (k_{22}f)^1 & (k_{23}f)^1 & (k_{24}f)^1 & \dots \\ (k_{21}f)^2 & (k_{22}f)^2 & (k_{23}f)^2 & (k_{24}f)^2 & \dots \\ (k_{21}f)^3 & (k_{22}f)^3 & (k_{23}f)^3 & (k_{24}f)^3 & \dots \end{array}$$

und bezeichne sie in dieser Reihenfolge durch k_{31}, k_{32}, k_{33}, ...; in derselben Ordnung bilde ich Formen vierter, fünfter, sechster, ... Ordnung. Die in dieser Anordnung vor einer Form $k_{i\varkappa}$ stehenden Formen will ich ihre *früheren Formen* nennen und alle diejenigen Formen k weglassen, welche lineare Combinationen mit numerischen Coefficienten früherer Formen k sind. Die übrig bleibenden Formen bezeichne ich in der obigen Reihenfolge durch T, sie haben folgende Eigenschaften:

I. Es existirt zwischen ihnen keine lineare Relation mit numerischen Coefficienten.

II. Jede Covariante und Invariante J von f kann (aber nur auf eine Weise) in die Form gebracht werden:

$$\text{(X.)} \quad J = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3 \dots,$$

worin die c numerisch sind. In dieser Formel werde ich die Glieder so ordnen, dass T_2 eine frühere Form als T_1, T_3 eine frühere Form als T_2, ... ist.

Es seien $(Tf)^\varkappa$ und $(T'f)^\varkappa$ zwei Formen T von derselben Ordnung; ist dann $\varkappa > \varkappa'$, so ist $(Tf)^{\varkappa'}$ eine frühere Form als $(Tf)^\varkappa$; das Nämliche findet statt, wenn $\varkappa' = \varkappa$ ist und T' eine frühere Form als T ist.

Ist eine Form P keine Form T, so ist die Form $(Pf)^{x}$ ebenfalls keine Form T, und umgekehrt: ist eine Form $(Pf)^{x}$ eine Form T, so ist es auch die Form P.

Nach §. 2. kann jede Form Φ, welche das Symbol φ und den Factor $\varphi_x^{\nu-x}$ enthält, in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\Phi = \Sigma_s (\vartheta_s, \varphi)^{x-s}.$$

Ersetzt man hierin nach Formel (X.) die Formen ϑ durch ihre Ausdrücke in den T, so erhält man für Φ einen Ausdruck der Form: $\Phi = \Sigma_{st} c_t (T_{st}, \varphi)^{x-s}$, worin die c numerisch sind.

Hat Φ den Factor a_x^{n-x}, so ist es eine lineare Function der Form $\Phi = \Sigma c (T, f)^{x-s}$, wobei die c numerisch sind und $s \geqq 0$ ist. —

Die Formen T zweiter Ordnung von f sind, da $(ff)^{x}$ für ein ungrades x verschwindet, die Formen:

$$(ff)^0, \quad (ff)^2, \quad (ff)^4, \quad \ldots$$

oder in symbolischer Form:

$$a_x^n b_x^n, \quad a_x^{n-2} b_x^{n-2} (ab)^2, \quad a_x^{n-4} b_x^{n-4} (ab)^4, \quad \ldots .$$

Ist die Zahl n durch 4 theilbar, dann ist die Form $a_x^{\frac{1}{2}n} b_x^{\frac{1}{2}n} (ab)^{\frac{1}{2}n}$ vom Grade n, sonst giebt es keine Form zweiter Ordnung vom Grade n. — Diejenigen Formen zweiter Ordnung, deren Grad kleiner oder gleich n ist, will ich nun durch: χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, ... bezeichnen und diese Formen so anordnen, dass der Grad von χ_1 grösser ist als der Grad von χ_2, dass der Grad von χ_2 grösser ist als der Grad von χ_3, und so fort. Im Falle, wo n durch 4 theilbar ist, hat dann χ_1 den Grad n, χ_2 den Grad $n-4$ ..., endlich $\chi_{\frac{1}{4}n+1}$ den Grad 0; in dem Falle, wo n nicht durch 4 theilbar ist, ist der Grad einer jeden Form χ kleiner als n.

Jede eines der Symbole χ enthaltende Form sowie jede Summe solcher Formen werde ich von jetzt an durch P_χ bezeichnen. —

Ist φ irgend eine Form und $x \geqq \frac{1}{2}n$, so ist die Form:

$$P = a_x^{n-r-x} b_x^{n-s-x} \varphi_x^{\mu-r-s} (ab)^x (a\varphi)^r (b\varphi)^s$$

eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von den Formen:

$$(\chi_1, \varphi)^{\alpha_1}, \quad (\chi_2, \varphi)^{\alpha_2}, \quad \ldots .$$

Denn da die Form P aus der Form $(ff)^x = a_x^{n-x} b_x^{n-x} (ab)^x$ mittelst der $(r+s)^{\text{ten}}$ Combination mit φ entsteht, so existirt eine Gleichung der Form (s. §. 2, F. (VIII.)):

$$\text{(XI.)} \qquad P = \{(ff)^x, \varphi\}^{r+s} + c_1 \{(ff)^{x+1}, \varphi\}^{r+s-1} + c_2 \{(ff)^{x+2}, \varphi\}^{r+s-2} \ldots,$$

wo die c numerisch sind; da nun die Formen $(ff)^{x+s}$ (da $x \geqq \frac{1}{2}n$) entweder den Werth Null haben oder Formen χ sind, so ist die Behauptung erwiesen.

§. 4.

Eigenschaften der Formen T.

Jedes symbolische Product P, dessen Grad grösser als n ist, und welches die Factoren hat:

erstens: Das symbolische Product $b_x c_x d_x e_x \ldots$,

zweitens: b_x^r, wobei $r > \frac{1}{2}n$ ist,

sowie jedes Aggregat solcher Formen nenne ich eine Form W:

$$\text{(XII.)} \qquad W = W_x^\mu = b_x^r c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2} \ldots (bc)(bd)(cd) \ldots = b_x^r c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2} e_x^{\alpha_3} \ldots S.$$

Die Formen T der zweiten Ordnung sind dann entweder Formen W oder Formen χ. — —

Setzt man (§. 3. Formel (X.)):

$$\text{(XIII.)} \qquad W = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3 \ldots,$$

so ist die Form $(T_1 f)^x$ *entweder keine Form* T *oder eine lineare Function (mit numerischen Coefficienten) von früheren Formen* T *und Formen* W.

Beweis.

Bezeichne ich eine solche lineare Function früherer Formen als $(T_1 f)^x$ durch $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$; allgemein Q, so will ich nachweisen, dass $(T_1 f)^x$ unter der Voraussetzung, dass es eine Form T ist, auch eine Form $Q + W$ ist. Aus der Formel (XIII.) ergiebt sich die Identität:

$$(Wf)^x = c_1 (T_1 f)^x + c_2 (T_2 f)^x + c_3 (T_3 f)^x \ldots,$$

welche, da die Formen $(T_2 f)^x$, $(T_3 f)^x$, $(T_4 f)^x$ frühere Formen als $(T_1 f)^x$ sind, mithin ihre Summe eine Form Q ist, in der folgenden Weise geschrieben werden kann:

$$\text{(XIV.)} \qquad (Wf)^x = c_1 (T_1 f)^x + Q_1.$$

Ich unterscheide nun drei Fälle, je nachdem:

erstens: $x > \mu - r$,

zweitens: $\mu - r \geqq x > n - r$,

drittens: $x \leqq n - r$,

und will in den ersten beiden Fällen zeigen, dass $(T_1 f)^x$ keine Form T ist, im letzten, dass $(T_1 f)^x$ eine Form $Q + W$ ist.

Erster Fall:

$$x > \mu - r.$$

Die Form

$$R = a_x^{n-x} b_x^{\mu-x} (ba)^{x-\mu-r} (ca)^{\alpha_1} (da)^{\alpha_2} \ldots S$$

entsteht aus W durch die x^{te} Combination mit f, mithin existirt eine Identität

der Form (§. 3):

$$(Wf)^{\varkappa}-R = b_1(T'f)^{\varkappa-1}+b_2(T''f)^{\varkappa-2}\dots,$$

in welcher die Glieder der rechten Seite sämmtlich frühere Formen als (T_1f) sind. Man kann daher setzen:

$$(Wf)^{\varkappa}-R = Q_2$$

und hat dann nach Formel (XIV.):

$$R+Q_2 = c_1(T_1f)^{\varkappa}+Q_1.$$

Die Form R hat nun den Factor $b_x^{\mu-\varkappa} = b_x^{n-(n+\varkappa-\mu)}$, ist also nach §. 3 ein Aggregat von Formen $(Tf)^{n+\varkappa-\mu-s}$; da hier $n+\varkappa-\mu-s<\varkappa$ ist, so sind alle diese Formen frühere Formen als $(T_1f)^{\varkappa}$, ihre Summe R ist daher eine Form Q, etwa Q_3, so dass

$$Q_3+Q_2 = c_1(T_1f)^{\varkappa}+Q_1$$

ist, und mithin $(T_1f)^{\varkappa}$ keine Form T ist.

Zweiter Fall:

$$\mu-r \geqq \varkappa > n-r.$$

Hier untersuche ich die Form:

$$R = a_x^{n-\varkappa}b_x^r(ca)^{\alpha_1}(da)^{\alpha_2}\dots S;$$

sie entsteht aus W durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit f. Die Differenz $(Wf)^{\varkappa}-R$ ist (nach §. 3) daher eine Form Q, etwa Q_2, so dass nach Formel (XIV.)

$$c_1(T_1f)^{\varkappa}+Q_1-R = Q_2$$

ist. Die Form R hat nun aber den Factor b_x^r, sie ist daher ein Aggregat von Formen $(Tf)^{n-r-s}$, also, da n. V. $n-r<\varkappa$ ist, eine Form Q, etwa Q_3, so dass wieder $(T_1f)^{\varkappa}$ eine Summe von Formen Q, also keine Form T ist.

Dritter Fall:

$$\varkappa \leqq n-r, \quad \text{also (da } r>\tfrac{1}{2}n), \quad \varkappa<r.$$

Die Form

$$R = a_x^{n-\varkappa}b_x^{r-\varkappa}(ba)^k c_x^{\alpha_1}d_x^{\alpha_2}\dots S$$

entsteht aus W durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit f; die Differenz $(Wf)^{\varkappa}-R$ ist eine Form Q, etwa Q_2, so dass (Formel (XIV.))

$$c_1(T_1f)^{\varkappa} = R+Q_1+Q_2$$

ist. Die Form R ist nun aber eine Form W, etwa W', da ihr Grad

$$n-\varkappa+r-\varkappa+\mu-r = n+\mu-2\varkappa \geqq n+\mu-2(n-r) = \mu+2r-n > \mu > n$$

ist, und sie die Factoren besitzt:

$$a_x b_x c_x d_x\dots \quad \text{und} \quad a_x^{n-k} \quad (\text{wobei } n-\varkappa \geqq r > \tfrac{1}{2}n).$$

Man sieht daher, dass $(T_1f)^{\varkappa}$ in die Form $W+Q$ gebracht werden kann, und hat also den Satz:

Ist eine Form T durch Formen W und frühere Formen darstellbar, so hat jede Form $(Tf)^x$, welche eine Form T ist, ebenfalls diese Eigenschaft.

Hieran knüpft sich weiter der Satz:

Jede Form T, welche keins der Symbole χ enthält, ist durch eine Form W und frühere Formen ausdrückbar.

Ferner:

Jede Form T ist eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von Formen W und Formen, die eines der Symbole $\chi_1, \chi_2, \ldots$ enthalten; es ist:

$$T = W + P_\chi,$$

oder was dasselbe ist (vgl. Formel (X.)):

Jede Form J von f kann in die Form gebracht werden:

$$\text{(XV.)} \qquad J = W + P_\chi.$$

§. 5.

System der Formen ϑ.

Ich werde jetzt dazu übergehen, ein vollständig bestimmtes endliches System von Covarianten und Invarianten der Form f aufzustellen, durch welches sich alle zu f gehörigen Formen T ausdrücken lassen. Und zwar soll zuerst die Bildung des Systems angegeben werden; sodann soll bewiesen werden, dass das erhaltene System aus einer endlichen Anzahl von Formen besteht und endlich, dass alle Formen von f sich durch die Formen des Systems darstellen lassen. Das aufzustellende System ist übrigens nicht das kleinste, welches denkbar ist, vielmehr sind viele Formen des Systems noch als ganze Functionen anderer darstellbar, aber für die vorliegende Betrachtung genügt es nachzuweisen, dass überhaupt ein endliches System solcher Formen existirt. —

Es sei die Form:

$$f' = a_x'^{n-1} = b_x'^{n-1} \ldots$$

eine beliebige Form des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; man kann dann aus jedem symbolischen Producte, das die Symbole $a', b', \ldots$ enthält, ein analoges Product für die Form f dadurch herleiten, dass man erst die oberen Indices weglässt und dann mit dem Producte $a_x b_x c_x \ldots$ multiplicirt. Umgekehrt kann man aus jedem den Factor $a_x b_x c_x \ldots$ enthaltenden, symbolischen Producte von f ein symbolisches Product für die Form f' dadurch ableiten, dass man erstens diesen Factor weglässt und dann den Buchstaben a, b, c obere Indices anfügt.

Nenne ich nun die Formen V des zu f' gehörigen als bekannt vorausgesetzten Systems:

$$A_1', \quad A_2', \quad A_3', \quad \ldots,$$

so entsprechen diesen Formen in obiger Weise Covarianten von f, welche ich durch

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots$$

bezeichnen und specielle Formen von f nennen will. Da nach Annahme die Anzahl der A' endlich ist, so ist es auch die Anzahl der A; da ferner jede Covariante und Invariante der Form f' eine ganze Function mit numerischen Coefficienten der Formen A' ist, so ist auch jede den Factor $a_x b_x c_x \ldots$ enthaltende Form von f eine ganze Function mit numerischen Coefficienten der A. Hieraus folgt unmittelbar:

Die Formen W sind Functionen $F(A)$, und jede Covariante und Invariante J von f kann (nach §. 4 Formel (XV.)) in die Form gebracht werden:

$$\text{(XVI.)} \qquad J = F(A) + P_\chi.$$

Ich theile die Formen V, welche ich zu bilden im Begriff bin, ein in specielle Formen A und in Formen, welche den Formen $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ adjungirt sind. Hierbei nenne ich diejenigen Formen V der Form χ_i adjungirt, welche das Symbol χ_i enthalten, aber keines der Symbole $\chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \ldots$. Die Formen V will ich so anordnen, dass:

erstens: f und die speciellen Formen,

zweitens: χ_1 und die χ_1 adjungirten Formen,

drittens: χ_2 und die χ_2 adjungirten Formen

und so fort kommen. Die bei *dieser Anordnung* vor der Form χ_i stehenden Formen nenne ich die *vorstehenden* Formen von χ_i und bezeichne sie durch ϱ. — Die χ_i adjungirten Formen theile ich in folgende Classen:

I. eigentlich adjungirte Formen erster Art,

II. eigentlich adjungirte Formen zweiter Art,

III. Formen der ersten Gruppe von χ_1,

IV. uneigentlich adjungirte Formen;

doch der Art, dass, wie oben bemerkt wurde, ein und dieselbe Form in mehreren Classen erscheinen darf. — Jetzt will ich jede dieser Formengattungen für sich erklären.

I. Eigentlich adjungirte Formen erster Art.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Der Grad von χ_i ist n.

Dieser Fall tritt nur bei der Form χ_1 ein, und bei dieser Form auch nur dann, wenn die Zahl n durch 4 theilbar ist; ich nenne dann alle speciellen Formen und alle Formen zweiter Ordnung im System der Form χ_1, als Formen von f angesehen, χ_1 *eigentlich adjungirte Formen erster Art;* ihre Anzahl ist endlich.

Zweiter Fall. Der Grad von χ_i ist kleiner als n.

In diesem Falle nenne ich alle Formen V des Systems der Form χ_i, als Formen von f angesehen, χ_i *eigentlich adjungirte Formen erster Art.* Ihre Anzahl ist endlich, man kann durch sie alle Covarianten und Invarianten von χ_i darstellen als ganze Functionen mit numerischen Coefficienten.

II. Eigentlich adjungirte Formen zweiter Art.

Um zu denselben zu gelangen, gehe ich von den Formen erster Art und ihren Producten aus, ich will sie durch σ bezeichnen. Ist dann ϱ eine χ_i vorstehende Form, so bilde ich die Formen $(\varrho\sigma)^x$. Diejenigen unter denselben, für welche σ ein Product ist, das einen Factor (resp. ein Product mehrerer Factoren) von höherem Grade als χ_i enthält, lasse ich hierbei weg; die übrigbleibenden nenne ich χ_i *eigentlich adjungirte Formen zweiter Art.*

III. Formen der ersten Gruppe von χ_i.

Diejenigen χ_i eigentlich adjungirten Formen, deren Grad kleiner ist als der Grad von χ_i, bezeichne ich durch $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \ldots$, allgemein χ_{ix} und nenne sie Formen der ersten Gruppe von χ_i.

IV. Uneigentlich adjungirte Formen.

Die χ_i adjungirten Formen V, welche eines der Symbole $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \ldots$ enthalten, nenne ich χ_i *uneigentlich adjungirt.* — Diejenigen unter ihnen, welche das Symbol χ_{ix} enthalten, aber keines der Symbole $\chi_{i,x+1}, \chi_{i,x+2}, \ldots$ nenne ich χ_{ix} adjungirt. Es kann vorkommen, dass dieselbe Form V zu gleicher Zeit χ_i eigentlich und uneigentlich adjungirt ist, dann rechne ich sie doppelt. —

Was nun die Anordnung der zu χ_i adjungirten Formen betrifft, so mache ich darüber folgende Festsetzung:

erstens: die χ_i eigentlich adjungirten Formen, deren Grad grösser oder gleich dem Grad von χ_i ist; ich nenne sie $F(\chi_i)$,

zweitens: χ_{i1} und die χ_{i1} adjungirten Formen,

drittens: χ_{i2} und die χ_{i2} adjungirten Formen,

und so fort.

Die $\chi_{i\varkappa}$ vorstehenden Formen sind dann:

erstens: die χ_i vorstehenden Formen,

zweitens: χ_i und die $F(\chi_i)$,

drittens: $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \ldots \chi_{i,\varkappa-1}$ und die denselben adjungirten Formen. Alle $\chi_{i\varkappa}$ adjungirten Formen enthalten das Symbol $\chi_{i\varkappa}$, aber keines der Symbole $\chi_{i.\varkappa+1}, \chi_{i.\varkappa+2}, \ldots \chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \ldots$. Ich theile sie in derselben Weise ein, wie die χ_i adjungirten Formen; ihre Formen der ersten Gruppe bezeichne ich durch $\chi_{i,\varkappa,1}, \chi_{i.\varkappa,2}, \ldots$, allgemein $\chi_{i.\varkappa,\lambda}$, und nenne sie Formen der zweiten Gruppe von χ_i. In dieser Weise fahre ich fort und bilde mir von diesen Formen der zweiten Gruppe ihre Formen der ersten Gruppe, die ich durch $\chi_{i\varkappa\lambda,1}, \chi_{i\varkappa\lambda,2}, \ldots$ bezeichne und Formen der dritten Gruppe von χ_i nenne. Ebenso fortfahrend gelange ich nach und nach zu Formen der vierten, fünften, ... Gruppe von Formen von stets niederen Graden. Alle diese Covarianten $\chi_{i\varkappa\lambda\ldots}$ bezeichne ich nun durch $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$, so dass man also jetzt die Formen V in folgende Classen theilen kann:

erstens: f und die Formen A,

zweitens: ψ_1 und die ψ_1 eigentlich adjungirten Formen,

drittens: ψ_2 und die ψ_2 eigentlich adjungirten Formen,

und so weiter. Hierbei sind alle diejenigen Formen V zu ψ_i eigentlich adjungirt, welche das Symbol ψ_i enthalten, aber keines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$; und die ψ_i vorstehenden Formen die folgenden:

erstens: f und die Formen A,

zweitens: die Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{i-1}$ mit den ihnen eigentlich adjungirten Formen.

Sämmtliche Formen V lassen sich in Bezug auf ψ_i folgendermassen eintheilen:

erstens: die ψ_i vorstehenden Formen, die ich durch ϱ bezeichne;

zweitens: die ψ_i eigentlich adjungirten Formen $F(\psi_i)$, deren Grad grösser oder gleich dem von ψ_i ist;

drittens: die Formen der ersten Gruppe von ψ_i; sie gehören unter die Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$;

viertens: die eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$ enthaltenden Formen.

§. 6.

Endlichkeit des Systems der V.

Nachdem auf diese Weise die Bildung der Formen V und ihre Anordnung festgestellt ist, werde ich beweisen, dass die Zahl derselben eine endliche ist. —

Dass die Zahl der speciellen Formen und der einer Form ψ_i eigentlich adjungirten Formen erster Art endlich ist, folgt von selbst aus dem Umstande, dass alle Formen ψ mit Ausnahme von ψ_1 in dem Falle, wo die Zahl n durch 4 theilbar ist, von niederem als dem n^{ten} Grade sind. Diese ψ_i eigentlich adjungirten Formen erster Art seien $C_1, C_2, C_3, \ldots$; es ist dann auch die Zahl derjenigen ihrer Producte R, deren Grad kleiner ist als eine gegebene Zahl p, eine endliche. — Bezeichnet man nämlich die Grade der Formen C_1, $C_2, C_3, \ldots$ durch $g_1, g_2, g_3, \ldots$, so hat der Grad μ des Productes R die Form:

$$\mu = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots, \quad \text{falls} \quad R = C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} C_3^{\alpha_3} \ldots.$$

Um nun die Producte R zu erhalten, deren Grad kleiner als p ist, muss man für die α alle ganzzahligen Werthsysteme setzen, die der Ungleichheit genügen: $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + < p$. Die Anzahl dieser Werthsysteme ist kleiner als:

$$\left(\frac{p}{g_1}+1\right)\left(\frac{p}{g_2}+1\right)\left(\frac{p}{g_3}+1\right)\cdots,$$

also endlich. —

Hieraus folgt zugleich, dass die Anzahl derjenigen Producte R der C, deren sämmtliche Faktoren einen Grad haben, welcher kleiner ist, als eine gegebene Zahl μ, endlich bleibt, denn ihr Grad ist kleiner als 2μ. —

Ist ferner σ eine Form C oder ein (eben beschriebenes) Product der C, dessen Faktoren kleiner sind als der Grad einer Form ϱ, so ist die Anzahl der Formen $(\varrho\sigma)^x$ endlich.

Ist also die Anzahl der ψ_i vorstehenden Formen ϱ endlich, so ist es auch die Anzahl der ψ_i eigentlich adjungirten Formen zweiter Art $(\varrho\sigma)^x$, mithin die Anzahl aller ψ_i eigentlich adjungirten Formen sowie die Zahl der unter ihnen vorkommenden Formen der ersten Gruppe von ψ_i; ich nenne dieselbe $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \ldots$. Nun sieht man leicht folgenden Satz ein:

Ist die Anzahl der einer Form ψ_i vorstehenden Formen ϱ endlich, so ist auch die Anzahl aller ψ_i adjungirten Formen (sowohl der eigentlich wie der uneigentlich adjungirten) eine endliche.

In der That, ist der Grad von ψ_i gleich 0, so besitzt ψ_i keine adjungirten Formen; der Satz ist also richtig. Somit kann ich die Annahme machen, der Satz sei für alle Formen erwiesen, deren Grad kleiner ist als der von ψ_i. Die ψ_i adjungirten Formen sind nun entweder Formen $F(\psi_i)$ (vgl. Ende des §. 5), oder $\psi_{i\varkappa}$, oder einer dieser Formen $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3} \dots$ adjungirt. Die Anzahl der Formen $F(\psi_i)$ und $\psi_{i\varkappa}$ ist aber, wie wir oben gesehen haben, endlich; ferner ist, da die Grade der Formen $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \dots$ kleiner als der Grad von ψ_i sind, die Anzahl der einer Form $\psi_{i\varkappa}$ adjungirten Formen nach Annahme endlich, folglich ist auch die Anzahl der ψ_i adjungirten Formen endlich.

Dieser Satz gilt auch für die Formen χ_i, da dieselben unter den Formen ψ_i vorkommen. Hieraus folgt nun weiter:

Die Anzahl der einer Form χ_i vorstehenden Formen ist endlich.

Die Form f nämlich und die Formen A sind die χ_1 vorstehenden Formen, ihre Anzahl ist endlich. Ich nehme also den Satz für die Formen $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots \chi_{i-1}$ als erwiesen an; da alsdann die Anzahl der χ_{i-1} vorstehenden Formen endlich ist, so ist es auch die der χ_{i-1} adjungirten Formen, mithin sämmtlicher χ_i vorstehenden Formen.

Zugleich sieht man, dass die Anzahl der einer Form χ_i adjungirten Formen endlich ist.

Die Formen V sind nun entweder specielle Formen A, oder einer der Formen $\chi_1, \chi_2, \dots$ adjungirt, ihre Anzahl ist also endlich. Unter ihnen kommen die Formen $\psi_1, \psi_2, \dots$ vor; ihre Anzahl ist daher ebenfalls endlich; ich bezeichne sie durch ν, so dass die Formen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\nu$ sämmtliche Formen ψ sind.

Bemerken wir dabei Folgendes:

Ist erstens ϱ eine der Form ψ_i vorstehende Form V, und ist der Grad der Form $(\varrho\psi_i)^\varkappa$ kleiner als der Grad von ψ_i, dann ist $(\varrho\psi_i)^\varkappa$ eine der Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$. Ist hingegen zweitens ϱ eine ψ_ν vorstehende Form, und ist der Grad der Form $(\varrho\psi_\nu)^\varkappa$ kleiner als der Grad von ψ_ν, dann ist $(\varrho\psi_\nu)^\varkappa = 0$.

§. 7.

Reduction einer gewissen Classe von Formen.

Ehe ich nun zum Beweise übergehe, dass *alle* Formen von f ganze Functionen mit numerischen Coefficienten der Formen V sind, will ich einige

hierbei nothwendige Hülfssätze ableiten; vorzüglich werde ich von einer gewissen Classe von Formen zeigen, dass sie die verlangte Eigenschaft besitzen. Ich wende mich zunächst zu dem Falle, wo die Zahl n durch 4 theilbar ist, wo es also eine Form: $\psi_1 = \chi_1 = a_x^{\frac{1}{2}n} b_x^{\frac{1}{2}n} (ab)^{\frac{1}{2}n} = \psi$ giebt, deren Grad n ist. (In allen übrigen Fällen sind die Grade der Formen ψ kleiner als n.)

Nenne ich nun jede eines der Symbole $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots$ enthaltende Form sowie jedes Aggregat solcher Formen eine Form R, so behaupte ich, *dass die Form* $K = (\psi f)^{\frac{1}{2}n} = a_x^{\frac{1}{2}n} \psi_x^{\frac{1}{2}n} (a\psi)^{\frac{1}{2}n}$ *eine Form R sei.*

Beweis.

Die Formen:

$$Q_1 = a_x^{\frac{1}{2}n-1} b_x c_x^{\frac{1}{2}n} (ac)(bc)^{\frac{1}{2}n-1} (ab)^{\frac{1}{2}n},$$
$$Q_2 = a_x^{\frac{1}{2}n-2} b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n} (ac)^2 (bc)^{\frac{1}{2}n-2} (ab)^{\frac{1}{2}n}$$

entstehen aus der Form ψ mittelst der $\frac{1}{2}n^{\text{ten}}$ Combination mit f; es existiren daher zwei Relationen der Form (§. 3 Formel (11.))

$$K - Q_1 = \sum_1^{\frac{1}{2}n}{}_i\, c_i (\chi_i, f)^{\frac{1}{2}n-2i},$$
$$K - Q_2 = \sum_1^{\frac{1}{2}n}{}_i\, d_i (\chi_i, f)^{\frac{1}{2}n-2i}.$$

Die rechten Seiten dieser Identitäten sind Formen R, ich nenne sie R_1 und R_2, es ist dann:

$$(1.) \quad \begin{cases} K = Q_1 + R_1, \\ K = Q_2 + R_2. \end{cases}$$

Um mir eine weitere Relation zu bilden, gehe ich von der Identität aus:

$$\begin{aligned} 2Q_1 &= a_x^{\frac{1}{2}n-1} b_x c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)\, (bc)^{\frac{1}{2}n-1} (ab)^{\frac{1}{2}n-1} \{c_x (ab) + a_x (bc)\} \\ &= a_x^{\frac{1}{2}n-1} b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)^2 (bc)^{\frac{1}{2}n-1} (ab)^{\frac{1}{2}n-1}; \end{aligned}$$

mithin ist:

$$\begin{aligned} 4Q_1 &= a_x^2 b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)^2 (bc)^2 (ab)^{\frac{1}{2}n-1} \{a_x^{\frac{1}{2}n-3} (bc)^{\frac{1}{2}n-3} - b_x^{\frac{1}{2}n-3} (ac)^{\frac{1}{2}n-3}\} \\ &= -a_x^2 b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)^2 (bc)^2 (ab)^{\frac{1}{2}n-1} \{\{a_x (bc) + c_x (ab)\}^{\frac{1}{2}n-3} - a_x^{\frac{1}{2}n-3} (bc)^{\frac{1}{2}n-3}\} \\ &= -\sum_1^{\frac{1}{2}n-3}{}_i \binom{\frac{1}{2}n-3}{i} a_x^{\frac{1}{2}n-i-1} b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1+i} (bc)^{\frac{1}{2}n-i-1} (ca)^2 (ab)^{\frac{1}{2}n-1+i}. \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite hat den Werth $(\frac{1}{2}n-3)Q_2$; die übrigen Glieder enthalten den Factor $(bc)^{\frac{1}{2}n+1}$ und sind also nach §. 3 Formel (XI.) Formen R. Wir wollen ihre Summe durch R_3 bezeichnen; es ist dann:

$$4Q_1 = (\tfrac{1}{2}n-3)\, Q_2 + R_3$$

und nach den Formeln (1.):

$$4(K-R_1) = (\tfrac{1}{2}n-3)(K-R_2) + R_3$$

und daher:

$$K = \frac{\frac{1}{2}n-3}{\frac{1}{2}n+1}R_2 - \frac{4}{\frac{1}{2}n+1}R_1 - \frac{R_3}{\frac{1}{2}n+1},$$

eine Form R.

Die Form $D = b_x^{\frac{1}{2}n}\psi_x^{\frac{1}{2}n}(ab)^{\frac{1}{2}n}(a\psi)^{\frac{1}{2}n}$ entsteht nun aus den beiden Formen: $K = a_x^{\frac{1}{2}n}b_x^{\frac{1}{2}n}(ab)^{\frac{1}{2}n}$ und $\psi = a_x^{\frac{1}{2}n}b_x^{\frac{1}{2}n}(ab)^{\frac{1}{2}n}$ durch die $\frac{1}{2}n^{\text{te}}$ Combination mit den Formen f und ψ, sie genügt also den Relationen:

$$D-(K,f)^{\frac{1}{2}n} = c_1((f\psi)^{\frac{1}{2}n+1},f)^{\frac{1}{2}n-1}+c_2((f\psi)^{\frac{1}{2}n+2},f)^{\frac{1}{2}n-2}\ldots \qquad (\text{§. 2 Formel (VIII.)}),$$

$$D-(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}n} = d_1(\chi_2,\psi)^{\frac{1}{2}n-2}+d_2(\chi_3,\psi)^{\frac{1}{2}n-4}+d_3(\chi_4,\psi)^{\frac{1}{2}n-6}\ldots \qquad (\text{§. 3 Formel (XI.)}),$$

worin die c und d numerisch sind. Da die Formen $(f,\psi)^{\frac{1}{2}n+1}$ von niederem Grade als ψ sind, so sind es Formen der ersten Gruppe von ψ_1, gehören also zu den Formen $\psi_2, \psi_3, \ldots$. Hieraus folgt, dass die Glieder der rechten Seite in beiden Relationen Formen R sind; da das Nämliche für die Form $(Kf)^{\frac{1}{2}n}$ gilt, *so ist auch* $(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}n}$, *das wir symbolisch durch* r_x^n *bezeichnen, eine Form R (sowie jede das Symbol* r_1 *enthaltende Form)* (vgl. §. 2).

Hieran knüpfen sich folgende Schlüsse:

Die Formen zweiter Ordnung im System der Form ψ, deren Grad n nicht übersteigt, bezeichne ich durch: $r_1, r_2, r_3, \ldots$; sie sind nach §. 5 ψ eigentlich adjungirt. Da der Grad der Formen $r_2, r_3, r_4, \ldots$ kleiner als der von ψ ist, so gehören sie der ersten Gruppe von ψ_1 an, gehören also zu den Formen $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots$. Man sieht hieraus, dass jede Form, die eines der Symbole $r_2, r_3, \ldots$ enthält, eine Form R ist; das Nämliche gilt für die das Symbol r_1 enthaltenden Formen, wie oben gezeigt wurde, *so dass jede Form, die eines der Symbole r enthält, eine Form R ist.*

Dem Satze, dass jede Form J von f (nach §. 5 Formel (XVI.)) in die Form $J = F(A)+P_\chi$ gebracht werden kann, entspricht nun im System der Form ψ der Satz:

Jede Covariante und Invariante ϑ *von* ψ *kann die Form annehmen:* $\vartheta = F(K)+P_r$, *wobei die K die speciellen Formen von* ψ, *also* ψ *eigentlich adjungirte Formen erster Art bedeuten.*

P_r ist hier ein Aggregat von Formen, die die Symbole r enthalten, also eine Form R. Bezeichnet man endlich die $\chi_1 = \psi_1$ eigentlich adjungirten Formen und ihre Producte durch $H_1, H_2, \ldots$, so erhält man die Relation:

$$(\text{XVII.}) \qquad \vartheta = \Sigma_i c_i H_i + R,$$

in der die c numerisch sind. — —

Ist ϑ irgend eine Covariante oder Invariante von ψ_1, ϱ eine ψ_1 vorstehende Form V, so ist die Form $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ gleich einem Ausdrucke:

$$\text{(XVIII.)} \qquad (\vartheta\varrho)^\varkappa = F(V)+R,$$

worin $F(V)$ wieder eine ganze Function der V mit numerischen Coefficienten bedeutet.

Um dies zu beweisen, gehe ich von dem Ausdrucke aus $(\vartheta,\varrho)^0 = \vartheta.\varrho$. Nach vorigem Satze ist $\vartheta.\varrho = \Sigma c_i H_i \varrho + \varrho R$, was die verlangte Form hat. Ich darf daher die Annahme machen, dass der Satz für alle Formen: $(\vartheta\varrho)^0$, $(\vartheta\varrho)^1$, $(\vartheta\varrho)^2$, ... $(\vartheta\varrho)^{\varkappa-1}$ bewiesen sei, und will ihn vorerst für eine Form $(H\varrho)^\varkappa$ erweisen, worin H eine ψ_1 eigentlich adjungirte Form erster Art oder ein Product solcher Formen bedeutet.

Im ersteren Falle, sowie in dem Falle, wo H ein Product ist, dessen Factoren von niederem Grade als ϱ sind, ist $(H\varrho)^\varkappa$ eine ψ_1 eigentlich adjungirte Form zweiter Art, also eine Form V. Ist hingegen $H = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\dots$ gleich einem Producte von Formen, dessen einer Factor, etwa φ_1, einen Grad hat, der nicht kleiner ist als der Grad von ϱ, dann findet eine Identität statt (§. 2 Formel (VI.)):

$$(H\varrho)^\varkappa - (\varphi_1\varrho)^\varkappa\varphi_2\varphi_3\dots = (\vartheta_1\varrho)^{\varkappa-1} + (\vartheta_2\varrho)^{\varkappa-2}\dots.$$

Die Form $(\varphi_1\varrho)^\varkappa$ ist, wie oben gezeigt wurde, falls φ_1 eine Form V oder ein Product σ ist, eine Form V; ist hingegen $\varphi_1 = \varphi_{11}\varphi_{12}\varphi_{13}\dots$ ein Product von Formen, dessen einer Factor, etwa φ_{11}, einen Grad hat, der nicht kleiner als der Grad von ϱ ist, dann ersetze ich in unserer Relation φ_1 durch φ_{11} und mache dann dieselben Betrachtungen. Die Glieder auf der rechten Seite haben nach Annahme die behauptete Form, mithin kann auch $(H\varrho)^\varkappa$ in die Form gebracht werden: $F(V)+R$.

Um nun $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ zu untersuchen, gehe ich von der Formel (XVII.) aus, welche lautet: $\vartheta = \Sigma cH + R$. Aus ihr geht die Relation hervor:

$$(\vartheta\varrho)^\varkappa = \Sigma c(H\varrho)^\varkappa + (R\varrho)^\varkappa,$$

in welcher die Glieder $(H\varrho)^\varkappa$ die Form $F(V)+R$ annehmen können und $(R\varrho)^\varkappa$ eine Form R ist. Somit ist unsere Behauptung bewiesen. Hat also ein symbolisches Product Φ die Eigenschaft, ausser den Symbolen ψ_1 nur *ein* Symbol ϱ zu besitzen, so ist es nach §. 2 Formel (IV.) ein Aggregat von Formen $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ und kann daher die Form annehmen:

$$\text{(XIX.)} \qquad \Phi = F(V)+R.$$

Viel einfacher gestaltet sich die Untersuchung für die Formen ψ_i, deren Grad kleiner als n ist. In dem Falle, wo die Zahl n durch 4 theilbar ist, sind

dies die Formen $\psi_2, \psi_3, \ldots$; sonst alle Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Die Formen V im System einer solchen Form ψ_i sind, als Formen von f aufgefasst, die zu ψ_i eigentlich adjungirten Formen erster Art; ich bezeichne wieder diese Formen und ihre Producte durch H, so dass jede Covariante und Invariante von ψ_i in die Form ΣcH gebracht werden kann, wo die c numerisch sind.

Bezeichne ich nun wieder jede Form, die eines der Symbole ψ_{i+1}, $\psi_{i+2}, \ldots$ enthält, sowie jedes Aggregat solcher Formen durch R und die ψ_i vorstehenden Formen durch ϱ, so kann jede Form $(\vartheta\varrho)^x$ in die Form $F(V)+R$ gebracht werden. Der Beweis kann in derselben Weise wie oben geführt werden. Hat also ein symbolisches Product Φ die Eigenschaft, ausser den Symbolen ψ_i nur ein Symbol ϱ zu besitzen, so kann es die Form annehmen:

$$(\mathrm{XX}^a.)\qquad \Phi = F(V)+R.$$

Für ψ_ν hat jede Form R den Werth Null; es ist dann also:

$$(\mathrm{XX}^b.)\qquad \Phi = F(V).$$

Man sieht nun leicht den Satz ein:

Jede Covariante und Invariante der Form $(V\psi_i)^x$ kann die Form annehmen:

$$(\mathrm{XXI}^a.)\qquad (V\psi_i)^x = F(V)+R.$$

Zum Beweise unterscheide ich drei Fälle (vgl. Ende des §. 5):

erstens: V enthält nur die Symbole ψ_i.

Hier hat $(V\psi_i)^x$ ebenfalls nur die Symbole ψ_i, ist also eine Covariante oder Invariante von ψ_i, hat also, wie oben gezeigt wurde, die Form $F(V)+R$.

zweitens: V ist eine Form ϱ oder ψ_i eigentlich adjungirt der zweiten Art.

Es enthält dann $(V\psi_i)^x$ ausser den Symbolen ψ_i nur ein Symbol ϱ, hat also nach den Formeln (XIX.) und (XX.) die gesuchte Form.

drittens: V enthält eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2} \ldots$

In diesem Falle enthält $(V\psi_i)^x$ dieses Symbol ebenfalls, ist also eine Form R.

Für ψ_ν geht unser Satz in die Form über:

$$(\mathrm{XXI}^b.)\qquad (V\psi_\nu)^x = F(V).$$

§. 8.

Beweis, dass jede Covariante und Invariante von f eine ganze Function $F(V)$ der Formen V mit numerischen Coefficienten sei.

Der zu beweisende Satz gilt für die Formen erster und zweiter Ordnung; ich kann mithin die Annahme machen, dass er für Formen dritter,

vierter, fünfter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gelte, und will ihn dann für die Form Φ der m^{ten} Ordnung erweisen. Zu dem Ende will ich einige Hülfssätze aufstellen, aus denen leicht das gesuchte Resultat folgen wird. Ist die Form $H=\varphi_1\varphi_2\dots$ ein Product von Formen V, und $(H\psi_i)^\varkappa$ eine Form m^{ter} Ordnung, so existirt eine Gleichung der Form:

$$\text{(XXII.)} \qquad (H\psi_i)^\varkappa = F(V)+R,$$

wo R eine Form, die eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$ enthält, oder ein Aggregat solcher Formen bedeutet.

Beweis.

Die Form $(H\psi_i)^0=H\psi_i$ ist eine Function $F(V)$, mithin kann ich die Annahme machen, der Satz gelte für die Formen: $(H\psi_i)^1, (H\psi_i)^2, \dots (H\psi_i)^{\varkappa-1}$; er gilt dann auch für alle Formen $(\vartheta\psi_i)^0$, $(\vartheta\psi_i)^1, \dots (\vartheta\psi_i)^{\varkappa-1}$ von der m^{ten} Ordnung, da in denselben die Formen ϑ von niederer als der m^{ten} Ordnung sind und daher nach unserer früheren Annahme ganze Functionen $F(V)=\Sigma cH$ sind. — Ich unterscheide nun vier Fälle (vgl. Ende des §. 5):

erstens: Der Grad von φ_1 ist grösser oder gleich $\varkappa$.

Nach §. 2 Formel (VI.) gilt hier die Identität:

$$(H\psi)^\varkappa-(\varphi_1\psi_i)^\varkappa\varphi_2\varphi_3\dots = \Sigma(\vartheta_s,\psi_i)^{\varkappa-s}.$$

Die Glieder der rechten Seite haben nach Annahme die Form $F(V)+R$; die Form $(\varphi_1\psi_i)^\varkappa$ jedoch nach den Formeln (XXI.).

zweitens: φ_1 ist eine Form ϱ, deren Grad μ kleiner als $\varkappa$, also auch kleiner ist als der Grad von ψ_i.

Nach §. 2 Formel (VII.) ist dann:

$$(H\psi)^\varkappa-((\varphi_1\psi_i)^\mu,\varphi_2\varphi_3\dots)^{\varkappa-\mu} = \Sigma(\vartheta_s,\psi_i)^{\varkappa-s}.$$

Die Glieder der rechten Seite haben nach Annahme die Form $F(V)+R$; die Form $(\varphi_1\psi_i)^\mu=(\varrho\psi_i)^\mu$ ist von niederem Grade als ψ_i, also eine der Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$ der ersten Gruppe von ψ_i, daher ist $((\varphi_1\psi_i)^\varkappa, \varphi_2\varphi_3\dots)$ eine Form R und der Satz gültig.

drittens: φ_1 ist eine Form der ersten Gruppe von ψ_i.

Es ist dann φ_1 eine der Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$, also $(H\psi_i)^\varkappa$ eine Form R.

viertens: φ_1 enthält eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$.

Es ist dann $(H\psi_i)^\varkappa$ eine Form R. —

Man erkennt sofort, dass jede Form m^{ter} Ordnung $(\vartheta\psi_i)^\varkappa$, da sie ein Aggregat von Formen $(H\psi_i)^\varkappa$ ist, in die Form gebracht werden kann:

$$(\vartheta\psi_i)^\varkappa = F(V)+R,$$

und also auch jede Form Φ, die das Symbol ψ_i enthält, der Gleichung genügt:

$$\text{(XXIII.)} \qquad \Phi = F(V)+R,$$

da sie nach §. 2 Formel (IV.) eine Summe von Formen $(\vartheta\psi_i)^x$ ist. —

Da für ψ_ν kein R existirt, so sieht man, dass jede das Symbol ψ_ν enthaltende Form eine Function $F(V)$ ist; dasselbe gilt nach Formel (XXIII.) für die Formen, welche die Symbole $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-2}$, $\psi_{\nu-3}$, ... enthalten. Hierhin gehören auch die Formen P_χ. Somit ist überhaupt nachgewiesen, dass jede Covariante und Invariante J von f von der m^{ten} Ordnung, da sie nach §. 5 Formel (XVI.) der Identität: $\Phi = F(A)+P_\chi$ genügt, eine Function $F(V)$ ist.

§. 9.

Formen fünften Grades.

Indem ich nun zu der Bildung eines Systems von Grundformen für die Formen fünfter und sechster Ordnung übergehe, werde ich nicht den in der allgemeinen Betrachtung verfolgten Weg durchmachen, sondern ein System von Grundformen U aufstellen und zeigen, dass alle Formen T als ganze Functionen derselben mit numerischen Coefficienten ausdrückbar seien. Für $n=5$ besteht das System der Fundamentalformen U aus folgenden 23 Formen:

$f=a_x^5$; $\varphi=(ff)^2$; $i=(ff)^4$; $j=(fi)^2$; $\alpha=(ji)^2$; $p=(\varphi i)^2$; $\tau=(pi)^2$; $\gamma=(\tau\alpha)$; $(f\varphi)$; (fp); $(f\tau)$; $(j\tau)$; (fi); (φi); (ji); (pi); (τi); $(i\alpha)$; $(i\gamma)$; $(ii)^2$; $[i\alpha]^2$; $(i\tau)^2$; $(i\alpha)(i\gamma)$.

Aus den bekannten Fundamentalformen einer Form vierter Ordnung $f'=a_x'^4$ entstehen dadurch, dass man nach Weglassung der Indices mit dem Producte $a_x b_x c_x \ldots$ multiplicirt, die folgenden Covarianten von f:

$$f;\quad \varphi;\quad (f\varphi);\quad i;\quad a_x b_x c_x (ab)^2(ac)^2(bc)^2.$$

Die vier ersten dieser Formen sind Formen U, die letzte kann leicht in die Form j transformirt werden, ist also auch eine Form U; demnach ist jede den Factor $a_x b_x c_x \ldots$ habende Covariante von f eine Function $F(U)$, mithin auch jede Form W. Man kann daher jede Form J von f in der Gestalt schreiben (§. 4 Formel (XV.)):

$$J = F(U)+P_\chi,$$

oder da hier i die einzige Form χ ist,

$$\text{(XXIV.)} \qquad J \doteq F(U)+P_i.$$

Ich will nun beweisen, dass jede Form m^{ter} Ordnung J von f eine Function $F(U)$ ist, und mache dabei die Annahme, dass dieser Satz für die Formen

erster, zweiter, dritter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erwiesen sei. Zuerst werde ich ihn für einige specielle Formen J beweisen und dann erst den allgemeinen Beweis antreten. —

Betrachten wir zuerst diejenigen Formen m^{ter} Ordnung, welche durch Uebereinanderschiebung von i mit Formen $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entstanden sind. Ich beginne mit:

$$J = ((f\varphi), i).$$

Man hat dann, da die Form $i_x a_x^3 \varphi_x^5 (ai)(a\varphi)$ aus $(f\varphi)$ durch die erste Combination mit φ entsteht (§. 2 Formel (VIII.)):

$$J = i_x a_x^3 \varphi_x^5 (ai)(a\varphi) + ci(f\varphi)^2.$$

Wendet man auf diese Formel die Identität:

$$2i_x\varphi_x(ai)(a\varphi) = i_x^2(a\varphi)^2 + \varphi_x^2(ai)^2 - a_x^2(\varphi i)^2$$

an, so erhält man die Gleichung:

$$J = \tfrac{1}{2}(\varphi j - fp) + Ci(f\varphi)^2,$$

also ist J eine Function $F(U)$ nach Annahme. — In derselben Weise lassen sich die Formen $((fp), i)$, $((f\tau), i)$, $((j\tau), i)$, $((fi), i)$, $((\varphi i), i)$, $((ji), i)$, $((pi), i)$, $((\tau i), i)$ als ganze Functionen niederer Ordnung, also als Functionen $F(U)$ darstellen.

Die Formen $((i\alpha), i)$ und $((i\gamma), i)$ haben die Werthe $\frac{1}{2}\alpha(ii)^2$ und $\frac{1}{2}\gamma(ii)^2$, sind also Functionen $F(U)$, so dass wir den Satz haben:

Jede Form der m^{ten} Ordnung, welche die Gestalt (Ui) hat, ist eine Function $F(U)$.

Ist ferner $H = \varphi_1\varphi_2 \ldots$ ein Product von Formen U, so ist (§. 2 F. (VI.))

$$(Hi) = (\varphi_1 i)\varphi_2\varphi_3 \cdots + i\vartheta$$

eine Function $F(U)$ (da ϑ von der $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, also nach Annahme eine Function $F(U)$ ist). *Wenn also J eine erste Uebereinanderschiebung von i mit einer Form $(m-2)^{ter}$ Ordnung ist, so ist es durch die U ausdrückbar.*

Jetzt wende ich mich zu den Formen, die durch die zweite Uebereinanderschiebung von i mit einer Form $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entstehen, und beginne mit der Form:

$$((f\varphi), i)^2 = J.$$

Nach §. 2 Formel (VIII.) ist:

$$J = a_x^4 \varphi_x^3 (a\varphi)(\varphi i)^2 + \sum_1^2{}_s (\vartheta_s, i)^{2-s}$$

$$= (fp) + \sum_1^2{}_s (\vartheta_s, i)^{2-s}.$$

Da sowohl (fp) eine Form U ist, als auch, wie eben gezeigt wurde, jede Form (ϑ, i) eine ganze Function der U ist, so ist auch $((f\varphi), i)^2$ eine Function $F(U)$. Ebenso führt man den Beweis für die Formen: $((fp), i)^2$, $((f\tau), i)^2$, $((j\tau), i)^2$, $((fi), i)^2$, $((\varphi i), i)^2$, $((ji), i)^2$, $((pi), i)^2$. — Die Form $((\tau i), i)^2$ hat den Werth Null. *Jede Form also, welche durch die zweite Uebereinanderschiebung von i mit einer Form U entsteht, ist durch Formen niederer Ordnung, also auch durch Formen U ausdrückbar.*

Ich gehe nun zu der Betrachtung der Formen über, welche durch die zweite Uebereinanderschiebung von i mit einem Producte H von Formen U entstehen, und beginne mit denjenigen Formen, in denen H das Product zweier linearen Formen U ist.

Die Form: $J = ((i\alpha)\alpha, i)^2$, welche ich zuerst betrachten will, hat den Werth $(ii')(i\alpha)(i'\alpha) = 0$; ebenso die Form $((i\gamma)\gamma, i)^2$. In ähnlicher Weise erhält man unmittelbar für die Formen $(Hi)^2$, wenn H gleich $\alpha^2, \alpha\gamma, (i\alpha)\gamma, (i\alpha)(i\alpha)$, $(i\gamma)\alpha$, $(i\alpha)(i\gamma)$, $(i\gamma)(i\gamma)$ ist, die Werthe: $[i\alpha]^2$, $[i\alpha][i\gamma]$, $\frac{1}{2}(ii)^2(\alpha\gamma)$, $\frac{1}{2}(ii)^2[i\alpha]^2$, $\frac{1}{2}(ii)^2(\gamma\alpha)$, $\frac{1}{2}(ii)^2[i\alpha][i\gamma]$, $\frac{1}{2}(ii')^2[i\gamma]^2$, so dass in diesen Fällen $(Hi)^2$ eine Function von Formen U und niederer Ordnung ist, also nach Annahme eine Function $F(U)$. Um $[i\gamma]^2$ zu betrachten, gehe ich von der Gleichung aus:

$$\gamma^2 = (\tau\alpha)(\tau\alpha) = \tau_x \tau'_x (\tau\alpha)(\tau'\alpha)$$

und benutze die Identität:

$$2\tau_x \tau'_x (\tau\alpha)(\tau'\alpha) = \tau_x^2 (\tau'\alpha)^2 + \tau'^2_x (\tau\alpha)^2 - \alpha_x^2 (\tau\tau')^2;$$

ich erhalte dann die Formel:

$$\gamma^2 = \tau(\tau\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\tau\tau')^2, \quad \text{also} \quad [i\gamma]^2 = (i\tau)^2(\tau\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}(i\alpha)^2(\tau\tau')^2,$$

also ist $[i\gamma]^2$ ebenfalls eine Function $F(V)$, *so dass die Form $(Hi)^2$ stets dann eine Function $F(V)$ ist, wenn H das Product zweier linearen Formen V ist.* —

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Fall über, die Form $(Hi)^2$ zu untersuchen, wenn $H = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\dots$ irgend ein Product von Formen U ist. Hierbei unterscheide ich zwei Fälle, jenachdem ein Factor von H, etwa φ_1, eine nicht lineare Form U ist, oder alle Factoren von H linear sind. In dem letzteren Falle sei φ_1 das Product zweier linearen Formen U.

In beiden Fällen existirt nach §. 2 Formel (VI.) die Identität:

$$(Hi)^2 = (\varphi_1 i)^2 \varphi_2\varphi_3 \dots + \sum_1^2{}_s (\vartheta_s, i)^{2-s},$$

woraus wir den Schluss ziehen, *dass, wenn H ein Product von Formen U ist, die Form $(Hi)^2$ eine Function $F(U)$ ist.*

Ferner: *Jede Form, welche durch die zweite Uebereinanderschiebung*

von i mit einer Form $(m-2)^{ter}$ Ordnung entsteht, ist durch Formen U und Formen niederer Ordnung ausdrückbar, also nach Voraussetzung durch Formen U. Nach §. 2 Formel (IV.) ist aber jede Form P_i, welche das Symbol i enthält, in der Form

$$i\vartheta+(i\vartheta_1)+(i\vartheta_2)^2$$

ausdrückbar; *jede Form P_i ist daher durch Formen U ausdrückbar, also nach dem Früheren* (Formel (XXIV.)) *überhaupt jedes J;* was zu beweisen war.

§. 10.

Formen sechsten Grades.

Die Fundamentalformen U für $f=a_x^6$ sind folgende 26 Formen:

$$f,\quad \varphi=(ff)^2,\quad k=(ff)^4,\quad A=(ff)^6,\quad t=(f\varphi),\quad (fk),\quad (fk)^2,\quad l=(fk)^4,$$
$$(\varphi k),\quad (fl),\quad \Delta=(kk)^2,\quad i=(kk)^4,\quad (f\Delta),\quad (kl),\quad m=(kl)^2,\quad (fm),$$
$$(k\Delta),\quad j=(k\Delta)^4,\quad (km),\quad n=(km)^2,\quad \varrho_1=(lm),\quad (kn),\quad (mm)^2,\quad \varrho_2=(ln),$$
$$\varrho_3=(mn),\quad (lm)(ln)(mn).$$

Knüpfen wir zuerst an die Form $k=\varkappa_x^4=a_x^2b_x^2(ab)^4$ einige vorbereitende Betrachtungen. Differentiirt man k, und ersetzt man die Incremente der Reihe nach durch die Variabeln y, z, r, so erhält man folgende Identitäten:

$$\varkappa_x^3\varkappa_y=a_x^2b_xb_y(ab)^4,$$
$$\varkappa_x^2\varkappa_y\varkappa_z=\tfrac{1}{3}a_xb_y(ab)^4\{2a_zb_x+b_za_x\}=\tfrac{1}{3}a_xb_y(ab)^4\{2(ab)(zx)+3b_za_x\}$$
$$=(ab)^4a_x^2b_yb_z-\tfrac{1}{3}A(yx)(zx),$$
$$\varkappa_x\varkappa_y\varkappa_z\varkappa_r=(ab)^4a_xa_rb_yb_z-\tfrac{1}{6}A\{(yr)(zx)+(zr)(yx)\}.$$

Jede Covariante und Invariante von f also, die den Factor $(ab)^4$ hat, kann in die Form $P_\varkappa+AR$ gebracht werden, wo $P_\varkappa$ einen das Symbol $\varkappa$ enthaltenden Ausdruck bedeutet (vgl. §. 2).

Die Formen W (vgl. §. 4) *können die Form $F(U)+P_\varkappa+AR$ annehmen.*

Beweis.

Die Formen W sind ganze Functionen derjenigen Covarianten A von f, welche den Fundamentalformen einer Form fünften Grades entsprechen. Alle diese Formen A ausser f, φ, t entsprechen nun Formen, die das Symbol i enthalten, und haben daher den Factor $(ab)^4$, können also die Form $P_\varkappa+AR$ annehmen.

Da nun nach §. 4 Formel (XV.) jede Form J von f in die Form $W+P_\chi$ gebracht werden kann, und die einzigen χ hier k und A sind, so kann J die Form annehmen:

$$\text{(XXV.)}\qquad J=F(U)+P_\varkappa+AR.$$

Um nun nachzuweisen, dass jede Form J durch Formen U ausdrückbar sei, werde ich wieder zunächst annehmen, dieser Satz sei für alle Formen erster, zweiter, dritter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung richtig, und ihn dann für Formen m^{ter} Ordnung nachweisen; zunächst aber insbesondere für einige specielle Formen J.

Zuerst betrachte ich diejenigen Formen, die durch die erste Uebereinanderschiebung einer Form U mit k entstehen, und beginne mit:

$$J = ((f\varphi), k).$$

Es ist dann nach §. 2 Formel (VIII.), da die Form $a_x^4 \varphi_x^7 (a\varphi)(a\varkappa)\varkappa_x^3$ durch die erste Combination von $(f\varphi)$ mit k entsteht,

$$J = a_x^4 \varkappa_x^3 \varphi_x^7 (a\varphi)(a\varkappa) + ck(f\varphi)^2,$$

und wenn man die Identität:

$$2\varphi_x \varkappa_x (a\varphi)(a\varkappa) = \varphi_x^2 (a\varkappa)^2 - a_x^2 (\varphi\varkappa)^2 + \varkappa_x^2 (a\varphi)^2$$

anwendet:

$$J = \tfrac{1}{2}\varphi(fk)^2 - \tfrac{1}{2}f(\varphi k)^2 + ck(f\varphi)^2.$$

Die in diesem Ausdrucke von J vorkommenden Formen sind von niederer als der m^{ten} Ordnung; mithin lassen sie sich sowohl als auch J (nach Annahme) durch die Formen U ausdrücken.

In derselben Weise zeigt man, dass die Formen: $((\varphi k), k)$, $((fk), k)$, $((f\varDelta), k)$, $((fl), k)$, $((kl), k)$, $((fm), k)$, $((f\varDelta), k)$, $((km), k)$, $((kn), k)$, $((k\varDelta), k)$, (ϱ_1, k), (ϱ_2, k), (ϱ_3, k) sich als Functionen der U darstellen lassen. —

Für die Form

$$J = ((fk)^2, k)$$

erhält man (§. 2 Formel (VIII.)):

$$J = a_x^4 \varkappa_x (a\varkappa)^2 (\varkappa\varkappa')\varkappa_x'^2 + ck(fk)^3 = -\tfrac{1}{2} a_x^5 \varkappa_x \varkappa_x'^2 (a\varkappa)(\varkappa\varkappa')^2 + ck(fk)^3 = \tfrac{1}{2}(\varDelta f) + ck(fk)^3,$$

wodurch diese Form ebenfalls dargestellt ist. Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun sofort, *dass jede Form* (Uk) *eine Function* $F(U)$ *ist.*

Ist ferner H *ein Product der* U, *so ist* (Hk) *eine Function* $F(U)$ (vgl. 2 Formel (VI.)). *Jede Form* m^{ter} *Ordnung, welche die Gestalt* (ϑk) *hat, ist eine Function* $F(U)$ (da ϑ eine Form $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, also nach Annahme eine Function $F(U) = \Sigma cH$ ist).

Ehe ich zu höheren Uebereinanderschiebungen mit k übergehe, will ich einige Folgerungen aus der (Annali di Matemat. pura ed applicata Ser. II. T. I. p. 53) gegebenen Relation:

$$(fk)^3 = 0$$

ziehen. Man erhält daraus die folgenden weiteren Formeln (§. 2 Formel (VI.)):

$$0 = (ab)\,a_x^2\,\varkappa_x\,b_x^5(a\varkappa)^3 + clf$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab)a_x^2 b_x^2 \varkappa_x\{b_x^3(a\varkappa)^3 - a_x^3(b\varkappa)^3\} + clf,$$
$$clf = \tfrac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 \varkappa_x^2\{b_x^2(a\varkappa)^2 + a_x b_x (a\varkappa)(b\varkappa) + a_x^2(b\varkappa)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 \varkappa_x^2\{3b_x^2(a\varkappa)^2 - \tfrac{1}{2}(ab)^2\varkappa_x^2\} = \tfrac{3}{2}a_x^2 b_x^4 \varkappa_x^2(a\varkappa)^2(ab)^2 - \tfrac{1}{4}k^2.$$

Da die Form $a_x^2 b_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)^2 (ab)^2$ aus der Form $\varphi = (ff)^2$ durch die zweite Combination mit k entsteht, so ist nach §. 3 Formel (XI.)

$$a_x^2 b_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)^2 (ab)^2 = (\varphi k)^2 + c_1 k^2,$$

und mithin hat die Form $(\varphi k)^2$ den Werth

$$(\varphi k)^2 = Clf + C_1 k^2,$$

ist also durch Formen U darstellbar.

Um die Form $((fk)^2, k)^2$ zu untersuchen, gehe ich ebenfalls von der Identität $(fk)^3 = 0$ aus; da die Form $a_x^3(\varkappa\varkappa')(a\varkappa)^3\varkappa_x'^3$ aus $(fk)^3$ durch die erste Combination mit k entsteht, so ist nach §. 2 Formel (VI.):

$$0 = a_x^3 \varkappa_x'^3 (a\varkappa)^3(\varkappa\varkappa') + ckl,$$

also:

$$-ckl = \tfrac{1}{2}a_x^3(\varkappa\varkappa')\{\varkappa_x'^3(a\varkappa)^3 - \varkappa_x^3(a\varkappa')^3\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}a_x^4(\varkappa\varkappa')^2\{\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2 + \varkappa_x\varkappa_x'(a\varkappa)(a\varkappa') + \varkappa_x^2(a\varkappa')^2\},$$
$$ckl = \tfrac{1}{2}a_x^4(\varkappa\varkappa')^2\{3\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2 - (\varkappa\varkappa')^2 a_x^2\} = \tfrac{3}{2}a_x^4\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2(\varkappa\varkappa')^2 - \tfrac{1}{2}if.$$

Die Form $a_x^4\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2(\varkappa\varkappa')^2$ entsteht aus $(fk)^2$ durch die zweite Combination mit k, folglich ist nach §. 2 Formel (VI.):

$$a_x^4\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2(\varkappa\varkappa')^2 = ((fk)^2, k)^2 + C_1((f\varkappa)^3, k)^2 + C_2 k (f\varkappa)^4,$$

und $((fk)^2, k)^2$ hat den Werth: $Ckl + C_1 if$, ist also eine ganze Function von den U.

Nachdem nunmehr gezeigt worden ist, dass die Formen $(\varphi k)^2$ und $((fk)^2, k)^2$ ganze Functionen $F(U)$ seien, gehe ich dazu über nachzuweisen, dass auch die übrigen Covarianten der Form $(Uk)^2$ diese Eigenschaft besitzen, und wende mich zuerst zu der Form $J = ((f\varphi), k)^2$.

Dieselbe lässt sich nach §. 2 Formel (VIII.) folgendermassen schreiben:

$$((f\varphi), k)^2 = a_x^5(a\varphi)\,\varphi_x^5(\varphi k)^2\varkappa_x^2 + \sum_1^2{}_s c_s((f\varphi)^{s+1}, k)^{2-s}.$$

Die Form $a_x^5(a\varphi)\varphi_x^5\varkappa_x^2(\varphi k)^2$ entsteht nun aus der Form $(\varphi k)^2$ durch die erste Combination mit f, hat also nach §. 2 Formel (VIII.) den Werth

$$a_x^5\varphi_x^5\varkappa_x^2(a\varphi)(\varphi k)^2 = ((\varphi k)^2, f) + cf(\varphi k)^3;$$

mithin ist:

$$(tk)^2 = ((\varphi k)^2, f) + cf(\varphi k)^3 + \sum_1^2{}_s c_s((f\varphi)^{s+1}, k)^{2-s};$$

da, wie oben gezeigt wurde, $(\varphi k)^2 = Clf + C_1 k^2$, so erhalten wir nach

§. 2 Formel (VI.) die Gleichung:

$$(tk)^2 = C_2(l,f)f + C_3 k(kf) + cf(\varphi k)^3 + \sum_1^2 {}_s c_s ((f\varphi)^{s+1}, k)^{2-s},$$

aus der wir folgern, dass $(tk)^2$ sich aus Formen niederer Ordnung und aus Formen, die aus der ersten Uebereinanderschiebung mit k entstehen, zusammensetzen lässt. —

Um zu zeigen, dass auch die Form $((\varphi k), k)^2$ eine ganze Function der U ist, benutze ich den Umstand, dass die Form $\varphi_x^5 (\varphi\varkappa')^2 \varkappa_x'^2 (\varphi\varkappa)\varkappa_x^3$ aus den Formen (φk) und $(\varphi k)^2$ durch die zweite und die erste Uebereinanderschiebung mit k hervorgeht und daher die Werthe besitzt (§. 2 Formel (VIII.)):

$$\varphi_x^5 (\varphi\varkappa')^2 \varkappa_x'^2 \varkappa_x^3 (\varphi\varkappa) \begin{cases} = ((\varphi k), k)^2 + c_1((\varphi k)^2, k) + c_2 k(\varphi k)^3 \\ = ((\varphi k)^2, k) + c_3 k(\varphi k)^3. \end{cases}$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe erhalten wir die Gleichung:

$$((\varphi k), k)^2 = C((\varphi k)^2, k) + C_1 k(\varphi k)^3,$$

aus der, wie oben gezeigt wurde, folgt, dass sich $((\varphi k), k)^2$ durch Formen U ausdrücken lässt. Mittelst desselben Verfahrens kann man beweisen, dass ebenfalls die Formen $((fk), k)^2$, $((lk), k)^2$, $((mk), k)^2$, $((nk), k)^2$, $((\varDelta k), k)^2$ ganze Functionen $F(U)$ seien. —

Da die Form k eine Form vierten Grades ist, so hat die Covariante $(\varDelta k)^2$ von k, wie bekannt, den Werth: $(\varDelta k)^2 = cik$; ich will diese Formel benutzen, um auch die Form $((\varDelta f), k)^2$ zu untersuchen. Zu dem Ende betrachte ich die Form $a_x^5 \varDelta_x \varkappa_x^2 (\varDelta a)(\varDelta k)^2$, welche aus den Formen $(\varDelta f)$ und $(\varDelta k)^2$ durch die zweite Combination mit k und durch die erste Combination mit f entsteht und daher die Werthe hat:

$$a_x^5 \varDelta_x k_x^2 (\varDelta a)(k\varDelta)^2 \begin{cases} = ((\varDelta f), k)^2 + c((\varDelta f)^2, k) + c_1 k(\varDelta f)^3 \\ = ((\varDelta k)^2, f) + c_2 f(\varDelta k)^3 = c_3 i(kf). \end{cases}$$

Aus dieser Identität folgt unmittelbar, dass $((\varDelta f), k)^2$ sich durch die U ausdrücken lässt.

Die Form $((fl), k)^2$ hat, da die Form $a_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)(al)(lk)$ aus (fl) durch die zweite Combination mit k entsteht, den Werth (Formel (VIII.)):

$$((fl), k)^2 = a_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)(al)(l\varkappa) + c((fl)^2, k),$$

oder wenn man die Identität:

$$2a_x \varkappa_x (al)(l\varkappa) = l_x^2 (a\varkappa)^2 - \varkappa_x^2 (al)^2 - a_x^2 (\varkappa l)^2$$

benutzt:

$$\begin{aligned} ((fl), k)^2 &= \tfrac{1}{2} l(fk)^2 + C((fl)^2, k) - \tfrac{1}{2}(f, (kl)^2) \\ &= \tfrac{1}{2} l(fk)^2 + C((fl)^2, k) - \tfrac{1}{2}(f, m), \end{aligned}$$

ist also durch U' darstellbar. Etwas verwickelter ist der Nachweis, dass auch die Form $((fm), k)^2$ eine Function $F(U)$ sei. Diese Form hat, da die Form $a_x^3 x_x^2 (ax)(am)(mx)$ aus (fn) durch die zweite Combination mit f entsteht, den Werth (Formel (VIII.)):

$$((fm), k)^2 = a_x^3 x_x^2 (ax)(am)(mx) + c((fm)^2, k),$$

oder da $m = x_x^2 (xl)^2$ ist:

$$\begin{aligned} ((fm), k)^2 &= a_x^3 x_x^2 (ax)(ax')(x'x)(x'l)^2 + c((fm)^2, k) \\ &= -a_x^3 x_x l_x (ax)(ax')(xx')^2 (x'l) + c((fm)^2, k). \end{aligned}$$

Die erste Form der rechten Seite entsteht nun durch die erste Combination mit l aus der Form $a_x^3 x_x x'_x (ax)(ax')(xx')^2$, welche letztere Form wieder durch die zweite Combination mit f aus $\varDelta$ entsteht, also den Werth hat (Formel (VIII.)):

$$(\varDelta f)^2 + cif,$$

oder da, wie oben gezeigt wurde, $(\varDelta f)^2 = Cif + C_1 kl$ ist, den Werth hat:

$$C_2 if + C_3 kl.$$

Aus diesen Betrachtungen kann man auf die Identität schliessen:

$$((fm), k)^2 = c((fm)^2, k) + c_1 i(fl) + c_2 l(kl),$$

welche zeigt, dass $((fm), k)^2$ eine Function $F(U)$ ist. — Die Form $(kn)^2$, die ich durch p bezeichnen will, hat den Werth:

$$p = im + 2jl,$$

(Ann. di Mat. pag. 58) ist also durch Formen U ausdrückbar; ebenso die drei Formen $(\varrho_i, k)^2$, welche die folgenden Werthe besitzen:

$$\begin{aligned} (\varrho_1 k)^2 &= -\varrho_2, \\ (\varrho_2 k)^2 &= -\varrho_3 + c\varrho_1 i, \\ (\varrho_3 k)^2 &= cj\varrho_1, \end{aligned}$$

so dass jede in der Form $(Uk)^2$ *enthaltene Covariante eine ganze Function der* U *ist.*

Ferner ist die Form $(Hk)^2$, *in der* H *ein Product von Formen* U *bedeutet, mittelst der Formel* (VI.) *durch die* U *darstellbar, sowie endlich jede Form, welche aus einer Form* $(m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung durch die zweite Uebereinanderschiebung mit* U *entsteht.*

Ich wende mich nun zu der Untersuchung derjenigen Formen, welche durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entstehen, und beginne mit der Betrachtung der Form $(\varphi k)^3$. — Da die Form $(ax)^3 a_x b_x^4 (ab)^2 x_x$ aus den Formen φ und $(fk)^3 = 0$ durch die dritte Combination mit k und durch die zweite Com-

bination mit f entsteht, hat sie die beiden Werthe (Formel (VIII.)):

$$a_x b_x^4 \varkappa_x (ab)^2 (a\varkappa)^3 \left\{ \begin{array}{l} = (\varphi k)^3 + \sum_1^3 {}_s c_s ((ff)^{s+2}, k)^{3-s} \\ = c(fl), \end{array} \right.$$

durch deren Gleichsetzung gezeigt werden kann, wie die Form $(\varphi k)^3$ durch die U ausdrückbar ist. — Ein ähnliches Verfahren lehrt uns die Formen: $(tk)^3$, $((f\Delta), k)^3$, $((fl), k)^3$, $((fm), k)^3$ durch die U ausdrücken.

Um die Form $((\varphi\varkappa), k)^3$ zu untersuchen, bemerke ich, dass die Form $\varphi_x^4 \varkappa_x^3 \varkappa'_x (\varphi\varkappa)(\varphi\varkappa')^3$ aus den Formen (φk) und $(\varphi k)^3$ durch die dritte und erste Combination mit k entsteht, mithin die Werthe hat (Formel (VIII.)):

$$\varphi_x^4 \varkappa_x^3 \varkappa'_x (\varphi\varkappa)(\varphi\varkappa')^3 \left\{ \begin{array}{l} = ((\varphi k), k)^3 + \sum_1^3 {}_s c_s ((\varphi k)^{s+1}, k)^{3-s} \\ = ((\varphi k)^3, k) + ck(\varphi k)^4, \end{array} \right.$$

durch deren Gleichsetzung man sieht, dass die Form $((\varphi k), k)^3$ eine Function $F(U)$ ist. — In derselben Weise kann man zeigen, dass die Formen $((fk), k)^3$, $((fk)^2, k)^3$, $((k\Delta), k)^3$ durch die U dargestellt werden können.

Da endlich die Formen $((kl), k)^3$, $((km), k)^3$, $((kn), k)^3$ die Werthe haben:

$$((kl), k)^3 = cil + c_1 n,$$
$$((km), k)^3 = cim + c_1 jl,$$
$$((kn), k)^3 = cin + c_1 jm,$$

also ganze Functionen der U sind, ***so kann jede Function, welche aus einer Form U durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, durch die Formen U dargestellt werden.***

Ich will nun dazu übergehen, auch diejenigen Formen $(Hk)^3$ zu untersuchen, in denen H ein Product von Formen U ist, und beginne mit dem Falle, wo H das Product zweier quadratischer Covarianten U ist. —

Sind σ und τ irgend zwei quadratische Formen, so ist (Formel (VIII.)):

$$(\sigma\tau, k)^3 = (\varkappa\sigma)^2 \varkappa_x \tau_x (\varkappa\tau) + c((\sigma\tau), k)^2$$
$$= \{\varkappa_x^2 (\varkappa\sigma)^2, \tau\} + c((\sigma\tau), k)^2;$$

ersetzt man in dieser Formel σ und τ durch irgend zwei der Formen: l, m, n, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so sieht man unmittelbar, dass der Ausdruck $\{\varkappa_x^2 (\varkappa\sigma)^2, \tau\}$ sich als Aggregat der Functionaldeterminanten dieser sechs quadratischen Formen, mithin auch als Aggregat dieser Formen selbst darstellen lässt. Da dann auch $((\sigma\tau), k)^2$, wie oben gezeigt wurde, eine Function $F(U)$ ist, ***so ist $(\sigma\tau, k)^3$ stets durch die Formen U ausdrückbar, wenn σ und τ zwei quadratische Covarianten U bedeuten.***

Aus der Formel (VI.) geht nun unmittelbar der Satz hervor:

Jede Form, die aus einem Product von Formen U durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, ist durch die Formen U ausdrückbar.

Ferner: *Jede Form, die aus einer Form* $(m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, ist eine ganze Function der Formen U.*

Es bleibt uns nun noch die Untersuchung der Formen übrig, welche sich durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k ableiten lassen. Ich beginne mit der Form $(\varphi k)^4$ und benutze den Umstand, dass die Form $b_x^4(ab)^2(ax)^4$ aus den Formen φ und l durch die vierte Combination mit k und durch die zweite Combination mit f entsteht, also die beiden Werthe hat (Formel (VIII.)):

$$b_x^4(ab)^2(ax)^4 \begin{cases} = (\varphi k)^4 + \sum_1^4 {}_s c_s((ff)^{s+2}, k)^{4-s}, \\ = (fl)^2. \end{cases}$$

Da die Form $(fl)^2$, wie in der oben erwähnten Abhandlung (Ann. di. Mat. Ser. II. T. I. pag. 60) gezeigt wurde, den Werth $\frac{2}{5}(\varDelta + Ak)$ hat, so ist nach obiger Identität $(\varphi k)^4$ eine ganze Function der Formen U. —

Um die Form $(tk)^4$ zu untersuchen, gehe ich von der Form

$$(\varphi k)^4(a\varphi)a_x^5\varphi_x^3 = ((\varphi k)^4, f)$$

aus, welche aus t durch die vierte Combination mit k entsteht, also nach Formel (IV.) den Werth hat:

$$(\varphi k)^4(a\varphi)a_x^5\varphi_x^3 = (tk)^4 + \sum_1^4 {}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

Nun haben wir eben gesehen, dass $(\varphi k)^4 = C\varDelta + C_1 Ak$ ist, also ist auch: $((\varphi k)^4, f) = C(\varDelta f) + CA(kf)$ und:

$$C(\varDelta f) + C_1 A(kf) = (tk)^4 + \sum_1^4 {}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

Hieraus folgt, dass die Form $(tk)^4$ eine ganze Function der U ist. —

Ist die Form $\psi = \psi_x^\nu$ eine beliebige Covariante von f, so findet, da die Form $\psi_x^{\nu-2}(\psi x)(\psi x')(xx')^3 = 0$ aus der Form (ψk) durch die vierte Combination mit f entsteht, die Relation statt (Formel (IV.)):

$$((\psi k), k)^4 = \sum_1^4 {}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

Ersetzt man in dieser Identität ψ der Reihe nach durch die Formen: φ, f, l, m, n, $\varDelta$, so sieht man, dass diejenigen Formen, welche durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k aus den Formen: (φk), (fk), (lk), (mk), (nk), $(\varDelta k)$ entstehen, durch die Formen U ausgedrückt werden können.

Den Werth der Form $((fk)^2, k)^4$ finde ich durch die Bemerkung, dass die Form $(ax)^4 (ax')^2 x'^2_x = (kl)^2 = m$ aus der Form $(fk)^2$ durch die vierte Combination mit k entsteht, also der Gleichung genügt:

$$m = ((fk)^2, k)^4 + \sum_1^4 {}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

In ähnlicher Weise finde ich für die Covarianten $((fl), k)^4$ und $((fm), k)^4$ die Ausdrücke:

$$((fl), k)^4 = \sum_1^4{}'_s(\vartheta_s, k)^{4-s},$$

$$((fm), k)^4 = \varrho_1 + \sum_1^4 {}_s(\vartheta_s, k)^4.$$

Aus diesen 3 Formeln folgere ich, dass diejenigen Formen, welche aus den Formen $(fk)^2$, (fm), (fl) durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k entstehen, ganze Functionen der U sind.

Um die Form $((f\varDelta), k)^4$ zu untersuchen, benutze ich den Umstand, dass die Form $a^4_x (a\varDelta)(ak)(\varDelta k)^3$, welche aus $(f\varDelta)$ durch die vierte Combination mit k entsteht, zugleich aus der Form $(\varDelta k)^3 = 0$ durch die zweite Uebereinanderschiebung mit f entsteht, also verschwindet. Es ist daher die Form (Formel (IV.))

$$((f\varDelta), k)^4 = \sum_1^4 {}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}$$

eine ganze Function der U und somit allgemein *jede Form, die aus einer Form U durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, durch die Formen U ausdrückbar.*

Indem ich nun zu den Formen übergehe, welche aus *Producten H* der Formen U durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k entstehen, beginne ich mit dem Falle, wo H das Product irgend zweier quadratischer Formen U ist, die ich σ und τ nennen will. Die Form:

$$(\sigma\tau, k)^4 \doteq ((\sigma k)^2, \tau)^2$$

ist, da, wie oben gezeigt wurde, die Form $(\sigma k)^2$ stets aus den quadratischen Formen U linear zusammengesetzt werden kann, ein Aggregat von Invarianten $(\varrho\tau)^2$, welche aus zwei quadratischen Formen U durch die zweite Uebereinanderschiebung entstehen. Hieraus folgt, dass die Invarianten $(\sigma\tau, k)^4$, in denen σ und τ irgend zwei Formen U zweiten Grades bedeuten, durch simultane Invarianten der Formen l, m, n ausdrückbar sind. Diese simultanen Invarianten sind nun aber, wie bekannt, ganze Functionen der sieben Invarianten:

$$(ll)^2, \quad (lm)^2, \quad (ln)^2, \quad (mm)^2, \quad (mn)^2, \quad (nn)^2, \quad (lm)(ln)(mn),$$

welche, wie (Ann. di. mat. ser. II. t. I. pag. 54—64) nachgewiesen wurde,

ganze Functionen der Invarianten U sind, mithin sind auch alle Formen $(\sigma\tau, k)^4$ ganze Functionen dieser Invarianten.

Ich bin jetzt im Stande nachzuweisen, *dass jede Form die durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k aus einem Producte H von Formen U entsteht, durch die Formen U ausgedrückt werden kann.*

Ein jedes solches Product $H = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots$ nämlich hat einen Factor, etwa φ_1, der entweder eine Covariante U ist, deren Grad grösser oder gleich vier ist, oder der ein Product zweier quadratischer Covarianten U ist; es ist dann nach Formel (VI.) die Form

$$(Hk)^4 = (\varphi_1 k)^4 \varphi_2 \varphi_3 \cdots + \sum_1^4 {}_\varkappa (\vartheta_\varkappa, k)^{4-\varkappa},$$

also eine ganze Function der U.

Aus diesen Betrachtungen kann ich folgende Folgerungen ableiten:

Jede Form, die durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k aus einer Form $(m-2)^{ter}$ Ordnung entsteht, ist eine ganze Function der U.

Da das Nämliche, wie oben bewiesen, für die Formen gilt, die durch die 0te, 1ste, 2te und 3te Uebereinanderschiebung mit k aus Formen $(n-2)^{ter}$ Ordnung entstehen, *so ist nach* §. 2 *Formel* (IV.) *jede Form $P_\varkappa$, die das Symbol k enthält, eine ganze Function der U; sowie nach* §. 10 *Formel* (XXV.) *jede Form m^{ter} Ordnung von f überhaupt.*

Giessen, den 8. Juni 1868.

Ueber eine Eigenschaft von Functional-determinanten.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Göttingen.)

Wenn man die Coordinaten eines Punktes einer Curve als ganze homogene Functionen zweier Parameter dargestellt hat:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2) \\ \varrho x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2) \\ \varrho x_3 = f_3(\xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

so findet man in ähnlicher Weise für die Coordinaten der Tangente des Punktes x:

$$(2.)\quad \begin{cases} \sigma u_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2) \\ \sigma u_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2) \\ \sigma u_3 = \varphi_3(\xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die drei aus den Functionen f_1, f_2, f_3 zu bildenden Functionaldeterminanten sind. Wenn man nun aber von den Gleichungen (2.) wieder ebenso weiter geht, wie von den Gleichungen (1.) zu den Gleichungen (2.) selbst, so kommt man wieder zu den Ausdrücken für die Coordinaten eines Punktes der Curve; es müssen daher die neuen Bildungen wieder auf die Gleichungen (1.) führen, abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor, welchen die rechten Seiten besitzen können. Hieraus folgt der Satz:

Wenn man aus drei homogenen Functionen mit zwei Veränderlichen und gleich hoher Ordnung die Functionaldeterminanten bildet, und aus diesen wieder die Functionaldeterminanten, so sind letztere bis auf einen gemeinschaftlichen Factor den ursprünglichen Functionen gleich.

Denselben Satz kann man ebenso geometrisch für vier homogene Functionen mit drei Variabeln einsehen. Für $n+1$ Functionen aber mit n Variabeln beweist man ihn algebraisch sehr leicht, wie folgt: Bezeichnen

wir durch $f_1, f_2, \dots f_{n+1}$ die gegebenen Functionen, durch $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n+1}$ ihre Functionaldeterminanten, durch $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{n+1}$ die Functionaldeterminanten der φ. Betrachten wir den Ausdruck:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_n} & a_1 & b_1 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_n} & a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\xi_n} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma a_i f_i & \Sigma b_i f_i \end{vmatrix} = \Sigma b_i f_i \Sigma a_k \psi_k - \Sigma a_i f_i \Sigma_i b_k \psi_k .$$

Multipliciren wir hierin die ersten $n+1$ Horizontalreihen beziehungsweise mit $f_1, f_2, \dots f_{n+1}$, und ziehen die Summe von der letzten ab, so zerstören wir die Terme $\Sigma a_i f_i$, $\Sigma b_i f_i$; an Stelle der Nullen in der letzten Horizontalreihe aber treten die Ausdrücke

$$\Sigma_i f_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_n} = \frac{\partial}{\partial\xi_n}(\Sigma f_i \varphi_i) - \Sigma_i \varphi_i \frac{\partial f_i}{\partial\xi_n},$$

welche identisch verschwinden. Daher ist $R = 0$, welches auch die Werthe der ganz beliebigen Grössen a_i, b_i seien, und indem man die Coefficienten der Producte $a_i b_k$ in R einzeln gleich Null setzt, erhält man die Gleichungen

$$f_i \psi_k - f_k \psi_i = 0,$$

welche zu beweisen waren.

Es ist leicht dem Satze eine gewisse weitere Ausdehnung zu verleihen, indem man statt der n Variabeln deren $n+m$ einführt, und zwischen diesen m Bedingungen bestehen lässt.

Aber von grösserem Interesse ist die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Factors, durch welchen die Functionaldeterminanten ψ von den Functionen f verschieden sind. Da in den ψ nur zweite Differentialquotienten der f auftreten, so kann man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, die Functionen f als Functionen zweiter Ordnung betrachten. Eine Abzählung lehrt dann sofort, dass dieser Factor M vom Grade $n+1 . n-2$ in den Variabeln und vom Grade $n-1$ in den Coefficienten jeder der Functionen ist. Aber seine wirkliche Darstellung scheint mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, die ich nur für drei Functionen mit zwei Variabeln und für vier Functionen mit drei Variabeln durch besondere Betrachtungen habe überwinden können.

Bei drei Functionen mit zwei Variabeln

$$f_1 = a_1\xi_1^2+2b_1\xi_1\xi_2+c_1\xi_2^2,$$
$$f_2 = a_2\xi_1^2+2b_2\xi_1\xi_2+c_2\xi_2^2,$$
$$f_3 = a_3\xi_1^2+2b_3\xi_1\xi_2+c_3\xi_2^2$$

ist nach der obigen Abzählung der Factor M eine simultane Invariante, welche die Coefficienten jeder der Functionen f nur linear enthält. Daher ist M von der einzigen existirenden Invariante dieser Art

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

nur durch einen numerischen Factor verschieden. Es ist leicht, in dieser Bildung eine wesentliche Eigenschaft von M wieder zu erkennen, die Eigenschaft nämlich, dass M nothwendig eine Combinante ist, d. h. dass M, wenn man die f durch lineare Combinationen derselben ersetzt, sich nur um einen von den Coefficienten der Functionen unabhängigen Factor ändert.

Für vier Functionen mit drei Veränderlichen folgt der Ausdruck von M aus dieser Bemerkung zusammen mit der Theorie der *Steiner*schen Fläche, welche ich im 67sten Bande dieses Journals gegeben habe. Dort ist nämlich gezeigt, dass im Allgemeinen es immer möglich ist, durch passende lineare Transformation der Variabeln die f als lineare Verbindungen der vier Ausdrücke

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2,\quad 2\xi_2\xi_3,\quad 2\xi_3\xi_1,\quad 2\xi_1\xi_2$$

darzustellen. Bei der Bildung von M kann man also diese Ausdrücke an Stelle der Functionen f zu Grunde legen. Die φ werden dann, bis auf einen gemeinsamen numerischen Factor:

$$2\xi_1\xi_2\xi_3,\quad \xi_1^3-\xi_2^2\xi_1-\xi_3^2\xi_1,\quad \xi_2^3-\xi_3^2\xi_2-\xi_1^2\xi_2,\quad \xi_3^3-\xi_1^2\xi_3-\xi_2^2\xi_3.$$

Eine kleine Rechnung lehrt sodann mit Zugrundelegung dieser Werthe der φ, dass bis auf einen numerischen Factor M den Werth hat

$$(\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1+\xi_2-\xi_3)(\xi_1-\xi_2+\xi_3)(-\xi_1+\xi_2+\xi_3).$$

Dieser Ausdruck aber, gleich Null gesetzt, giebt das Vierseit in der Abbildung der *Steiner*schen Fläche, in welches die Abbildung der Wendecurve sich auflöst (§. 5 a. a. O.); und diese Abbildung wieder habe ich eben dort allgemein bilden gelehrt (Formel (38.)). Die Regel für die Aufstellung von M bei vier Functionen mit drei Veränderlichen ist hiernach folgende:

Man bildet die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_1^2} & 2u_1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_2^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_2^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_2^2} & 0 & 2u_2 & 0 \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_3^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_3^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_3^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_3^2} & 0 & 0 & 2u_3 \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & 0 & u_3 & u_2 \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} & u_3 & 0 & u_1 \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & u_2 & u_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3
\end{vmatrix},$$

welche nach den u geordnet den Ausdruck

$$\Sigma\Sigma D_{ik} u_i u_k$$

annehmen mag. Die Function M ist dann bis auf einen numerischen Factor dem Ausdrucke

$$\begin{vmatrix}
D_{11} & D_{12} & D_{13} & \xi_1 \\
D_{21} & D_{22} & D_{23} & \xi_2 \\
D_{31} & D_{32} & D_{33} & \xi_3 \\
\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0
\end{vmatrix}$$

gleich. Die Coincidenz von M mit der linken Seite der Gleichung für die Abbildung der *Hesse*schen Wendecurve lässt sich übrigens aus der Theorie der auf einer Ebene abbildbaren Flächen direct einsehen; was aber hier auseinanderzusetzen zu weit führen würde.

Göttingen, den 2. November 1868.

Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids.

(Von Herrn *F. Grube* in Hamburg.)

Die folgende Entwicklung der Formeln für die Componenten der Anziehung eines homogenen Ellipsoides beruht wesentlich auf einer Umformung eines Integrales J von der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(A\cos\psi - a)^2 + (B\sin\psi - b)^2 + c^2}}.$$

Nach *Gauss* und *Jacobi* *) ist

$$J = \frac{4}{\sqrt{\sigma - \sigma'}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\sigma'' - \sigma'}{\sigma - \sigma'} \sin^2\varphi}}.$$

Hierin bedeuten σ, σ', σ'' die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(1.) \qquad \frac{a^2}{A^2 + x} + \frac{b^2}{B^2 + x} + \frac{c^2}{x} = 1,$$

so dass

$$\sigma > \sigma'' > \sigma'.$$

Es ist ferner aus der Theorie der elliptischen Integrale bekannt **), dass das Integral

$$\int_\alpha^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}, \qquad \alpha > \beta > \gamma,$$

durch die Substitution

$$\frac{\alpha - \gamma}{x - \gamma} = \sin^2\varphi$$

übergeht in

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha - \gamma}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \sin^2\varphi}}.$$

---

*) *Gauss*, Determinatio attractionis etc. in den commentationes societ. Gott. Bd. IV. — *Jacobi*, Bd. 2, 8 und 12 dieses Journals. — Neuerdings hat Herr *Clebsch* die Resultate von *Gauss* und *Jacobi* in kürzerer Weise entwickelt, Bd. 61, pag. 187 dieses Journals.

**) Vergl. hierüber *Schellbach*, die Lehre von den elliptischen Integralen, p. 273.

Daraus folgt, wenn man noch beachtet, dass vermöge (1.) für jeden Werth der Variablen x

$$(x-\sigma)(x-\sigma')(x-\sigma'')=x(A^2+x)(B^2+x)-c^2(A^2+x)(B^2+x)-a^2x(B^2+x)-b^2x(A^2+x)$$

ist,

$$J=2\int_\sigma^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(A^2+x)(B^2+x)-c^2(A^2+x)(B^2+x)-a^2x(B^2+x)-b^2x(A^2+x)}}.$$

Da offenbar die Summanden des Integrales auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung imaginär werden für jeden Werth der Variablen x, der zwischen 0 und σ liegt, so ist es auch erlaubt zu sagen, es sei J gleich dem reellen Bestandtheile des von 0 bis ∞ ausgedehnten Integrales auf der rechten Seite. Bedient man sich daher, um anzudeuten, dass eine Grösse a gleich sei dem reellen Theile einer complexen Grösse b, der Bezeichnungsweise

$$a \parallel b,$$

so hat man

$$(2.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(A\cos\psi-a)^2+(B\sin\psi-b)^2+c^2}} \parallel \\ \displaystyle 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(A^2+x)(B^2+x)-c^2(A^2+x)(B^2+x)-a^2x(B^2+x)-b^2x(A^2+x)}}. \end{cases}$$

Die Halbaxen des Ellipsoides seien α, β, γ. Ich nehme dieselben als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, und nenne die auf diese Axen bezogenen Coordinaten irgend eines Punktes des Ellipsoides x, y, z, und die des angezogenen Punktes a, b, c.

Man zerlege das Ellipsoid in lauter unendlich dünne elliptische Scheiben durch Ebenen, die die Axe γ rechtwinklig durchschneiden. Die Dicke einer solchen Scheibe werde dz genannt. Die Halbaxen von irgend einer dieser Scheiben, deren Entfernung vom Mittelpunkt des Ellipsoides z sei, nämlich

$$\alpha\sqrt{1-\frac{z^2}{\gamma^2}},\qquad \beta\sqrt{1-\frac{z^2}{\gamma^2}},$$

nenne ich der Kürze wegen m, n.

Ich bestimme zunächst das Potential V dieser Scheibe, oder das Integral

$$V = dz\int\frac{\omega}{r},$$

ausgedehnt über alle Punkte der Scheibe, wo ω das Flächenelement der Scheibe, und r die Entfernung des Flächenelementes vom angezogenen Punkt bedeutet.

Für alle Punkte der Scheibe ist die Coordinate z constant. Statt der Coordinaten x, y eines Punktes der Scheibe führe ich zwei neue Coordinaten λ, ν ein vermittelst der *Ivory*schen Substitution

$$x = m\lambda\cos\nu,$$
$$y = n\lambda\sin\nu.$$

Eine Integration nach λ und ν erstreckt sich auf alle Punkte der Ellipse, wenn man der Variablen λ die Grenzen 0 und 1, und ν die Grenzen 0 und 2π ertheilt.

Aus der bekannten *Legendre*schen Formel für das Flächenelement

$$\omega = \pm\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\nu}-\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)d\lambda\,d\nu$$

ergiebt sich

$$\omega = mn\lambda\,d\lambda\,d\nu.$$

Ferner ist

$$r = \sqrt{(m\lambda\cos\nu-a)^2+(n\lambda\sin\nu-b)^2+(z-c)^2}.$$

Da alle Punkte, für die λ constant ist, auf einer mit der Begrenzung der Scheibe ähnlichen und concentrischen Ellipse liegen, so ist das Potential V' eines unendlich dünnen mit der Begrenzung ähnlichen und concentrischen Ringes, dessen Halbaxen $m\lambda$, $n\lambda$ sind, gleich

$$mn\,dz\,\lambda\,d\lambda\int_0^{2\pi}\frac{d\nu}{\sqrt{(m\lambda\cos\nu-a)^2+(n\lambda\sin\nu-b)^2+(z-c)^2}}.$$

Wendet man auf dies Integral die in (2.) enthaltene Umformung an, so werden sich nacheinander die Integrationen nach λ und z ohne weiteres ausführen lassen. Vermöge (2.) hat man

$$V' \parallel 2mn\,dz\,\lambda\,d\lambda$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{s(m^2\lambda^2+s)(n^2\lambda^2+s)-(z-c)^2(m^2\lambda^2+s)(n^2\lambda^2+s)-a^2s(n^2\lambda^2+s)-b^2s(m^2\lambda^2+s)}}.$$

Hierin führe ich statt s eine neue Variable λ^2s ein; dadurch wird

$$V' \parallel 2mn\,dz\lambda d\lambda\int_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\lambda^2s(m^2+s)(n^2+s)-(z-c)^2(m^2+s)(n^2+s)-a^2s(n^2+s)-b^2s(m^2+s)}}.$$

Durch Integration von V' nach λ zwischen den Grenzen 0 und 1 erhält man das Potential der Scheibe. Um aber die imaginären Summanden des Integrales abzusondern, beachte man Folgendes. Selbst für den grössten Werth des λ, der ja 1 ist, wird man für keinen Werth der Variablen s, der nicht

der Ungleichung

$$1 > \frac{(z-c)^2}{s} + \frac{a^2}{m^2+s} + \frac{b^2}{n^2+s}$$

genügt, einen reellen Summanden erhalten. Bezeichnet man demnach die positive Wurzel der Gleichung

$$1 = \frac{(z-c)^2}{s} + \frac{a^2}{m^2+s} + \frac{b^2}{n^2+s}$$

durch ϱ, so darf die Integration nach s erst von ϱ an beginnen. Ausserdem müssen für jedes s, welches grösser als ϱ ist, die λ der Bedingung genügen

$$\lambda > \lambda',$$

wo

$$\frac{(z-c)^2}{s} + \frac{a^2}{m^2+s} + \frac{b^2}{n^2+s} = \lambda'^2$$

gesetzt ist. Demnach ist das Potential der Scheibe

$$V = 2mn\,dz \int_{\varrho}^{\infty} ds \int_{\lambda'}^{1} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 s(m^2+s)(n^2+s) - (z-c)^2(m^2+s)(n^2+s) - a^2 s(n^2+s) - b^2 s(m^2+s)}},$$

oder, wenn man die Integration nach λ ausführt und zugleich der Kürze wegen

$$\sqrt{s(m^2+s)(n^2+s) - (z-c)^2(m^2+s)(n^2+s) - a^2 s(n^2+s) - b^2 s(m^2+s)} = F(s)$$

setzt,

$$V = 2mn\,dz \int_{\varrho}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{s(m^2+s)(n^2+s)}.$$

Hieraus erhält man bekanntlich die Componenten der Anziehung der Scheibe in der Richtung der Axen α, β, γ des Ellipsoides, die ich mit X, Y, Z bezeichnen will, durch Differentiation resp. nach a, b, c, nämlich

$$(3.) \quad \begin{cases} X \parallel -2mn\,a\,dz \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{ds}{(m^2+s)F(s)} \\ Y \parallel -2mn\,b\,dz \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{ds}{(n^2+s)F(s)} \\ Z \parallel 2mn(z-c)\,dz \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{ds}{sF(s)}. \end{cases}$$

Indem man einen dieser Ausdrücke, z. B. X, nach z integrirt zwischen den Grenzen $-\gamma$ und γ, erhält man die Componente A der Attraction des Ellipsoides in der Richtung seiner Axe α. Statt s führe ich aber erst eine

andere Variable $s\left(1-\frac{z^2}{\gamma^2}\right)$ ein. Dadurch erhält man zunächst, nach einigen leichten Reductionen

$$A \parallel -2\alpha\beta\gamma a \int_0^{\infty} \frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \int_{g_0}^{g} \frac{dz}{\sqrt{S-z^2}},$$

worin

$$S = s - \frac{a^2 s}{\alpha^2+s} - \frac{b^2 s}{\beta^2+s} - \frac{c^2 s}{\gamma^2+s},$$

$$g = \sqrt{s+\gamma^2} - \frac{\gamma c}{\sqrt{s+\gamma^2}},$$

$$g_0 = -\sqrt{s+\gamma^2} - \frac{\gamma c}{\sqrt{s+\gamma^2}}.$$

Damit die Summanden des zweiten Integrales reell werden, darf man nur solche Werthe für z nehmen, dass

$$(4.) \qquad z^2 < S$$

wird. Dies ist für keinen Werth z der Fall, wenn nicht die Bedingung

$$S > 0, \text{ oder } 1 > \frac{a^2}{\alpha^2+s} + \frac{b^2}{\beta^2+s} + \frac{c^2}{\gamma^2+s}$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist offenbar für jeden Werth des s zwischen 0 und ∞ erfüllt, wenn der angezogene Punkt innerhalb des Ellipsoides liegt; liegt derselbe aber ausserhalb, so wird erst von einem bestimmten Werth der Variablen s an, den ich μ nennen will, S positiv werden; μ ist die positive Wurzel der Gleichung

$$1 = \frac{a^2}{\alpha^2+s} + \frac{b^2}{\beta^2+s} + \frac{c^2}{\gamma^2+s}.$$

Für innere Punkte erstreckt sich die Integration nach s also von 0, für äussere aber erst von μ an.

Da ferner, wie leicht zu sehen, für *keinen* positiven Werth des s

$$g^2 < S,$$

und mithin erst recht nicht

$$g_0^2 < S$$

ist, und da, wie ebenfalls leicht ersichtlich, g für *jedes* positive s positiv, g_0 aber negativ ist, so darf wegen (4.) die Integration nach z sich nur erstrecken über die Werthe von z, für welche

$$-\sqrt{S} < z < \sqrt{S}.$$

Demnach ist

$$A = -2\alpha\beta\gamma a\int_{\mu'}^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}}\int_{-\sqrt{S}}^{\sqrt{S}}\frac{dz}{\sqrt{S-z^2}},$$

oder schliesslich, wenn man die Integration nach z ausführt:

$$A = -2\pi\alpha\beta\gamma a\int_{\mu'}^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}},$$

worin die untere Grenze den Werth 0 oder μ hat, jenachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb des Ellipsoides liegt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man durch Integration der Formeln (3.) nach z die Componenten der Anziehung eines jeden Körpers von elliptischem Querschnitt, der von irgend einer Oberfläche zweiten Grades und von zwei mit dem elliptischen Querschnitt parallelen Ebenen begrenzt ist, in Form *einfacher* Integrale erhalten kann.

Ich werde gelegentlich auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Hamburg, im October 1867.

Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und den linearen Strahlencomplex.

(Von Herrn *Th. Reye* in Zürich.)

---

1. **Z**wei collineare ebene Systeme Σ, Σ_1, die ihre Schnittlinie, nicht aber alle Punkte derselben entsprechend gemein haben, erzeugen ein ***Strahlensystem S.*** Wir rechnen zu demselben jeden Strahl, welcher einen Punkt von Σ mit dem entsprechenden Punkte von Σ_1 verbindet. Von anderen Strahlensystemen unterscheidet es sich dadurch, dass im Allgemeinen durch jeden Punkt des Raumes nur einer seiner Strahlen hindurchgeht und in jeder Ebene nur ein solcher enthalten ist; es ist also von der ersten Ordnung und der ersten Classe.

2. Haben die Ebenen Σ, Σ_1 einen Punkt ihrer Schnittlinie entsprechend gemein, so liegt derselbe auf einer *Axe* des Strahlensystemes S, d. h. auf einer Geraden, welche jeden Strahl von S schneidet. Durch jeden Punkt einer solchen Axe gehen, und in jeder Ebene derselben liegen unendlich viele Strahlen von S; dieselben bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Umgekehrt ist jeder Punkt, in welchem zwei Strahlen von S sich schneiden, auf einer solchen Axe enthalten, und auch die Verbindungsebene der beiden Strahlen geht durch eine Axe. Das Strahlensystem hat entweder zwei sich nicht schneidende Axen, oder eine, oder keine Axe. Im ersteren Falle ist jede die Axen schneidende Gerade ein Strahl des Systemes S, und dieses ist durch die Axen völlig bestimmt.

3. Ist s ein beliebiger Strahl des Systemes S, so wird dasselbe aus je zwei Punkten P, P_1 von s durch collineare Ebenenbündel projicirt, und von je zwei durch s gelegten Ebenen in collinearen ebenen Systemen geschnitten. Die letzteren sind durch das Strahlensystem reciprok auf die Ebenenbündel P, P_1 bezogen. — Zwischen je zwei Ebenen, die sich in keinem Strahle von S schneiden, wird durch das Strahlensystem eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt, so dass jeder Geraden der einen Ebene im Allgemeinen ein Kegelschnitt der anderen entspricht. Die Strahlen von S,

welche eine Curve n^{ter} Ordnung schneiden, erfüllen deshalb im Allgemeinen eine Fläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung.

4. Die sämmtlichen Strahlen von S, welche einer beliebigen Geraden l begegnen, bilden im Allgemeinen eine zu l perspectivische Regelschaar, d. h. die eine Schaar von Geraden eines hyperbolischen Hyperboloides oder Paraboloides. Drei beliebige Strahlen a, b, c des Systemes S bestimmen eine Regelschaar (abc), deren übrige Strahlen auch zu S gehören. Durch vier Strahlen a, b, c, d, die nicht alle vier in einer Fläche zweiter Ordnung oder zweiter Classe liegen, ist ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe völlig bestimmt. Zu demselben gehört die Regelschaar (abc), sowie jede andere Regelschaar, welche den vierten Strahl d und zwei Strahlen von (abc) enthält. Eine andere lineare Construction seiner Strahlen ist in (3.) angezeigt. Die speciellen Fälle erledigen sich durch (2.).

5. Jede Fläche zweiter Ordnung, welche eine zu S gehörige Regelschaar enthält, geht durch die Axen des Strahlensystemes S. Sie wird von jedem nicht auf ihr gelegenen Strahle von S geschnitten oder berührt oder gar nicht getroffen, jenachdem S zwei Axen oder eine oder keine Axe besitzt (2.). Zwei solche Flächen zweiter Ordnung von S haben niemals eine Curve mit einander gemein, sondern ausser den Axen noch höchstens zwei Strahlen von S.

6. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P in Bezug auf alle solche im Strahlensysteme enthaltenen Flächen zweiter Ordnung schneiden sich in einem Punkte P_1, und zwar ist die Gerade PP_1 ein Strahl von S. Und die sämmtlichen Pole einer Ebene hinsichtlich jener Flächen liegen in einer zweiten Ebene, welche die erstere in einem Strahle von S schneidet. Die Punkte sowie die Ebenen des Raumes sind also paarweise einander conjugirt in Bezug auf alle diese Flächen *).

7. Hat das Strahlensystem S nur eine Axe u, so ist jedem beliebigen Punkte ein Punkt von u, und jedem Punkte von u sind die sämmtlichen Punkte einer durch u gehenden Ebene conjugirt (5.). Besitzt dagegen das System entweder zwei oder keine Axen, so bilden die Paare conjugirter Punkte und Ebenen ein involutorisches räumliches System. Beschreibt nämlich ein Punkt eine Ebene, so beschreibt zugleich sein conjugirter Punkt die conjugirte Ebene.

---

*) Herr *Hermes* hat Bd. 67, pag. 167 dieses Journals die Sätze (6.) analytisch bewiesen. Sie ergeben sich aus (3.), wenn die dort erwähnten collinearen Ebenen so angenommen werden, dass sie einander conjugirt sind hinsichtlich einer jener Flächen zweiter Ordnung.

Jeder Strahl von S entspricht in dem involutorischen Systeme sich selbst. und seine Punkte und Ebenen sind involutorisch gepaart, indem sie einander paarweise conjugirt sind. Keine Gerade des Raumes, ausser den Strahlen und Axen von S, hat mit ihrer entsprechenden einen Punkt gemein. Wenn zwei Axen vorhanden sind, so trennen dieselben je zwei conjugirte Punkte oder Ebenen harmonisch von einander.

8. Fünf beliebige Strahlen, von denen vier einem nicht durch den fünften gehenden Strahlensysteme S angehören und nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung oder zweiter Classe enthalten sind, bestimmen einen *Strahlencomplex* C. Zu demselben rechnen wir alle Strahlensysteme, welche der fünfte Strahl mit irgend drei Strahlen des Systems S bestimmt (4.). Der Strahlencomplex wird ein linearer genannt, weil die unendlich vielen Strahlen desselben, welche in irgend einer Ebene liegen oder durch einen beliebigen Punkt gehen, allemal einen gewöhnlichen Strahlenbüschel bilden. Wenn die gegebenen fünf Strahlen von einer sechsten Geraden u geschnitten werden, so besteht der Complex aus allen Strahlen, welche die u schneiden. Diesen speciellen Fall wollen wir von jetzt an ausschliessen.

9. Wird durch den linearen Complex C jeder Ebene π des Raumes derjenige Punkt P zugeordnet, in welchem die in π liegenden Strahlen von C sich schneiden, so entsteht ein sogenanntes Nullsystem. In diesem ist jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet, jedem geraden Gebilde ein zu ihm perspectivischer Ebenenbüschel, also auch jeder Geraden eine Gerade und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt. Jeder Strahl des Complexes C entspricht im Nullsysteme sich selbst, und jede Gerade, welche zwei einander zugeordnete Gerade des Nullsystemes schneidet, gehört zu C. Zwei Paar zugeordnete Gerade des Nullsystemes liegen, wenn sie sich nicht wechselsweise schneiden, allemal in einer Regelschaar, deren Strahlen paarweise einander zugeordnet und dadurch involutorisch gepaart sind, und deren Leitschaar aus Strahlen von C besteht.

10. Ein Nullsystem ist nicht nur durch fünf beliebige, sich selbst zugeordnete Strahlen bestimmt, sondern auch durch zwei Paare einander zugeordneter Geraden, die in einer Regelschaar liegen, sowie durch ein solches Paar von Geraden und einen sie nicht schneidenden Strahl, welcher sich selbst zugeordnet ist ((8.) und (9.)). Das Nullsystem ist bekanntlich auch bestimmt durch eine Raumcurve dritter Ordnung, wenn jeder Punkt derselben seiner Schmiegungsebene, also auch jede Tangente sich selbst zugeordnet wird.

Möbius *) hat es zuerst bei Untersuchung des räumlichen Kräftesystemes entdeckt; je zwei Einzelkräfte nämlich, durch welche ein solches Kräftesystem ersetzt werden kann, wirken in zugeordneten Geraden eines bestimmten Nullsystemes. Diejenigen Geraden, in Bezug auf welche das Moment eines solchen Kräftesystemes verschwindet, sind deshalb, wie schon *Möbius* bemerkt, in dem zugehörigen Nullsysteme sich selbst zugeordnet (9.), und umgekehrt; sie bilden also einen linearen Strahlencomplex.

11. Zwei lineare Strahlencomplexe haben die sämmtlichen Strahlen eines Systemes erster Ordnung und erster Classe mit einander gemein. Hat das letztere zwei Axen, so sind dieselben in jedem der beiden, durch die Complexe bestimmten Nullsysteme einander zugeordnet. Zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe haben im Allgemeinen eine Regelschaar gemein, wenn sie Bestandtheile eines linearen Complexes sind; im anderen Falle dagegen höchstens zwei Strahlen oder bei ganz besonderer Lage einen Strahlenbüschel.

12. Im Nullsysteme laufen alle Geraden, deren zugeordnete unendlich fern liegen, zu einander parallel (9.). Eine einzige n unter ihnen steht senkrecht auf denjenigen Ebenen, welche durch die ihr zugeordnete Gerade hindurchgehen. Diese Gerade n liegt mit je zwei einander zugeordneten Geraden g, g_1, von denen sie nicht geschnitten wird, in einem gleichseitigen Paraboloid (9.), und schneidet deshalb die Linie des kürzesten Abstandes von g und g_1 rechtwinklig.

13. Zu jedem linearen Strahlencomplexe C kann (nach 12.) eine einzige Gerade n construirt werden, welche auf allen sie schneidenden Strahlen von C senkrecht steht und die *Hauptlinie* des Complexes C genannt werden mag. Der Complex ist völlig bestimmt durch seine Hauptlinie n und einen sie nicht schneidenden Strahl (10.). Bilden zwei Strahlen von C mit der Hauptlinie n die Winkel α und α_1, und haben sie von n die resp. Abstände a und a_1, so gilt die Gleichung $a.\text{tang}\ \alpha = a_1.\text{tang}\ \alpha_1 = \text{Const.}$; und jede Gerade, für welche $a.\text{tang}\ \alpha = \text{Const.}$ ist, gehört zu C. Jeder andere Complex, welcher aus C durch eine Verschiebung parallel zur Hauptlinie n und durch eine Drehung um n entsteht, hat mit C alle seine Strahlen gemein. In Bezug auf die Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung sind diese Sätze von besonderem Interesse (vgl. 10.). **)

---

*) *Möbius* Bd. 10, pag. 317 dieses Journals.

**) Diese Sätze (13.) können u. A. leicht aus einem Theoreme abgeleitet werden, welches *Möbius* a. a. O. pag. 333 über das Nullsystem bewiesen hat.

14. Zu einem Strahlensysteme S erster Ordnung und erster Classe können unendlich viele Hauptlinien construirt werden, d. h. Gerade, welche auf allen sie schneidenden Strahlen von S senkrecht stehen. Jede derselben ist die Hauptlinie eines durch S gehenden linearen Complexes, und ihr Abstand von einem beliebigen Strahle s des Systemes, multiplicirt mit der Tangente ihres mit s gebildeten Neigungswinkels, ist constant (13.). Diese Hauptlinien schneiden sich paarweise und werden sämmtlich von einem bestimmten Strahle des Systemes S rechtwinklig geschnitten. Jedoch in dem besonderen Falle, in welchem das System eine unendlich ferne Axe u hat, ist jede Gerade, welche auf den durch u gehenden Ebenen senkrecht steht, eine Hauptlinie von S.

15. Ist n die Linie des kürzesten Abstandes von irgend zwei Strahlen einer Regelschaar, sind ferner a und a_1 ihre Abstände von irgend zwei anderen Strahlen dieser Schaar, und resp. α und α_1 ihre mit den letzteren gebildeten Winkel, so gilt die Gleichung $a.\tan g\,\alpha = a_1.\tan g\,\alpha_1 = \text{Const.}$ Die Linie des kürzesten Abstandes zwischen n und irgend einem Leitstrahle der Regelschaar schneidet noch einen zweiten Leitstrahl rechtwinklig (vgl. 12.), so dass die Leitstrahlen paarweise mit n auf gleichseitigen Paraboloiden liegen.

Zürich, den 23. April 1868.

Ueber einige Eigenschaften der Trigonalzahlen.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

1) Wenn p eine Primzahl ist, und man bildet die Reihe der $p-2$ ersten Trigonalzahlen, indem man in $\frac{x(x+1)}{2}$ statt x die Zahlen 1, 2, ... $p-2$ setzt, und nimmt die kleinsten positiven Reste der Glieder dieser Reihe nach dem Modul p, so geben die $\frac{p-1}{2}$ ersten Glieder $\frac{p-1}{2}$ verschiedene Reste. Es versteht sich von selbst, dass keiner dieser Reste Null sein kann. Der Rest des *Mittelgliedes* $\frac{p^2-1}{8}$ kommt nicht noch einmal vor, die übrigen Reste wiederholen sich aber bei den folgenden Gliedern in umgekehrter Ordnung.

Wäre nämlich $\frac{x(x+1)}{2} \equiv \frac{y(y+1)}{2}$ (mod. p), während mindestens eine der Zahlen x, y kleiner und die andere nicht grösser als $\frac{p-1}{2}$ ist, so würde daraus $(x-y)(x+y+1) \equiv 0$ folgen, was nicht sein kann. Dagegen ist $\frac{x(x+1)}{2} \equiv \frac{y(y+1)}{2}$, wenn $y = p-(x+1)$ *).

Diese $\frac{p-1}{2}$ verschiedenen Reste sollen *trigonale Reste* heissen, die übrigen $\frac{p-1}{2}$ Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... $p-1$ dagegen *trigonale Nichtreste*. In weiterem Sinne werden dann auch die Zahlen, welche einem trigonalen Reste oder trigonalen Nichtreste congruent sind, bezüglich als trigonale Reste oder trigonale Nichtreste bezeichnet.

Der Rest des Mittelgliedes soll M heissen, also $M \equiv \frac{p^2-1}{8}$ und $8M \equiv -1$, d. h. es ist $8M$ und folglich auch $2M$ ein quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest, je nachdem $p = 4n+1$ oder $p = 4n+3$, demnach M quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest, je nachdem p gleich $8n+1$, $8n+3$

*) Man vergleiche auch Bd. 61, p. 74 dieses Journals.

oder gleich $8n+5$, $8n+7$ ist, d. h. je nachdem -2 ein quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest ist.

2) Die Frage, ob eine gegebene Zahl ein trigonaler Rest ist, lässt sich auf die Frage zurückführen, ob eine gegebene Zahl ein quadratischer Rest ist. Soll nämlich k ein trigonaler Rest sein, und ist nicht $k=M$, so muss es eine Zahl $x<\frac{p-1}{2}$ geben, für welche die Congruenz $\frac{x(x+1)}{2}\equiv k$ statt hat, also $(2x+1)^2\equiv 8k+1$. Soll k ein trigonaler Rest sein, so muss mithin $8k+1$ ein quadratischer Rest sein, ist umgekehrt $8k+1$ ein quadratischer Rest, also $\equiv(2x+1)^2$, wo $x<\frac{p-1}{2}$, so ist k ein trigonaler Rest. Die Zahl k ist also überhaupt ein trigonaler Rest oder trigonaler Nichtrest, je nachdem $8k+1$ ein quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest ist, abgesehen von dem Falle wenn $k=M$.

Aus den trigonalen Resten findet man demnach, mit Vernachlässigung der Vielfachen von p, die quadratischen Reste, indem man erstere mit 8 multiplicirt und die Einheit addirt. Nur *einen* quadratischen Rest findet man auf diese Weise nicht, nämlich wenn man M mit 8 multiplicirt und die Einheit addirt, da $8M+1\equiv 0$. Dieser fehlende quadratische Rest ist die Einheit; gäbe es nämlich einen trigonalen Rest k, für welchen $8k+1\equiv 1$, so wäre $8k\equiv 0$, während $k<p$.

Ebenso findet man die quadratischen Nichtreste aus den trigonalen Nichtresten, indem man letztere mit 8 multiplicirt und die Einheit addirt. Ist nämlich l ein trigonaler Nichtrest, so kann nicht $8l+1$ ein quadratischer Rest sein, da aus $8l+1\equiv(2x+1)^2$, d. h. $l\equiv\frac{x(x+1)}{2}$, folgen würde, dass l ein trigonaler Rest ist.

Da $16M\equiv-2$ oder $8.2M+1\equiv-1$, so folgt, dass $2M$ ein trigonaler Rest oder trigonaler Nichtrest ist, je nachdem p gleich $4n+1$ oder $4n+3$. Mithin ist $2M$ zugleich quadratischer und trigonaler Rest oder quadratischer und trigonaler Nichtrest (1.).

3) Ist $2M-k$ ein trigonaler Rest, also nicht $k\equiv 2M$, so ist auch $16M-8k+1$ ein quadratischer Rest, aber $16M\equiv-2$; also ist dann auch $-(8k+1)$ ein quadratischer Rest, und daher $8k+1$ zugleich mit -1 ein quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest. Ist dagegen $2M-k$ ein trigonaler Nichtrest, so folgt ebenso, dass $8k+1$ ein quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest ist, je nachdem -1 ein quadratischer Nichtrest oder quadratischer Rest ist. Nun ist aber $8k+1$ auch ein quadratischer Rest oder

quadratischer Nichtrest, je nachdem k ein trigonaler Rest oder trigonaler Nichtrest ist. Ist also $p = 4n+1$, so sind die Zahlen k und $2M-k$ zugleich trigonale Reste oder trigonale Nichtreste, ist dagegen $p = 4n+3$, so ist die eine dieser Zahlen ein trigonaler Rest, die andere ein trigonaler Nichtrest. Nun ist $2M$ ein trigonaler Rest, wenn $p = 4n+1$ (§. 2.), es findet sich also unter den trigonalen Resten eine Zahl $k \equiv 2M$ (oder $2M$ selbst). Abgesehen von dieser Zahl und der Zahl M, werden sich daher die übrigen $2n-2$ trigonalen Reste immer paarweise so zusammenstellen lassen, dass die Summe jedes Paares $\equiv 2M$ ist, und die $2n$ trigonalen Nichtreste werden sich ebenfalls paarweise so zusammenstellen lassen, dass die Summe jedes Paares $\equiv 2M$ ist. Ist z. B. $p = 17$, so sind die trigonalen Reste 1, 3, 6, 10, 15, 4, 11, 2. Hier ist $M = 2$, lässt man also die Zahlen 2 und 4 bei Seite, so bilden die übrigen trigonalen Reste die Paare 1, 3; 6, 15; 10, 11; so dass die Summe jedes Paares $\equiv 4$ ist. Die trigonalen Nichtreste sind 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16, sie bilden die Paare 5, 16; 7, 14; 8, 13; 9, 12. Ist dagegen $p = 4n+3$, so ist $2M$ ein trigonaler Nichtrest, sondert man daher M von den trigonalen Resten und $2M$ von den trigonalen Nichtresten ab, so kann man die übrigen trigonalen Reste und trigonalen Nichtreste immer so paarweise zusammenstellen, dass die Summe eines Restes und eines Nichtrestes $\equiv 2M$ ist. Ist z. B. $p = 19$, so sind die trigonalen Reste 1, 3, 6, 10, 15, 2, 9, 17, 7 und die trigonalen Nichtreste 4, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 18. Hier ist $M = 7$, $2M = 14$, sondert man diese zwei Zahlen ab, so hat man folgende aus einem Reste und einem Nichtreste bestehende Paare, deren Summe $\equiv 14$ ist, nämlich 1, 13; 3, 11; 6, 8; 10, 4; 15, 18; 2, 12; 9, 5; 17, 16.

Diese Zusammenstellung in Paaren ist nur auf eine einzige Art möglich. Denn setzt man $2M-k$ statt k, so erhält man k statt $2M-k$.

Es folgt hieraus weiter, dass, wenn $p = 4n+1$. die Summe eines trigonalen Restes a und eines trigonalen Nichtrestes b niemals $\equiv 2M$ sein kann. Denn jedenfalls giebt es einen trigonalen Rest a', so dass $a + a' \equiv 2M$, es müsste also $a' = b$ sein. Ebenso folgt, dass, wenn $p = 4n+3$, niemals die Summe zweier trigonalen Reste oder zweier trigonalen Nichtreste $\equiv 2M$ sein kann.

4) Ist M eine gerade Zahl, so setze man $\frac{M}{2} = h$, ist M ungerade, so sei $\frac{M+p}{2} = h$, so dass jedenfalls h eine ganze Zahl ist. Unter dieser Voraussetzung gilt der Satz:

Die Summe der trigonalen Reste ist immer $\equiv h$ (mod. p).

Es ist nämlich $4M \equiv \frac{(p-1)(p+1)}{2} \equiv -\frac{p+1}{2} \equiv 8h$. Bezeichnet man nun die trigonalen Reste durch $t_1, t_2, \dots t_{\frac{p-1}{2}}$ und die quadratischen Reste durch $a_1, a_2, \dots a_{\frac{p-1}{2}}$, so ist (§. 2)

$$8t_1+1+8t_2+1+\dots+8t_{\frac{p-1}{2}}+1 = 8(t_1+t_2+\dots+t_{\frac{p-1}{2}})+\frac{p-1}{2} \equiv a_1+a_2+\dots+a_{\frac{p-1}{2}}-1;$$

aber $a_1+a_2+\dots+a_{\frac{p-1}{2}} \equiv 0$, also

$$8(t_1+t_2+\dots+t_{\frac{p-1}{2}}) \equiv -\frac{p+1}{2} \equiv 8h,$$

mithin

$$t_1+t_2+\dots+t_{\frac{p-1}{2}} \equiv h\,^*).$$

Bezeichnet man die Summe der trigonalen Reste und der trigonalen Nichtreste bezüglich durch ΣR und ΣN, so ist $\Sigma R+\Sigma N \equiv 0$, mithin

$$\Sigma R \equiv h, \quad \Sigma N \equiv -h, \quad \Sigma R - \Sigma N \equiv M,$$

es kann also niemals die Summe der trigonalen Reste der Summe der trigonalen Nichtreste congruent sein.

Da $2M$ ein quadratischer Rest oder ein quadratischer Nichtrest ist, je nachdem p gleich $4n+1$ oder $4n+3$, so gilt dasselbe auch von h und daher auch von ΣR, dagegen ist ΣN immer ein quadratischer Rest, ausgenommen wenn $p=3$, indem dann $\Sigma R = 1$ ein quadratischer Rest und $\Sigma N = 2$ ein quadratischer Nichtrest ist.

5) Man bezeichne durch PR und PN bezüglich das Product aller trigonalen Reste und aller trigonalen Nichtreste, dann hat man

$$PR \equiv \pm \frac{p-1}{2},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem p gleich $8n+1$, $8n+3$ oder $8n+5$, $8n+7$.

Bezeichnet man nämlich durch $f(x)$ das Product $1.3.6\dots\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$, so ist $PR \equiv f\left(\frac{p-1}{2}\right)$. Nun ist

$$f(x) = \frac{(x+1)x}{2}\cdot\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}\dots 1 = \frac{(x+1)x^2(x-1)^2\dots 2^2.1}{2^x},$$

---

*) Ausgenommen ist jedoch der Fall, wenn $p=3$, weil dann der einzige quadratische Rest $a_1 = 1$ nicht $\equiv 0$ ist, mithin $8t_1 \equiv \frac{p+1}{2} \equiv -8h$ und $t_1 \equiv -h$.

also, wenn $x=\frac{p-1}{2}$ und Q das Product aller quadratischen Reste bedeutet,

$$PR \equiv \frac{\frac{p+1}{2}\cdot Q}{2^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Nun ist bekanntlich $Q\equiv 1$ oder $\equiv -1$, je nachdem p gleich $4n+3$ oder $4n+1$, und $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1$ oder $\equiv -1$, je nachdem p gleich $8n+1$, $8n+7$ oder $8n+3$, $8n+5$, also $PR\equiv\frac{p+1}{2}$ oder $-\frac{p+1}{2}$, je nachdem p gleich $8n+5$, $8n+7$ oder $8n+1$, $8n+3$.

Da $PR.PN\equiv 1.2.3\ldots(p-1)\equiv -1$, so folgt $PN\equiv 2$ oder $PN\equiv -2$, je nachdem p gleich $8n+1$, $8n+3$ oder $8n+5$, $8n+7$. Man hat also jedenfalls

$$4PR+PN\equiv 0.$$

6) Ist p gleich $8n+1$ oder $8n+5$, so enthalten die trigonalen Reste ebenso viel quadratische Reste als quadratische Nichtreste, also im ersten Falle $2n$ quadratische Reste und $2n$ quadratische Nichtreste, im zweiten $2n+1$ quadratische Reste und $2n+1$ quadratische Nichtreste. Ist $p=8n+7$, so enthalten die trigonalen Reste $2n+1$ quadratische Reste und $2n+2$ quadratische Nichtreste, dagegen $2n+1$ quadratische Reste und $2n$ quadratische Nichtreste, wenn $p=8n+3$. Soll nämlich ein trigonaler Rest zugleich ein quadratischer Rest sein, so muss $\frac{x(x+1)}{2}\equiv a^2$ oder $(2x+1)^2\equiv 8a^2+1$ sein. Setzt man $2a=b$, so hat man mithin $(2x+1)^2-2b^2\equiv 1$, es ist also die Frage, wie viel Lösungen die Congruenz

$$(C.)\qquad X^2-2Y^2\equiv 1\,(\text{mod.}\,p)$$

zulässt, wenn X und Y nur eine der p Zahlen $1, 2, \ldots (p-1), p$ sein können. Nun hat bekanntlich die Congruenz

$$X^2+AY^2+B\equiv 0\qquad(\text{mod.}\,p),$$

wo A und B ganze (positive oder negative) nicht durch p theilbare Zahlen, und X, Y ganze positive Zahlen, die nicht grösser als p sind, bedeuten, entweder $p+(-1)^{\frac{p+1}{2}}$ Lösungen, oder $p+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ Lösungen, je nachdem A ein quadratischer Rest oder ein quadratischer Nichtrest ist. Die Congruenz $(C.)$ hat demnach $8n$ oder $8n+4$ Lösungen, je nachdem p gleich $8n+1$ oder $8n+3$, dagegen $8n+6$ Lösungen, wenn p gleich $8n+5$ oder $8n+7$.

---

*) Man vergleiche Bd. 9, pag. 183 dieses Journals.

In der gegenwärtigen Betrachtung sind aber nicht alle diese Lösungen brauchbar. Zunächst sind nämlich diejenigen auszuschliessen, bei welchen $Y=p$, da Y eine gerade Zahl $2a$ sein soll. Setzt man ferner vorläufig diejenigen Lösungen bei Seite, bei welchen $X=p$ ist, so lassen sich die übrigen Lösungen immer in Gruppen von je vier zusammenstellen. Sind nämlich $X=\alpha$ und $Y=\beta$ Werthe, welche der Congruenz $(C.)$ genügen, so hat man noch ausserdem die Lösungen $X=p-\alpha$, $Y=\beta$; $X=\alpha$, $Y=p-\beta$; $X=p-\alpha$, $Y=p-\beta$. Von diesen vier Lösungen kann aber hier nur eine einzige gebraucht werden. Da nämlich, je nachdem α gerade oder ungerade, $p-\alpha$ ungerade oder gerade ist, und je nachdem β gerade oder ungerade, $p-\beta$ ungerade oder gerade ist, so werden bei zwei dieser Lösungen X und Y zugleich gerade oder zugleich ungerade sein, bei einer wird X gerade und Y ungerade sein, und bei einer X ungerade und Y gerade. Es kann aber hier nur die letzte Lösung gebraucht werden, da $X=2x+1$, $Y=2a$.

Ist nun p gleich $8n+1$ oder $8n+3$, so kommen unter den Lösungen der Congruenz $(C.)$ nicht bloss die zwei vor, bei welchen $Y=p$, mithin $X^2-1\equiv 0$, d. h. $X=1$ oder $X=p-1$, sondern auch die zwei, bei welchen $X=p$, insofern die Congruenz $2Y^2\equiv -1$ alsdann zwei Lösungen $Y=\gamma$ und $Y=p-\gamma$ hat. Zieht man zunächst diese vier Lösungen von den sämmtlichen Lösungen ab, so bleiben noch $8n-4$ Lösungen, wenn $p=8n+1$, und $8n$ Lösungen, wenn $p=8n+3$. Von diesen können also im ersten Falle nur $2n-1$ und im zweiten nur $2n$ gebraucht werden. Da ferner die zwei Lösungen, welche zu $Y=p$ gehören, wegfallen, und, wenn $X=p$, von den entsprechenden Werthen $Y=\gamma$, $Y=p-\gamma$ nur derjenige gebraucht werden kann, bei welchem Y eine gerade Zahl ist, so kommt nur noch eine Lösung hinzu. Die Gesammtzahl der hier brauchbaren Lösungen ist also $2n$ oder $2n+1$, je nachdem p gleich $8n+1$ oder $8n+3$.

Ist dagegen p gleich $8n+5$ oder $8n+7$, so findet die Congruenz $2Y^2\equiv -1$ nicht statt, die beiden Lösungen, welche $X=p$ entsprechen würden, kommen also unter der Gesammtheit der $8n+6$ Lösungen nicht vor. Es sind mithin nur noch die hier nicht brauchbaren zwei Lösungen abzuziehen, welche zu $Y=p$ gehören, so dass nur noch $8n+4$ Lösungen übrig bleiben, von welchen der vierte Theil, also $2n+1$ Lösungen, hier gebraucht werden können.

Z. B. für $p=17$ sind die trigonalen Reste 1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 15, unter diesen sind 1, 2, 4, 15 quadratische Reste. Für $p=19$ sind die trigonalen Reste 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 15, 17, unter diesen sind 1, 6, 7, 9, 17

quadratische Reste. Für $p=23$ sind die trigonalen Reste 1, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 20, 21, 22, unter diesen sind 1, 3, 6, 9, 13 quadratische Reste. Für $p=29$ sind die trigonalen Reste 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 15, 16, 18, 20, 21, 26, 28, unter diesen sind 1, 4, 6, 7, 16, 20, 28 quadratische Reste.

7) Nennt man zur Abkürzung die Zahlen, welche aus den Trigonalzahlen entstehen, indem man letztere mit 2 multiplicirt, ***Bitrigonalzahlen***, so erhält man die kleinsten positiven Reste der ersten $p-2$ Bitrigonalzahlen, nach dem Modul p, indem man die ersten $p-2$ trigonalen Reste mit 2 multiplicirt und die Vielfachen von p vernachlässigt. Es ergiebt sich hieraus unmittelbar, dass die $\frac{p-1}{2}$ ersten dieser Reste unter einander verschieden sind, sie sollen *bitrigonale* Reste heissen, dass der $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\text{te}}$ Rest nur einmal vorkommt und daher das *Mittelglied* heissen soll, während die übrigen Reste sich nach dem Mittelgliede in umgekehrter Ordnung wiederholen. Verschiedene Eigenschaften der bitrigonalen Reste, welche sich auch direct leicht beweisen lassen, können aus den oben erwiesenen Eigenschaften der trigonalen Reste abgeleitet werden. So ergiebt sich, dass die Summe der bitrigonalen Reste $\equiv M$, dass das Product dieser Reste $\equiv \frac{p-1}{2}$ oder $\equiv -\frac{p-1}{2}$, je nachdem p gleich $4n+1$ oder $4n+3$, dass unter den bitrigonalen Resten $2n$ oder $2n+1$ quadratische Reste vorkommen, je nachdem p in einer der Formen $8n+1$, $8n+3$ oder $8n+5$, $8n+7$ enthalten ist.

8) Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich der Beweis eines Satzes von ***Eisenstein***, welchen man in diesem Journale (Bd. 27, p. 283) findet.

Ist nämlich p eine Primzahl von der Form $4n+1$, g eine primitive Wurzel für den Modul p, und bezeichnet man durch a, b, c, d bezüglich die Anzahl der Glieder in der Reihe der $p-2$ ersten Bitrigonalzahlen, deren Indices von der Form $4s$, $4s+1$, $4s+2$, $4s+3$ sind, so ist

$$(a-c)^2+(b-d)^2 = p.$$

Um dies zu beweisen, vertheile man die bitrigonalen Reste in 4 Gruppen A, B, C, D, je nachdem diese Reste zu einem Index von der Form $4s$, $4s+1$, $4s+2$, $4s+3$ gehören. Sei a', b', c', d' bezüglich die Anzahl der ***verschiedenen*** bitrigonalen Reste, welche zu der Gruppe A, B, C, D gehören. Den zu diesen vier Gruppen gehörenden Resten entsprechen also bezüglich die Congruenzen $x(x+1)\equiv g^{4s}$; $x(x+1)\equiv g^{4s+1}$; $x(x+1)\equiv g^{4s+2}$; $x(x+1)\equiv g^{4s+3}$, oder $(2x+1)^2\equiv 4g^{4s}+1$; $(2x+1)^2\equiv 4g^{4s+1}+1$; $(2x+1)^2\equiv 4g^{4s+2}+1$; $(2x+1)^2\equiv 4g^{4s+3}+1$.

9) Sei nun zuerst $p = 8n+1$, also 4 ein *biquadratischer* Rest; statt der letzten Congruenzen kann man also auch schreiben: $(2x+1)^2 \equiv g^{4s}+1$; $(2x+1)^2 \equiv g^{4s+1}+1$; $(2x+1)^2 \equiv g^{4s+2}+1$; $(2x+1)^2 \equiv g^{4s+3}+1$.

Das Mittelglied der bitrigonalen Reste, welches $\equiv \frac{p^2-1}{4}$ ist, und mithin ebenfalls ein biquadratischer Rest, gehört demnach zur Gruppe A.

Bedient man sich der Bezeichnung, welche *Gauss* in der theoria resid. biquadr. (comment. 1 art. 15 ff.) anwendet, so ergiebt sich Folgendes. In der Congruenz

$$(J.) \qquad (2x+1)^2 \equiv g^{4s+1}+1$$

ist $(2x+1)^2$ entweder $\equiv g^{4k}$ oder $\equiv g^{4k+2}$, im ersten Falle sind die Lösungen dieser Congruenz unter den Lösungen der Congruenz $1+\alpha+\beta \equiv 0$ enthalten, deren Anzahl, nach *Gauss*, gleich i gesetzt wird; im zweiten Falle sind die Lösungen der Congruenz $(J.)$ unter den Lösungen der Congruenz $1+\beta+\gamma \equiv 0$ enthalten, deren Anzahl gleich m gesetzt wird. Bei der Congruenz

$$(K.) \qquad (2x+1)^2 \equiv g^{4s+3}+1$$

ergiebt sich ebenso, dass die Lösungen derselben entweder unter den Lösungen der Congruenz $1+\alpha+\delta \equiv 0$ enthalten sind, deren Anzahl gleich l gesetzt wird, oder unter den Lösungen der Congruenz $1+\beta+\delta \equiv 0$, deren Anzahl gleich m ist. Nun ist die Anzahl der Lösungen der beiden Congruenzen $(J.)$ und $(K.)$ zusammengenommen gleich $b'+d'$, dies ist aber die Anzahl der quadratischen Nichtreste, welche unter den bitrigonalen Resten vorkommen, also nach §. 7

$$b'+d' = 2n,$$

es ist aber auch, wie *Gauss* (a. a. O art. 16) beweist,

$$i+m+l+m = 2n,$$

mithin

$$b' = i+m; \qquad d' = l+m$$

und

$$b'-d' = i-l.$$

Da aber jeder bitrigonale Rest, welcher zu einem Index $4s+1$ oder $4s+3$ gehört, in der Reihe der ersten $p-2$ Bitrigonalzahlen doppelt vorkommt, so ist der Unterschied der Anzahl aller dieser bitrigonalen Reste, welche zu einem Index von der Form $4s+1$ oder von der Form $4s+3$ gehören, $2(b'-d')$ gleich $2(i-l)$ oder, wenn man $2b'$ gleich b, $2d'$ gleich d setzt,

$$(I.) \qquad b-d = 2(i-l).$$

Für die Congruenz

$$(L.) \qquad (2x+1)^2 = g^{4s}+1$$

ergiebt sich ebenso, dass ihre Lösungen entweder unter den Lösungen der Congruenz $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ enthalten sind, deren Anzahl *Gauss* gleich h setzt, oder unter den Lösungen der Congruenz $1+\alpha+\gamma\equiv 0$, deren Anzahl gleich k gesetzt wird. Auszunehmen ist jedoch der in der Congruenz ($L.$) enthaltene Fall, wo $x=\frac{p-1}{2}$ ist, welcher also zu dem *Mittelgliede* der bitrigonalen Reste gehört, indem alsdann $(2x+1)^2\equiv 0$ und $g^{4n}+1\equiv 0$, welche Congruenz weder in $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ noch in $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ enthalten ist. Ferner sind die Lösungen der Congruenz

$$(M.)\qquad (2x+1)^2\equiv g^{4s+2}+1$$

entweder unter den Lösungen der Congruenz $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ enthalten, deren Anzahl gleich k ist, oder unter den Lösungen der Congruenz $1+\gamma+\gamma'\equiv 0$, deren Anzahl ebenfalls gleich k ist. Nun folgt aus den *Gauss*ischen Formeln

$$h+k=2n-1-i-l=2m-1=2n-2k-1,$$

also

$$h+k+k+k=h+3k=2n-1.$$

Die Anzahl der Lösungen der zwei Congruenzen ($L.$) und ($M.$) zusammengenommen ist aber, wenn man den oben erwähnten Ausnahmefall nicht mitrechnet, $a'-1+c'$, und nach §. 7, da $a'+c'$ die Anzahl der quadratischen Reste ist, welche unter den bitrigonalen Resten vorkommen,

$$a'+c'-1=2n-1,$$

also

$$a'-1=h+k;\qquad c'=2k$$

und

$$a'-c'-1=h-k.$$

Der Unterschied der Anzahl der Reste der ersten $p-2$ Bitrigonalzahlen, welche zu einem Index von der Form $4s$ oder $4s+2$ gehören, ist aber, da das Mittelglied, welches nur einmal vorkommt, zur Gruppe A gehört,

$$2a'-1-2c'=2(h-k)+1.$$

Setzt man $2a'-1=a$, $2c'=c$, so ist mithin

$$(\text{II.})\qquad a-c=2(h-k)+1.$$

Nun ist, wie schon oben bemerkt wurde, $h+k=2m-1$, also $h-k=2(m-k)-1$ und $2(h-k)+1=4(m-k)-1$, mithin

$$[2(h-k)+1]^2=[4(k-m)+1]^2.$$

Da nun nach *Gauss* (a. a. O. art. 18.)

$$p=[4(k-m)+1]^2+4(l-i)^2,$$

so folgt aus (I.) und (II.)

$$\text{(III.)} \quad p = (a-c)^2+(b-d)^2.$$

10) Ist zweitens $p = 8n+5$, so ist 4 ein quadratischer und kein biquadratischer Rest, dasselbe ist bei -1 der Fall, das Mittelglied der bitrigonalen Reste ist daher wieder ein biquadratischer Rest und gehört zur Gruppe A. Statt der Congruenzen

$(2x+1)^2 \equiv 4g^{4\nu}+1$; $(2x+1)^2 \equiv 4g^{4\nu+1}+1$; $(2x+1)^2 \equiv 4g^{4\nu+2}+1$; $(2x+1)^2 \equiv 4g^{4\nu+3}+1$

kann man nun bezüglich die Congruenzen

$(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu+2}+1$; $(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu+3}+1$; $(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu}+1$; $(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu+1}+1$

schreiben, welche also, der Reihe nach, zu den Gruppen A, B, C, D, gehören. Mit Benutzung der *Gauss*ischen Bezeichung ergiebt sich hier Folgendes. Die Lösungen der Congruenz $(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu+1}+1$ sind nun, je nachdem $(2x+1)^2 \equiv g^{4k}$ oder $\equiv g^{4k+2}$ ist, unter den Lösungen der Congruenz $1+\beta+\gamma \equiv 0$ oder der Congruenz $1+\alpha+\beta \equiv 0$ enthalten, deren Anzahl bezüglich m und l ist. Die Lösungen der Congruenz $(2x+1)^2 = g^{4\nu+3}+1$ sind, unter denselben Voraussetzungen, unter den Lösungen der Congruenz $1+\beta+\delta \equiv 0$ oder der Congruenz $1+\alpha+\delta \equiv 0$ enthalten, deren Anzahl bezüglich m oder i ist. Nun ist nach §. 7, für $p = 8n+5$,

$$b'+d' \doteq 2n+1,$$

aber nach *Gauss* (a. a. O. art. 20.).

$$m+l+m+i = 2n+1,$$

mithin $b' = l+m$; $d' = i+m$ und $d'-b' = i-l$, oder, wenn man wieder $2b'$ gleich b, $2d'$ gleich d setzt,

$$\text{(IV.)} \quad d-b = 2(i-l).$$

Ferner sind die Lösungen der Congruenz $(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu}+1$ unter den Lösungen der Congruenz $1+\alpha+\gamma \equiv 0$ oder der Congruenz $1+\alpha+\alpha' \equiv 0$ enthalten, deren Anzahl bezüglich h und k ist. Die Lösungen der Congruenz $(2x+1)^2 \equiv g^{4\nu+2}+1$ sind in den Lösungen der Congruenz $1+\gamma+\gamma' \equiv 0$ oder $1+\alpha+\gamma \equiv 0$ enthalten, deren Anzahl in beiden Fällen $= h$ ist. Doch ist wieder der dem Mittelgliede der bitrigonalen Reste entsprechende Fall, wenn $x = \frac{p-1}{2}$ ist, auszunehmen, welcher in keiner der zwei Congruenzen $1+\gamma+\gamma' \equiv 0$, $1+\alpha+\gamma \equiv 0$ enthalten ist. Nun ist, nach §. 7, $\alpha'-1+c' = 2n$ und nach *Gauss* (a. a O. art. 20)

$$\text{(V.)} \quad \begin{cases} h+k = 2n+1-(i+l) = 2m, \\ 2h = 2n-2m, \end{cases}$$

demnach $3h+k=2n$. Hieraus folgt $c'=h+k$, $a'-1=2h$ und $a'-c'-1=h-k$, also $2(a'-c'-1)+1=2(h-k)+1$. Aus den Gleichungen (V.) folgt

$$h-k=2(n-2m)=2(h-m).$$

Mithin

$$2(a'-1-c')+1=4(h-m)+1,$$

und wenn man $2a'-1$ gleich a, $2c'$ gleich c setzt,

$$a-c = 4(h-m)+1.$$

Da nun, in diesem Falle, nach *Gauss*

$$p = [4(h-m)+1]^2+4(i-l)^2,$$

so ist auch

$$\text{(VI.)} \qquad p = (a-c)^2+(b-d)^2.$$

Die Formeln (III.) und (VI.) enthalten den *Eisenstein*schen Satz. Es ergiebt sich übrigens aus dem Vorhergehenden von selbst, dass der Satz ebensowohl auf die Trigonalzahlen als auf die Bitrigonalzahlen bezogen werden kann. Bezeichnet a'', b'', c'', d'' die Anzahl der Glieder in der Reihe der ersten $p-2$ Trigonalzahlen, welche bezüglich zu den Indices $4s$, $4s+1$, $4s+2$, $4s+3$ gehören, so ist, wenn $p=4n+1$,

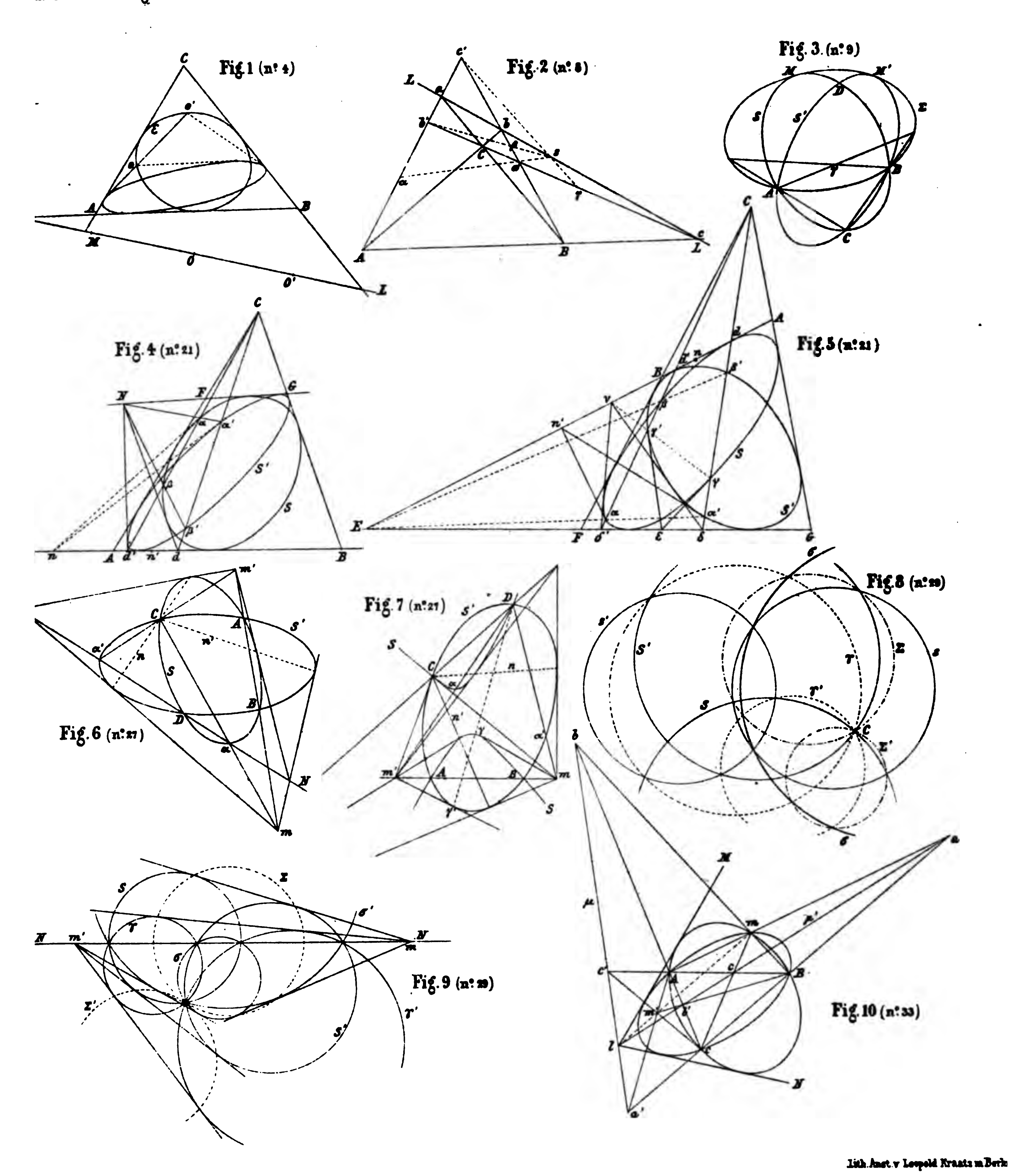
$$p = (a''-c'')^2+(b''-d'')^2.$$

Ist nämlich $p=8n+1$, so ist, je nachdem 2 zu einem Index von der Form $4s$ oder von der Form $4s+2$ gehört, $a''=a$, $b''=b$, $c''=c$, $d''=d$ oder $a''=c$, $b''=d$, $c''=a$, $d''=b$.

Ist $p=8n+5$, so ist, je nachdem 2 zu einem Index von der Form $4s+1$ oder $4s+3$ gehört, $a''=b$, $b''=c$, $c''=d$, $d''=a$ oder $a''=d$, $b''=a$, $c''=b$, $d''=c$. Mithin jedenfalls

$$(a''-c'')^2+(b''-d'')^2 = (a-c)^2+(b-d)^2.$$

Göttingen, den 1. März 1868.



Lith. Anst. v Leopold Kraatz in Berlin







STORAGE A

